

石景山区 2020 届第一学期高二期末试卷

数 学

学校_____姓名_____学号_____

本试卷共 5 页，满分为 100 分，考试时间为 120 分钟。请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后上交答题卡。

第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如果 $2, a, b, c, 10$ 成等差数列，那么 $c - a =$

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

2. 若双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率是

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

3. 抛物线 $x^2 = -2y$ 的焦点坐标是

- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(0, -\frac{1}{2})$ C. $(1, 0)$ D. $(-1, 0)$

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_n \cdot a_{n+1} = -2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)，那么 $a_8 =$

- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

5. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, e^x > x$ ”的否定是 ()

A. $\exists x \in \mathbf{R}, e^x < x$

B. $\forall x \in \mathbf{R}, e^x < x$

C. $\forall x \in \mathbf{R}, e^x \leq x$

D. $\exists x \in \mathbf{R}, e^x \leq x$

6. 设椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的两个焦点为 F_1, F_2 , 且 P 点的坐标为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

则 $|PF_1| + |PF_2| =$

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

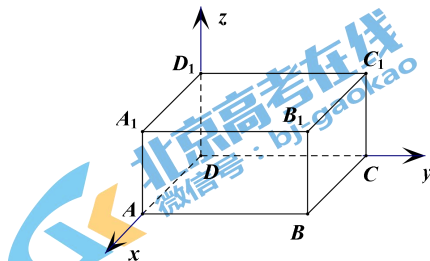
7. 如图, 以长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点, 过 D 的三条棱所在的直线为坐标轴, 建立空间直角坐标系, 若 $\overrightarrow{DB_1}$ 的坐标为 $(4, 3, 2)$, 则 C_1 的坐标是

A. $(0, 3, 2)$

B. $(0, 4, 2)$

C. $(4, 0, 2)$

D. $(2, 3, 4)$



8. 设 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等比数列, 公比为 q , 则 “ $q < 0$ ” 是 “对任意的正整数 n , $a_{2n-1} + a_{2n} < 0$ ” 的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 设平面 α 的法向量为 $\vec{n}$, 直线 l 的方向向量为 $\vec{m}$, 那么 “ $\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = 60^\circ$ ” 是 “直线 l 与平面 α 夹角为 30° ” 的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

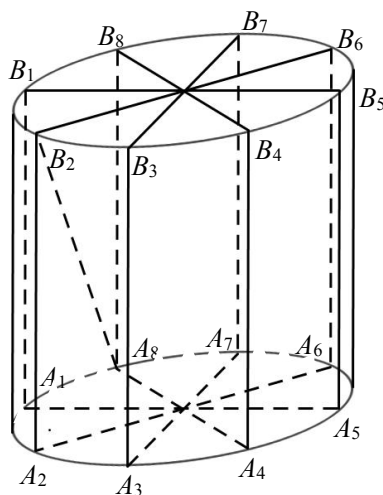
10. 如图所示, 为了制作一个圆柱形灯笼, 先要制作 4 个全等的矩形骨架, 总计耗用 9.6 米铁丝, 骨架把圆柱底面 8 等份, 当灯笼的底面半径为 0.3 米时, 则图中直线 A_8B_2 与 A_2A_6 所在异面直线所成角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{6}}{12}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$



第II卷 (非选择题 共 60 分)

二、填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 3 分, 共 12 分.

11. 在空间直角坐标系中, 已知 $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 0, 2)$, 那么 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ _____.

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 且 $a_2 = 1$, $a_3 + a_4 = 6$. 设数列 $\{a_n - n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 那么 S_4 _____ S_5 (填“>”、“<”或“=”), 理由是_____.

13. 甲、乙两位同学分别做下面这道题目:

在平面直角坐标系中, 动点 M 到 $F(0, -2)$ 的距离比 M 到 x 轴的距离大 2, 求 M 的轨迹.

