2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(五)

文科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. $\frac{(2+i)^2}{i}=$

A. $4-3i$　　B. $4+3i$　　C. $-4+3i$　　D. $-4-3i$

2. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{-1,1,3\}$,那么 $A\cup B=$

A. $\{3\}$　　B. $\{1,3\}$

C. $\{-1,1,2,3\}$　　D. $\{x\mid -1\leq x\leq 3\}$

3. 函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x+3$ 的图象在点 $(-2,f(-2))$ 处的切线方程为

A. $2x+y+11=0$　　B. $2x+y-11=0$　　C. $2x-y+11=0$　　D. $2x-y-11=0$

4. 从 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$ 这五个数中任选两个不同的数,则这两个数的和大于 $\frac{1}{2}$ 的概率为

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{5}$

5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=25$,那么 $a_4=$

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

6. 甲、乙两班各有 10 名同学参加智力测试,他们的分数用茎叶图表示如下,则下列判断错误的是

甲班						乙班			
		5	2	2	8	1	2	3	7
8	6	5	4	3	9	2	5	9	
			4	1	10	1	4	6	

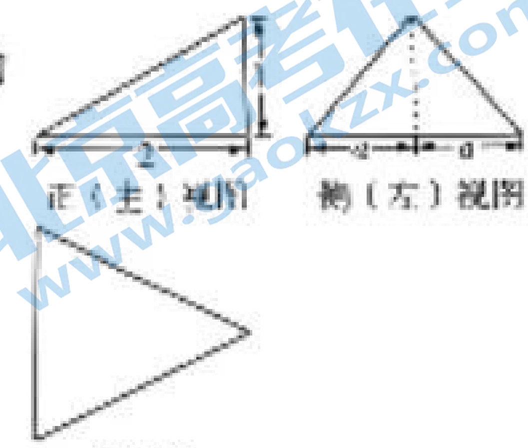
A. 甲班的分数在 100 以上的人数比乙班的少　　B. 甲班的极差比乙班的小

C. 甲班与乙班的中位数相等　　D. 甲班的平均数与乙班的相等

7. 函数$f(x)=\cos^2x-6\cos^2\frac{x}{2}+5$的最小值为

A. $-\frac{1}{4}$　　B. 0　　C. 2　　D. 6

8. 某多面体的体积是$\frac{2}{3}$，其三视图如图所示，则侧(左)视图中的$a=$

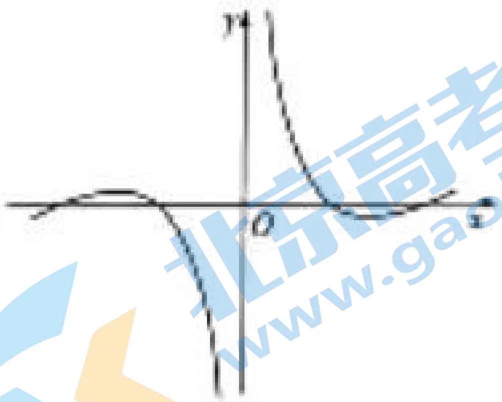


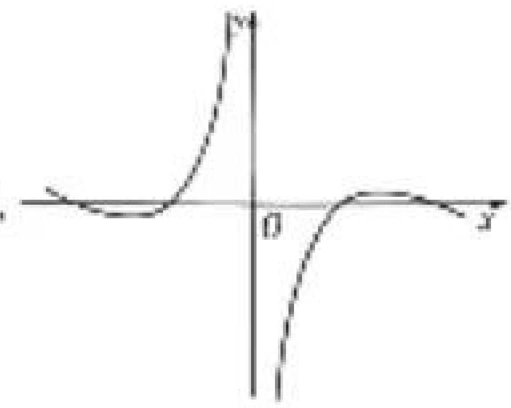
俯视图

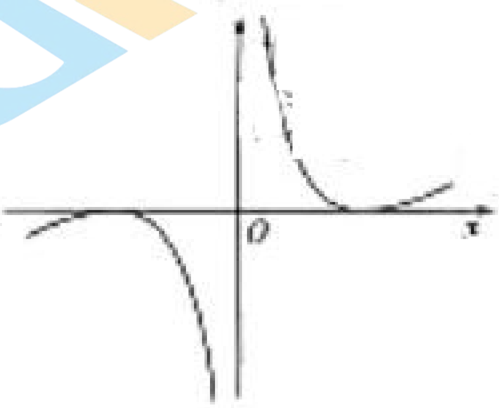
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$

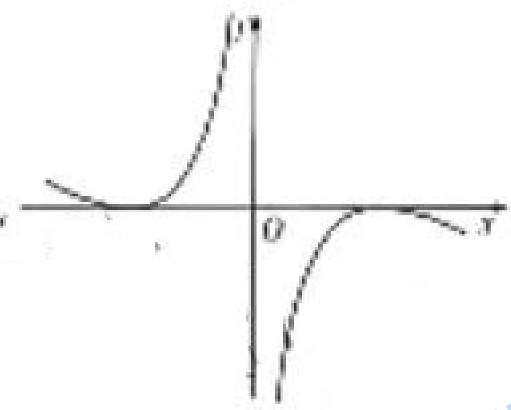
C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

9. 函数$f(x)=\frac{2}{x}\cos x+\frac{1}{x}$的图象大致为

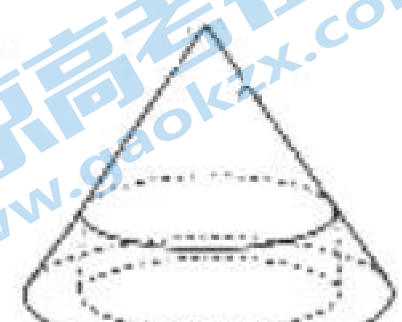
A. 

B. 

C. 

D. 

10. 如图所示，圆锥的底面半径为R，母线长为$\sqrt{10}R$，其内接圆柱的底面积与圆锥的底面积之比为9∶16，则该圆柱的表面积为



A. $2\pi R^2$　　B. $\frac{9}{4}\pi R^2$

C. $\frac{8}{3}\pi R^2$　　D. $\frac{5}{2}\pi R^2$

11. 设$a=(\log_2 3)^2$，$b=\log_4 5\cdot\log_2 3$，$c=2$，则

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$　　C. $b>a>c$　　D. $c>b>a$

12. 国家体育场"鸟巢"的钢结构鸟瞰图如图1所示，内、外两圈的钢骨架是由两个离心率相同的椭圆组成的对称结构．某校体育馆的钢结构与"鸟巢"类似，其平面图如图2所示，已知外层椭圆的长轴长为200米，且内、外椭圆的离心率均为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，由外层椭圆长轴的一个端点A向内层椭圆引切线AC，若AC的斜率为$-\frac{1}{2}$，则内层椭圆的短轴长为


图1

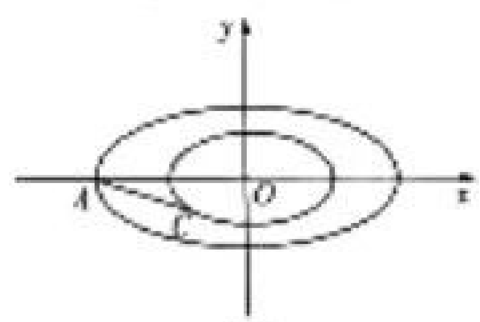


图2

A. 75米　　B. $50\sqrt{2}$米　　C. 50米　　D. $25\sqrt{2}$米

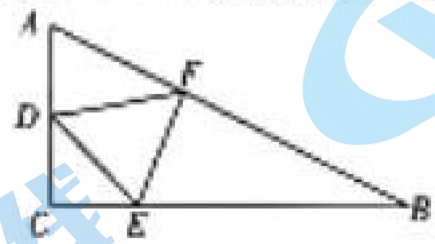
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2k-4,3)$，$\boldsymbol{b}=(-3,k)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数 k 的值为________.

14. 圆心与圆 $x^2+y^2+2x+8y+6=0$ 的圆心重合，且过点 $(-2,1)$ 的圆的方程为________.