甲同学的解法是:

解：设 M 的坐标是 (x, y) ，则根据题意可知

$$\sqrt{x^2 + (y+2)^2} = |y| + 2, \text{ 化简得 } x^2 = 4(|y| - y). \quad ①$$

当 $y > 0$ 时，方程可变为 $x = 0$ ，②

这表示的是端点在原点、方向为 y 轴正方向的射线，且不包括原点。③

当 $y \leq 0$ 时，方程可变为 $x^2 = -8y$ ，④

这表示以 $F(0, -2)$ 为焦点，以直线 $y = 2$ 为准线的抛物线。⑤

所以 M 的轨迹为端点在原点、方向为 y 轴正方向的射线，且不包括原点和以 $F(0, -2)$ 为焦点，以直线 $y = 2$ 为准线的抛物线。

乙同学的解法是：

解：因为动点 M 到 $F(0, -2)$ 的距离比 M 到 x 轴的距离大 2，①

如图，过点 M 作 x 轴的垂线，垂足为 M_1 。

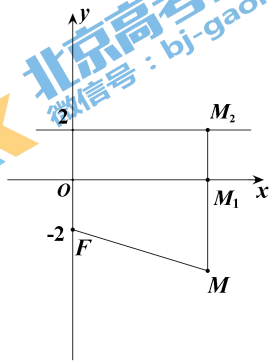
则 $|MF| = |MM_1| + 2$ 。

设直线 MM_1 与直线 $y = 2$ 的交点为 M_2 。

则 $|MM_2| = |MM_1| + 2$ 。②

即动点 M 到直线 $y = 2$ 的距离比 M 到 x 轴的距离大 2，③

所以动点 M 到 $F(0, -2)$ 的距离与 M 到直线 $y = 2$ 的距离相等。④



所以动点 M 的轨迹是以 $F(0, -2)$ 为焦点, 以直线 $y = 2$ 为准线的抛物线. ⑤

甲、乙两位同学中解答错误的是_____ (填“甲”或者“乙”),

他的解答过程是从_____处开始出错的 (请在横线上填写①、②、③、④或⑤).

14. 已知平面上的线段 l 及点 P , 任取 l 上一点 Q , 线段 PQ 长度的最小值称为点 P 到线段 l 的距离, 记作 $d(P, l)$.

请你写出到两条线段 l_1, l_2 距离相等的点的集合 $\Omega = \{P \mid d(P, l_1) = d(P, l_2)\}$,

其中 $l_1 = AB, l_2 = CD$; A, B, C, D 是下列两组点中的一组.

对于下列两种情形, 只需选做一种, 满分分别是① 3 分, ② 5 分.

① $A(1, 3), B(1, 0), C(-1, 3), D(-1, 0)$.

② $A(1, 3), B(1, 0), C(-1, 3), D(-1, -2)$.

你选择第_____种情形, 到两条线段 l_1, l_2 距离相等的点的集合 $\Omega =$ _____.

三、解答题: 本大题共 6 个小题, 共 48 分. 应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 8 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 满足 $a_1 = -1, a_5 = 3$, 数列 $\{b_n - a_n\}$ 是公比为 2 等比

数列, 且 $b_2 - 2a_2 = 2$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

16. (本题满分 8 分)

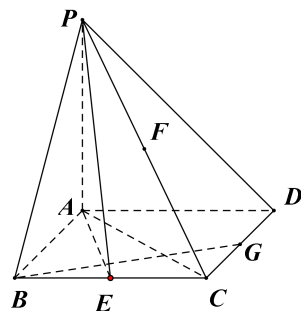
如图, 在底面是正方形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AP = AB = 2$,

E, F, G 是 BC, PC, CD 的中点.

(I) 求证: $BG \perp$ 平面 PAE ;

(II) 在线段 BG 上是否存在点 H , 使得 $FH \parallel$ 平面 PAE ?

若存在, 求出 $\frac{BH}{BG}$ 的值; 若不存在, 说明理由.