15. 分别过双曲线 $C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右顶点作 C 的同一条渐近线的垂线，垂足分别为 P,Q，若 $|PQ|=3$，则双曲线的离心率为________.

16. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=\frac{\pi}{3}$，$\angle C=\frac{\pi}{2}$，D,E,F 分别在边 AC,BC,AB 上，且 $\triangle DEF$ 为等边三角形. 若 $AD=CD=2$，则 $\triangle DEF$ 的面积为________.



三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

近年来，医保政策不断完善，报销比例越来越高，受到市民的欢迎，但是由于特殊药品还有很多没有纳入医保，所以也引起了部分市民的不满，对某大型社区进行医保满意度调查，制作了如下 2×2 列联表.

	不满意	满意	合计
男	17		
女		42	
合计			100

已知从样本中的 100 人中随机抽取 1 人其满意度为不满意的概率为 $\frac{3}{10}$.

（Ⅰ）完成上面的 2×2 列联表；

（Ⅱ）根据 2×2 列联表，判断是否有 90% 的把握认为是否满意与市民的性别有关.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2>k)$	0.10	0.01	0.001
k	2.706	6.635	10.828

18.（12 分）

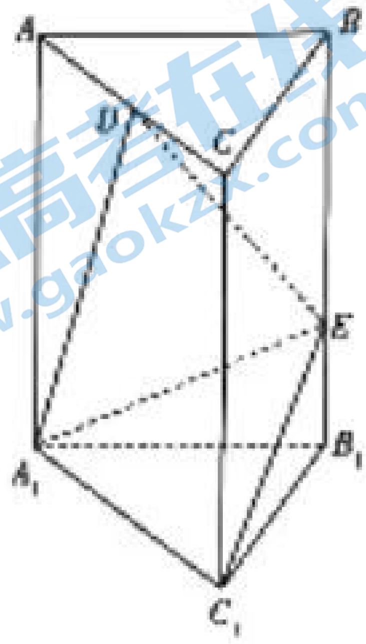
已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\frac{9}{13}$，且 $\frac{3}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{8}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅰ）证明：$\left\{\frac{3}{a_n}-4\right\}$ 是等比数列；

（Ⅱ）求数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

19.（12 分）

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=4$，$BB_1=3\sqrt{6}$，D 是 AC 的中点，点 E 在 BB_1 上且 $BE=\frac{2}{3}BB_1$.



（Ⅰ）求证：$DE\perp$ 平面 A_1C_1E；

（Ⅱ）求点 C_1 到平面 A_1DE 的距离.

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{x^2+kx}{e^x}$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=-1$ 处的切线互相垂直.

（Ⅰ）求实数 k 的值；

（Ⅱ）令函数 $g(x)=\left(\frac{1}{x}-1-\ln x\right)f(x)$，证明：$g(x)<1+\frac{1}{e^2}$.

21.（12 分）

已知动点 P 到直线 $y=-8$ 的距离比到点 $(0,1)$ 的距离大 7.

（Ⅰ）求动点 P 的轨迹方程；

（Ⅱ）记动点 P 的轨迹为曲线 C，点 M 在直线 $l_1:y=-1$ 上运动，过点 M 作曲线 C 的两条切线，切点分别为 A,B，点 N 是平面内一定点，线段 MA,NA,NB,MB 的中点依次为 E,F,G,H，若当 M 点运动时，四边形 $EFGH$ 总为矩形，求定点 N 的坐标.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t,\\ y=3+t\end{cases}$（$t$ 为参数），在以原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho(\rho-4\sin\theta)=-3$.

（Ⅰ）求 l 的普通方程和 C 的直角坐标方程；

（Ⅱ）设 l 和 C 交于 A,B 两点，求 $\triangle AOB$ 的面积.

23.［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=2|x+1|+2|x|$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）设 $f(x)$ 的最小值为 m，且正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=m$，求证：$a^3c+b^3a+c^3b\geq 2abc$.

天一大联考

2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(五)

文科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 A

命题意图 本题考查复数的运算.

解析 $\frac{(2+i)^2}{i}=\frac{4+4i-1}{i}=\frac{3+4i}{i}=4-3i$.

2. 答案 C

命题意图 本题考查集合的运算.