17. (本题满分 8 分)

已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ 和 $F_2(\sqrt{2}, 0)$, 长轴长为 4, 设直线 $y = x + 1$

交椭圆 C 于 A, B 两点.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 求弦 AB 的中点坐标及弦长.

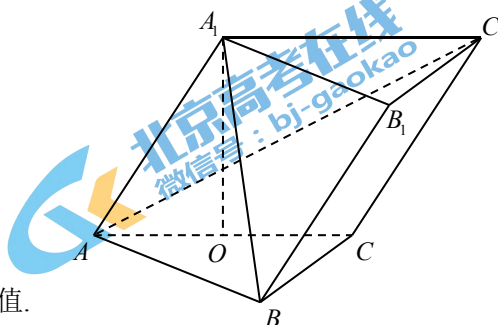
18. (本题满分 8 分)

如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=AC=2, AB=BC$, 且 $AB \perp BC$, O 为 AC 中点,

$A_1O \perp$ 平面 ABC .

(I) 求二面角 C_1-AA_1-B 的余弦值;

(II) 求直线 AC_1 与平面 A_1ABB_1 所成角的正弦值.



19. (本题满分 8 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, B_1, B_2 分别是椭圆短轴的上下两个端点; F_1 是椭圆的左焦点, P 是椭圆上异于点 B_1, B_2 的点, $\triangle B_1F_1B_2$ 是边长为 4 的等边三角形.

(I) 写出椭圆的标准方程;

(II) 设点 R 满足: $RB_1 \perp PB_1, RB_2 \perp PB_2$. 求证: $\triangle PB_1B_2$ 与 $\triangle RB_1B_2$ 的面积之比为定值.

20. (本题满分 8 分)

已知 $a_n = n$, $b_n = 2n - 1$, 记 $c_n = \max\{b_1 - a_1n, b_2 - a_2n, \dots, b_n - a_nn\}$

$(n = 1, 2, 3, \dots)$, 其中 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ 表示 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 这 s 个数中最大的数.

(I) 求 c_1, c_2, c_3 的值;

(II) 证明 $\{c_n\}$ 是等差数列.

石景山区 2020 届第一学期高二期末

数学(理)试卷答案及评分参考

一、选择题: 本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	B	A	D	D	A	B	A	B

二、填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 3 分, 共 12 分.

11. $\frac{1}{5}$; 12. $<$, $a_5 - 5 = 3 > 0$; 13. 乙, ②;
14. ①, y 轴; ② y 轴非负半轴, 抛物线 $y^2 = 4x(-2, y, 0)$, 直线 $y = -x - 1(x > 1)$.

三、解答题: 本大题共 6 个小题, 共 48 分.

15. (本题满分 8 分)

解: (I) 因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 满足 $a_1 = -1$, $a_5 = 3$,

$$\text{所以公差 } d = \frac{a_5 - a_1}{5 - 1} = 1.$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n - 2$.

……2 分

因为 $b_2 - 2a_2 = 2$, $a_2 = 0$,

所以 $b_2 - a_2 = 2$,

又因为数列 $\{b_n - a_n\}$ 是公比为 2 等比数列,

所以 $b_n - a_n = 2^{n-1}$.

……4 分

所以 $b_n = 2^{n-1} + n - 2$.

……5 分

(II) $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$

$$= (1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}) + (1 + 2 + \cdots + n) - 2n$$

$$= 2^n - 1 + \frac{n(n+1)}{2} - 2n.$$

……8 分

16. (本题满分 8 分)

解: (I) 证明: 因为四棱锥 $P-ABCD$ 底面是正方形, 且 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

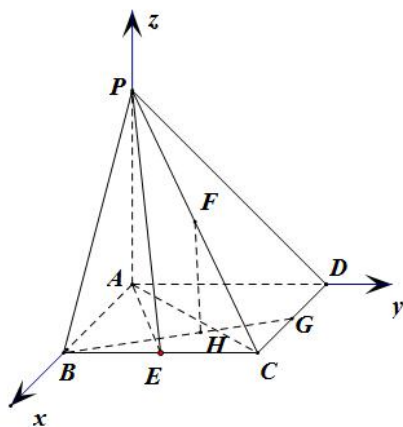
以点 A 为坐标原点, AB, AD, AP

所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图

所示空间直角坐标系. ……1 分

则 $A(0,0,0), B(2,0,0), P(0,0,2),$

$C(2,2,0), D(0,2,0),$



因为 E, F, G 是 BC, PC, CD 的中点,

所以 $E(2,1,0), F(1,1,1), G(1,2,0)$,

所以 $\overrightarrow{BG} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{AE} = (2, 1, 0)$,

所以 $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$, 且 $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$3 分

所以 $BG \perp AP$, $BG \perp AE$, 且 $AE \cap AP = A$.

所以 $BG \perp$ 平面 PAE4 分

(II) 假设在线段 BG 上存在点 H , 使得 $FH \parallel$ 平面 PAE .

设 $\overrightarrow{BH} = \lambda \overrightarrow{BG}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$),5 分

则 $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \lambda \overrightarrow{BG} = (1 - \lambda, 2\lambda - 1, -1)$.

因为 $FH \parallel$ 平面 PAE , $BG \perp$ 平面 PAE ,

所以 $\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{GB} = (-1) \cdot (1 - \lambda + 2(2\lambda - 1)) + 0 \times (-1) = 5\lambda - 3 = 0$6 分

所以 $\lambda = \frac{3}{5}$7 分

所以, 在线段 BG 上存在点 H , 使得 $FH \parallel$ 平面 PAE . 其中 $\frac{BH}{BG} = \frac{3}{5}$.

.....8 分

17. (本题满分 8 分)

解: (I) 因为椭圆 C 的焦点为 $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ 和 $F_2(\sqrt{2}, 0)$, 长轴长为 4,

所以椭圆的焦点在 x 轴上, $c = \sqrt{2}, a = 2$.

所以 $b = \sqrt{2}$.

所以椭圆 C 的标准方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(II) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, AB 线段的中点为 $M(x_0, y_0)$,

由 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4, \\ y = x + 1, \end{cases}$ 得 $3x^2 + 4x - 2 = 0, \Delta > 0$,

所以 $x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}, x_1 x_2 = -\frac{2}{3}$,

所以 $x_0 = -\frac{2}{3}, y_0 = x_0 + 1 = \frac{1}{3}$,

所以弦 AB 的中点坐标为 $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$,

$|AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$.

18. (本题满分 8 分)

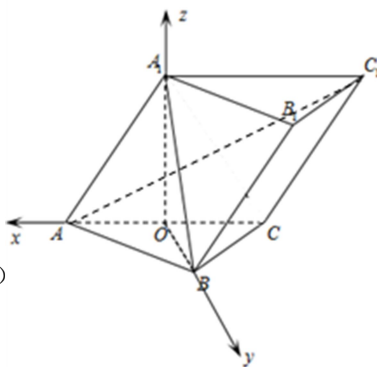
解: (I) 联结 OB , 因为 $AB = BC$, 所以 $OB \perp AC$.

又因为 $AO \perp$ 平面 ABC ,

所以以点 O 为坐标原点, OA, OB, OA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示空间直角坐标系.

则 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(-1, 0, 0), A_1(0, 0, \sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{AA_1} = (-1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$.



设平面 A_1ABB_1 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{AA_1} = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{AB} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \\ -x_1 + y_1 = 0, \end{cases}$$

令 $z_1 = 1$, 则 $\vec{n}_1 = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$.