解析 $A\cup B=\{-1,1,2,3\}$.

3. 答案 C

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-4$,则切线的斜率为 $f'(-2)=2$,而 $f(-2)=7$,所以切线方程为 $y-7=2(x+2)$,即 $2x-y+11=0$.

4. 答案 D

命题意图 本题考查古典概型的概率计算.

解析 从 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$ 这五个分数中任选两个数有 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{6}\right),\left(\frac{1}{5},\frac{1}{6}\right)$,共 10 种情况,其中这两个数的和大于 $\frac{1}{2}$ 的有 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right)$,共 6 种情况,故所求概率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

5. 答案 B

命题意图 本题考查等差数列的性质.

解析 由等差中项的性质得 $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=5a_4=25$,解得 $a_4=5$.

6. 答案 C

命题意图 本题考查茎叶图以及统计的有关概念.

解析 甲班的分数在 100 以上的有 2 人,乙班的分数在 100 以上的有 3 人,故 A 正确;甲班的极差为 $104-82=22$,乙班的极差为 $106-81=25$,故 B 正确;甲班的中位数为 $\frac{94+95}{2}=94.5$,乙班的中位数为 $\frac{92+95}{2}=93.5$,故 C 错误;甲班的平均数为 $80+\frac{1}{10}(2+2+5+13+14+15+16+18+21+24)=93$,乙班的平均数为 $80+\frac{1}{10}(1+2+3+7+12+15+19+21+24+26)=93$,故 D 正确.

7. 答案 B

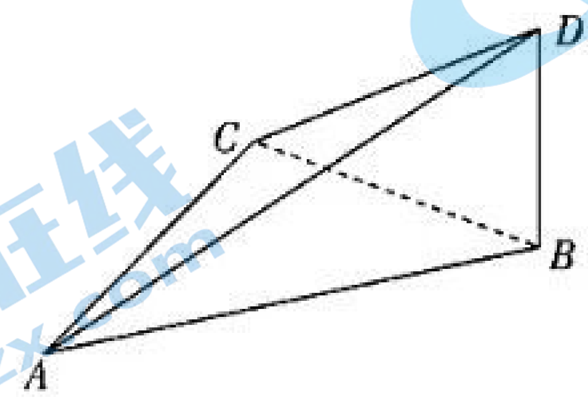
命题意图 本题考查三角恒等变换,以及函数的性质.

解析 $f(x)=\cos^2 x-6\times\frac{1+\cos x}{2}+5=\cos^2 x-3\cos x+2$，设 $t=\cos x$，则 $f(x)=g(t)=t^2-3t+2$，由二次函数性质可知当 $t\in[-1,1]$ 时，$g(t)$ 单调递减，所以当 $t=1$ 时，$g(t)$ 取得最小值 0，故 $f(x)$ 的最小值为 0.

8. **答案** D

命题意图 本题考查三视图.

解析 由三视图还原出原几何体，可知为三棱锥，如图所示，结合三视图得该三棱锥体积为 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2a\times 2\times 1=\frac{2}{3}$，所以 $a=1$.



9. **答案** A

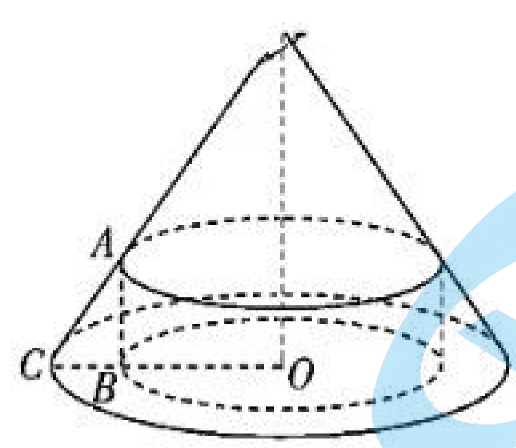
命题意图 本题考查利用函数的性质判断函数图象.

解析 $f(x)=\frac{1}{x}(2\cos x+1)$，令 $2\cos x+1=0$，可得 $f(x)$ 的正零点依次为 $\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\cdots$，当 $x\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$ 时，$\cos x>-\frac{1}{2}$，$f(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$ 时，$\cos x<-\frac{1}{2}$，$f(x)<0$，结合选项可知只有 A 项符合.