易知平面 AA_1C_1C 的法向量 $\vec{n}_2 = (0, 1, 0)$,

$$\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

所以二面角 C_1-AA_1-B 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

(II) 设直线 AC_1 与平面 A_1ABB_1 所成角为 θ ,

$$\vec{CC_1} = \vec{AA_1} = (-1, 0, \sqrt{3}),$$

$$\vec{AC_1} = \vec{AC} + \vec{CC_1} = (-3, 0, \sqrt{3}).$$

$$\text{则} \sin \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{AC_1}|}{|\vec{n}_1| |\vec{AC_1}|} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

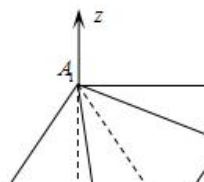
所以直线 A_1C 与平面 A_1ABB_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

19. (本题满分 8 分)

解: (I) 因为 $\triangle B_1F_1B_2$ 是边长为 4 的等边三角形,

所以 $b = 2, c = 2\sqrt{3}$.

所以 $a = 4$.



所以，椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 3 分

(II) 设直线 PB_1 , PB_2 的斜率分别为 k, k' , 则直线 PB_1 的方程为 $y = kx + 2$.

由 $RB_1 \perp PB_1$, 直线 RB_1 的方程为 $x + k(y - 2) = 0$.

将 $y = kx + 2$ 代入 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, 得 $(4k^2 + 1)x^2 + 16kx = 0$,

因为 P 是椭圆上异于点 B_1, B_2 的点, 所以 $x_P = -\frac{16k}{4k^2 + 1}$4 分

所以 $k' = \frac{y_P + 2}{x_P} = -\frac{1}{4k}$5 分

由 $RB_2 \perp PB_2$, 所以直线 RB_2 的方程为 $y = 4kx - 2$6 分

由 $\begin{cases} x + k(y - 2) = 0 \\ y = 4kx - 2 \end{cases}$, 得 $x_R = \frac{4k}{4k^2 + 1}$7 分

所以 $\frac{S_{\triangle PB_1B_2}}{S_{\triangle RB_1B_2}} = \left| \frac{x_P}{x_R} \right| = \left| \frac{-\frac{16k}{4k^2 + 1}}{\frac{4k}{4k^2 + 1}} \right| = 4$8 分

20. (本题满分 8 分)

解: (I) 易知 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ 且 $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 5$

$$\text{所以 } c_1 = b_1 - a_1 = 1 - 1 = 0, \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$c_2 = \max\{b_1 - 2a_1, b_2 - 2a_2\} = \max\{1 - 2 \times 1, 3 - 2 \times 2\} = -1, \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$c_3 = \max\{b_1 - 3a_1, b_2 - 3a_2, b_3 - 3a_3\} = \max\{1 - 3 \times 1, 3 - 3 \times 2, 5 - 3 \times 3\} = -2.$$

$\dots\dots 3 \text{ 分}$

(II) 下面证明: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$, 都有 $c_n = b_1 - a_1 \cdot n$. $\dots\dots 4 \text{ 分}$

当 $k \in \mathbf{N}^*$ 且 $2 \leq k \leq n$ 时,

$$(b_k - a_k \cdot n) - (b_1 - a_1 \cdot n) = [(2k - 1) - nk] - 1 + n$$

$$= (2k - 2) - n(k - 1) = (k - 1)(2 - n)$$

因为 $k - 1 > 0$ 且 $2 - n \leq 0$

$$\text{所以 } (b_k - a_k \cdot n) - (b_1 - a_1 \cdot n) \leq 0 \Rightarrow (b_1 - a_1 \cdot n) \geq (b_k - a_k \cdot n). \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

因此对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$, $c_n = b_1 - a_1 \cdot n = 1 - n$, 则 $c_{n+1} - c_n = -1$.

$\dots\dots 7 \text{ 分}$

又因为 $c_2 - c_1 = -1$,

故 $c_{n+1} - c_n = -1$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 均成立，从而 $\{c_n\}$ 是等差数列.

……8 分

【若有不同解法，请酌情给分】