10. **答案** B

命题意图 本题考查圆锥与圆柱的结构特征.

解析 根据题意，作图如下：



由已知可得 $PO=\sqrt{PC^2-CO^2}=\sqrt{(\sqrt{10}R)^2-R^2}=3R$，圆锥的内接圆柱的底面半径与圆锥的底面半径之比为 $3:4$，所以圆锥的内接圆柱的底面半径为 $\frac{3}{4}R$，即 $OB=\frac{3}{4}R$，$CB=\frac{1}{4}R$，根据三角形相似可得 $AB=\frac{3}{4}R$，故该内接圆柱的表面积为 $2\pi\times\left(\frac{3}{4}R\right)^2+2\pi\times\frac{3}{4}R\times AB=\frac{18}{16}\pi R^2+\frac{18}{16}\pi R^2=\frac{9}{4}\pi R^2$.

11. **答案** A

命题意图 本题考查对数的运算性质.

解析 因为 $\lg 2\cdot\lg 4<\left(\frac{\lg 2+\lg 4}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg 8}{2}\right)^2<\left(\frac{\lg 9}{2}\right)^2=(\lg 3)^2$，所以 $\frac{\lg 4}{\lg 3}<\frac{\lg 3}{\lg 2}$，即 $\log_3 4<\log_2 3$，同理可得 $\log_4 5<\log_3 4$，所以 $\log_4 5<\log_3 4<\log_2 3$，所以 $\log_4 5\cdot\log_2 3<\log_3 4\cdot\log_2 3<(\log_2 3)^2$，又 $\log_2 3\cdot\log_3 4=\log_2 4=2$，所以 $b<c<a$.

12. 答案　B

命题意图　本题考查椭圆的性质，椭圆与直线的位置关系.

解析　由条件可知外层椭圆的短轴长为 100 米，以百米为单位，则外层椭圆方程可写为 $x^2+4y^2=1$. 设内层椭圆方程为 $x^2+4y^2=\lambda(0<\lambda<1)$，由已知得 AC 的方程为 $y=-\frac{1}{2}(x+1)$，与 $x^2+4y^2=\lambda$ 联立得 $2x^2+2x+1-$ $=0$，由 $\Delta=4-8(1-\lambda)=0$，得 $\lambda=\frac{1}{2}$，则内层椭圆的方程为 $x^2+4y^2=\frac{1}{2}$，即 $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{8}}=1$，其短半轴长为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$(百米)，即短轴长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$(百米)，即 $50\sqrt{2}$ 米.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 答案　4

命题意图　本题考查平面向量的坐标运算.

解析　因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2k-4,3)\cdot(-3,k)=-6k+12+3k=0$，解得 $k=4$.

14. 答案　$x^2+y^2+2x+8y-9=0$

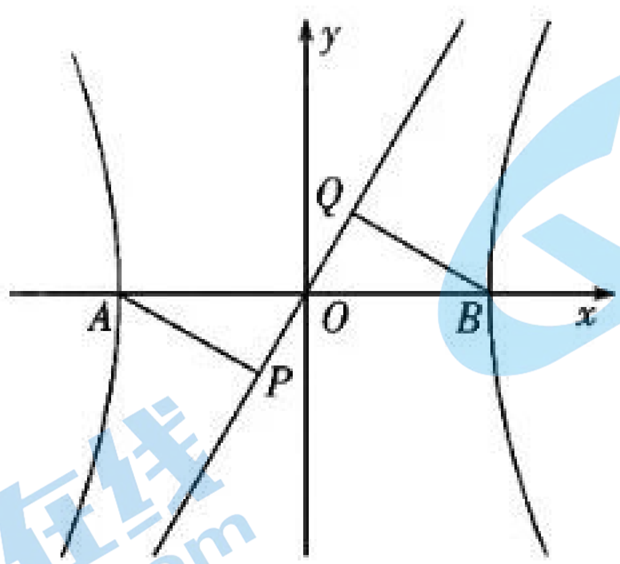
命题意图　本题考查圆的方程.

解析　依题意，设所求圆的方程为 $x^2+y^2+2x+8y+m=0$，由于所求圆过点 $(-2,1)$，所以 $(-2)^2+1^2+2\times(-2)+8\times1+m=0$，解得 $m=-9$. 所以所求圆的方程为 $x^2+y^2+2x+8y-9=0$.

15. 答案　2

命题意图　本题考查双曲线的性质.

解析　如图所示，由已知可得 C 的左、右顶点分别为 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，设 C 的半焦距为 $c(c>0)$，根据渐近线的性质可知 $\cos\angle BOQ=\frac{3}{c}$，所以 $|OQ|=|OB|\cos\angle BOQ=3\times\frac{3}{c}=\frac{9}{c}$，所以 $|PQ|=2|OQ|=\frac{18}{c}=3$，所以 $c=6$，所以双曲线的离心率为 $\frac{6}{3}=2$.



16. 答案　$\frac{7\sqrt{3}}{4}$

命题意图　本题考查三角函数的应用.

解析　设 $\angle CDE=\theta$，$\triangle DEF$ 的边长为 a，则 $\sin\theta=\frac{CE}{DE}=\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}$. 因为 $\angle ADF=\pi-\theta-\frac{\pi}{3}$，所以在 $\triangle AFD$ 中，可得 $\angle AFD=\pi-\frac{\pi}{3}-\angle ADF=\theta$，根据正弦定理，$\frac{AD}{\sin\theta}=\frac{DF}{\sin A}$，即 $\frac{2a}{\sqrt{a^2-4}}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$，解得 $a=\sqrt{7}$，所以 $\triangle DEF$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{7})^2=\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查独立性检验的应用.

解析 （Ⅰ）根据题意，不满意的总人数为 $100\times\frac{3}{10}=30$， ……………………………………（2 分）

所以完成 2×2 列联表如下：

	不满意	满意	合计
男	17	28	45
女	13	42	55
合计	30	70	100

……………………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）因为 $K^2=\frac{100\times(17\times42-13\times28)^2}{45\times55\times30\times70}=\frac{700}{297}\approx2.357$， ……………………（10 分）

因为 $2.357<2.706$，所以没有 90% 的把握认为是否满意与市民的性别有关. ……………………（12 分）

18. **命题意图** 本题考查数列的递推关系，以及等比数列的性质与求和.

解析 （Ⅰ）因为 $\frac{3}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{8}{3}$，所以 $\frac{3}{a_{n+1}}-4=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{a_n}-4\right)$， ……………………（2 分）

又 $\frac{3}{a_1}-4=\frac{1}{3}$， ……………………………………………………（3 分）

所以数列 $\left\{\frac{3}{a_n}-4\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{3}$，公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列. ……………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\frac{3}{a_n}-4=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$， ……………………（7 分）

所以 $\frac{1}{a_n}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\frac{4}{3}$， ……………………………………（8 分）

所以 $S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\frac{4n}{3}$

$=\frac{\frac{1}{9}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}+\frac{4n}{3}$

$=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{4n}{3}$. ……………………………………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查空间垂直关系的证明以及点到平面距离的计算.

解析 （Ⅰ）如图，连接 BD，C_1D.

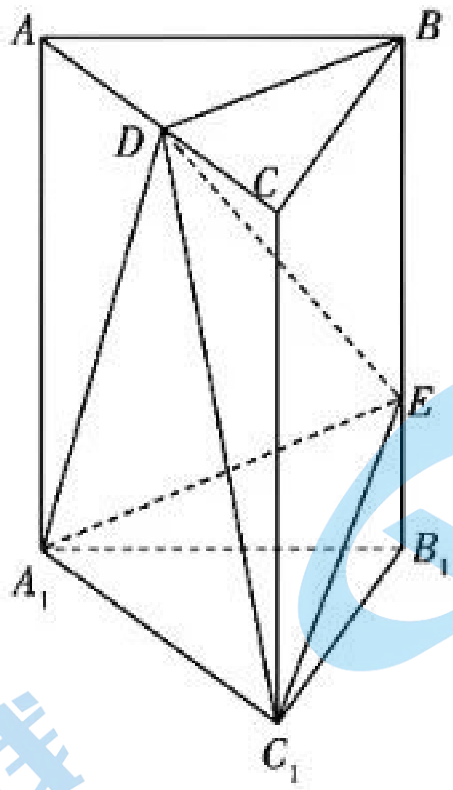
由已知可得 $CD=2$，$BE=2\sqrt{6}$，$B_1E=\sqrt{6}$，$BD=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$， ……………………（1 分）

所以 $DE=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{6})^2}=6$，$C_1E=\sqrt{4^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{22}$，$C_1D=\sqrt{2^2+(3\sqrt{6})^2}=\sqrt{58}$， ………（2 分）

所以 $DE^2+C_1E^2=C_1D^2$，所以 $DE\perp C_1E$， ……………………………………（3 分）

同理 $DE\perp A_1E$， ……………………………………………………（4 分）

又 $A_1E\cap C_1E=E$，所以 $DE\perp$ 平面 A_1C_1E. …………………………………………（5 分）



（Ⅱ）在 $\triangle A_1C_1E$ 中，$C_1E=A_1E=\sqrt{22}$，$A_1C_1=4$，则 $S_{\triangle A_1C_1E}=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{(\sqrt{22})^2-2^2}=6\sqrt{2}$. …………（7 分）

在 $\triangle A_1DE$ 中，$A_1D=C_1D=\sqrt{58}$，$A_1E=\sqrt{22}$，$DE=6$，则 $S_{\triangle A_1DE}=\frac{1}{2}\times6\times\sqrt{22}=3\sqrt{22}$. ………………（9 分）

设点 C_1 到平面 A_1DE 的距离为 d，

由 $V_{\text{三棱锥}D-A_1C_1E}=V_{\text{三棱锥}C_1-A_1DE}$，得 $\frac{1}{3}S_{\triangle A_1C_1E}\cdot DE=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1DE}\cdot d$，…………………………………（11 分）

得 $\frac{1}{3}\times6\sqrt{2}\times6=\frac{1}{3}\times3\sqrt{22}\times d$.

解得 $d=\frac{12\sqrt{11}}{11}$. ……………………………………………………………………（12 分）

20. 命题意图　本题考查利用导数研究函数的性质.

解析　（Ⅰ）由题意知 $f'(x)=\frac{-x^2+(2-k)x+k}{e^x}$， ……………………………………………（1 分）

曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=-1$ 处的切线互相垂直，则 $f'(1)\cdot f'(-1)=-1$，……………………（2 分）

$\because f'(1)=\frac{1}{e}$，$f'(-1)=(2k-3)e$，$\therefore 2k-3=-1$， ……………………………………………（4 分）

$\therefore k=1$. ……………………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $g(x)=\left(\frac{1}{x}-1-\ln x\right)\frac{x^2+x}{e^x}=(1-x-x\ln x)\frac{x+1}{e^x}$. ……………………………………（6 分）

设 $h(x)=1-x-x\ln x$，则 $h'(x)=-(\ln x+2)$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x\in\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

$\therefore h(x)\leqslant h\left(\frac{1}{e^2}\right)=1+\frac{1}{e^2}$. ① ………………………………………………………………（9 分）

设 $\varphi(x)=e^x-(x+1)$，则 $\varphi'(x)=e^x-1$，

当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$\varphi(x)>\varphi(0)=0$，即 $\frac{x+1}{e^x}<1$. ② ……………………………………………（11 分）

综合①②，可得 $(1-x-x\ln x)\frac{x+1}{e^x}<1+\frac{1}{e^2}$，即 $g(x)<1+\frac{1}{e^2}$. ……………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查抛物线的方程,抛物线与直线的位置关系.

解析 (Ⅰ)因为动点 P 到直线 $y=-8$ 的距离比到点$(0,1)$的距离大 7,

所以动点 P 到直线 $y=-1$ 的距离等于到点$(0,1)$的距离, ……(1 分)

所以动点 P 的轨迹是以点$(0,1)$为焦点,$y=-1$ 为准线的抛物线, ……(3 分)

所以动点 P 的轨迹方程是 $x^2=4y$. ……(4 分)

(Ⅱ)若四边形 $EFGH$ 为矩形,则 $MN\perp AB$. ……(5 分)

当点 M 在$(0,-1)$处时,两个切点 A,B 关于 y 轴对称,故要使得 $MN\perp AB$,则点 N 必须在 y 轴上. ……(6 分)

故设 $M(m,-1)$,$N(0,n)$,$A\left(x_1,\frac{1}{4}x_1^2\right)$,$B\left(x_2,\frac{1}{4}x_2^2\right)$,

C 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2$,求导得 $y'=\frac{1}{2}x$,所以切线 MA 的斜率 $k_1=\frac{1}{2}x_1$,

直线 MA 的方程为 $y-\frac{1}{4}x_1^2=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$, ……(7 分)

又点 M 在直线 MA 上,所以 $-1-\frac{1}{4}x_1^2=\frac{1}{2}x_1(m-x_1)$,整理得 $x_1^2-2mx_1-4=0$, ……(8 分)

同理可得 $x_2^2-2mx_2-4=0$,

故 x_1 和 x_2 是一元二次方程 $x^2-2mx-4=0$ 的根,所以$\begin{cases}x_1+x_2=2m,\\x_1x_2=-4,\end{cases}$ ……(9 分)

则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\left(x_2-x_1,\frac{1}{4}x_2^2-\frac{1}{4}x_1^2\right)\cdot(-m,n+1)=-m(x_2-x_1)+\left(\frac{1}{4}x_2^2-\frac{1}{4}x_1^2\right)(n+1)$

$=\frac{1}{4}(x_2-x_1)[-4m+2m(n+1)]=\frac{1}{2}m(x_2-x_1)(n-1)$, ……(10 分)

可见当 $n=1$ 时,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ 恒成立, ……(11 分)

即点 N 的坐标为$(0,1)$. ……(12 分)

22. **命题意图** 本题考查方程的互化、直线与圆的位置关系.

解析 (Ⅰ)由$\begin{cases}x=t,\\y=3+t\end{cases}$消去参数 t,得 $x-y+3=0$,

所以 l 的普通方程为 $x-y+3=0$. ……(2 分)

由 $\rho(\rho-4\sin\theta)=-3$,得 $\rho^2-4\rho\sin\theta=-3$,

将$\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\\rho\sin\theta=y\end{cases}$代入,得 $x^2+y^2-4y=-3$,

所以 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4y+3=0$. ……(4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y-2)^2=1$,

曲线 C 是以$(0,2)$为圆心,半径为 1 的圆, ……(5 分)

圆心 $C(0,2)$到 l 的距离为$\frac{|0-2+3|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, ……(6 分)

所以$|AB|=2\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2}$. ……(7 分)

原点 $O(0,0)$到直线 l 的距离为 $d=\frac{|0-0+3|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, ……(8 分)

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$. ………………………………………………（10 分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的性质，基本不等式的应用.

解析 （Ⅰ）$f(x)=2|x+1|+2|x|=|2x+2|+|2x|\geqslant|2x+2-2x|=2$,

所以 $f(x)$ 的最小值为 2. ………………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $a+b+c=2$, ………………………………………………………………（5 分）

由基本不等式可得 $b+\frac{a^2}{b}\geqslant2\sqrt{b\times\frac{a^2}{b}}=2a$, $c+\frac{b^2}{c}\geqslant2\sqrt{c\times\frac{b^2}{c}}=2b$, $a+\frac{c^2}{a}\geqslant2\sqrt{a\times\frac{c^2}{a}}=2c$. ………（7 分）

上述三个不等式相加可得 $\left(b+\frac{a^2}{b}\right)+\left(c+\frac{b^2}{c}\right)+\left(a+\frac{c^2}{a}\right)\geqslant2a+2b+2c$, ……………（8 分）

所以 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c=2$. ………………………………………………（9 分）

所以 $\frac{a^3c+b^3a+c^3b}{abc}\geqslant2$，则 $a^3c+b^3a+c^3b\geqslant2abc$. ……………………………（10 分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ''精益求精、专业严谨'' 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。