

2021 北京平谷高二（下）期末数学

参考答案

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	A	B	D	C	B	C	A	A

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.）

11.1 12. $\frac{5}{16}$ 13.真 14.16 15.30

三、解答题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本小题 13 分）

解：选①：

（I）因为 $a_{n+1} = a_n + 4$ ，即 $a_{n+1} - a_n = 4$

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 4 的等差数列.....3 分

所以数列 $\{a_n\}$ 通项公式 $a_n = 4n - 3$6 分

（II） $S_n = 1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3)$

$$= \frac{n(1 + 4n - 3)}{2} = n(2n - 1) \dots \dots \dots 10 \text{ 分}$$

当 $S_n \leq 100$ ，即 $n(2n - 1) \leq 100$

解得 $n \leq 7$

所以 n 的最大值为 7.....13 分

选②：

（I）因为 $S_n = 2a_n - 1$

所以当 $n=1$ 时， $S_1 = 2a_1 - 1$ ，即 $a_1 = 1$

又 $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 1 \ (n \geq 2)$

两式相减，得：当 $n \geq 2$ ， $S_n - S_{n-1} = (2a_n - 1) - (2a_{n-1} - 1)$

整理得 $a_n = 2a_{n-1} \ (n \geq 2)$4 分

即数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列.

所以数列 $\{a_n\}$ 通项公式 $a_n = 2^{n-1}$ 7 分

$$(II) S_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}$$

$$= \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{当 } S_n \leq 100, \text{ 即 } 2^n - 1 \leq 100$$

$$\text{解得 } n \leq 6$$

所以 n 的最大值为 6.....13 分

选③:

$$(I) \text{ 因为 } a_{n+1} + a_n = 2,$$

$$\text{所以 } a_n + a_{n-1} = 2 \ (n \geq 2).$$

$$\text{两式相减得 } a_{n+1} - a_{n-1} = 0, (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{即 } a_{n+1} = a_{n-1} \ (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } a_1 = a_2 = 1, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是常数列.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 7 分

(II) 数列 $\{a_n\}$ 是常数列

$$\text{所以 } S_n = n \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{当 } S_n \leq 100, \text{ 即 } n \leq 100$$

所以 n 的最大值为 100.....13 分

17. (本小题 14 分)

解: (I) 设“至少摸到 2 个红球”为事件 A.....1 分

设“摸到 2 个红球”为事件 A_1 , “摸到 3 个红球”为事件 A_2 ,

因为事件 A_1 与事件 A_2 互斥, 所以 $A = A_1 \cup A_2$

$$P(A_1) = \frac{C_3^2 A_4^2 C_6^1}{A_{10}^3} = \frac{3}{10}, P(A_2) = \frac{A_4^3}{A_{10}^3} = \frac{1}{30}$$

$$\text{或者 } P(A_1) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}, P(A_2) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$$

所以 $P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{3}$

即至少摸到 2 个红球的概率为 $\frac{1}{3}$ 7 分

(II) 解法一：设“第三次恰好摸到红球”为事件 B，8 分

事件 B 即为“在前 2 次中只摸到一个红球，第三次摸到第二个红球”，则有 $C_2^1 C_6^1 C_4^1 C_3^1$ 种情况. 摸三次球，样本空间

$$\Omega = A_{10}^3, \quad P(B) = \frac{C_2^1 C_6^1 C_4^1 C_3^1}{A_{10}^3} = \frac{1}{5}$$

即第三次恰好摸到红球的概率为 $\frac{1}{5}$ 14 分

解法二：设“第三次恰好摸到红球”为事件 B，8 分

设“在前 2 次中只摸到一个红球”为事件 B_1 ，“第三次摸到第二个红球”为事件 B_2 ，

$$\text{则 } P(B) = P(B_1)P(B_2 / B_1) = \frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{5} \text{14 分}$$

18. (本小题 14 分)

解：(I) 函数定义域为 $(0, +\infty)$ ，因 $f(3) = \ln 3$ ，所以切点为 $(3, \ln 3)$ 2 分

$$\text{又 } f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x} \text{4 分}$$

$$\text{所以 } f'(3) = \frac{10}{3} \text{ 即切线斜率为 } k = \frac{10}{3} \text{5 分}$$

$$\text{所以切线方程是 } y = \frac{10}{3}(x-3) + \ln 3, \text{ 即 } 10x - 3y + 3\ln 3 - 30 = 0 \text{7 分}$$

(II) 令 $f'(x) = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$ 8 分

x	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		极大值		极小值	

如表格，函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 和 $(1, +\infty)$ ，单调减区间是 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 12 分

$$\text{又因为函数 } f(x) \text{ 的极大值 } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4} + \ln \frac{1}{2} < 0, \text{13 分}$$

所以当 $0 < x < 1$ 时 $f(x) < 0$ 恒成立,

而函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $f(1) < 0$, $f(3) = \ln 3 > 0$,

所以存在 $x_0 \in (1, 3)$, 使得 $f(x_0) = 0$, 即函数 $f(x)$ 只有一个零点.....14 分

19. (本小题 15 分)

解: (I) 设“从大赛成绩在 80 分以上的人中随机取出 2 人, 恰好男、女生各 1 名, 且所在分数段不同”为事件 A,1 分

由表格可得: 随机抽取的 50 名学生中, 成绩在 80 分以上的男生人数是 10 人, 女生 5 人, 共 15 人, 即从 15 名学生中随机抽取 2 人, 所以样本空间 $n(\Omega) = C_{15}^2 = 105$; 如果这 2 人恰好男、女生各 1 名, 且分数段不同, 即

$C_9^1 C_2^1 + C_1^1 C_3^1 = 21$. 所以事件 A 包含 21 个样本点, 因此 $P(A) = \frac{21}{105} = \frac{1}{5}$ 4 分

(II) 由数据可知, 从抽取的 25 名男学生中随机抽取 1 人, 该学生大赛成绩在 80 分以上的概率为 $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$. 即

从该校参加活动的男学生中随机抽取 1 人, 该学生大赛成绩在 80 分以上的概率为 $\frac{2}{5}$ 6 分

因此从该校参加活动的男学生中随机抽取 3 人, 这 3 人中大赛成绩在 80 分以上的人数 X 可取 0, 1, 2, 3, 且

$X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$ 7 分

$$P(X=0) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}, \quad P(X=1) = C_3^1 \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{36}{125}, \quad P(X=3) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125} \text{11 分}$$

所以随机变量 X 的分布列

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$$\text{数学期望 } EX = 0 + 1 \times \frac{54}{125} + 2 \times \frac{36}{125} + 3 \times \frac{8}{125} = \frac{6}{5}$$

或者 $X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$, 所以 $EX = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ 13 分

(III) $a = 0, b = 10$ 15 分

20. (本小题 15 分)

解: (I) $f(x) = xe^{2x}$, 则 $f'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$,2 分

令 $f'(x) = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ 3分

所以 $x < -\frac{1}{2}$, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上单调递减;

$x > -\frac{1}{2}$, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在区间 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增;

所以函数 $f(x)$ 有极小值 $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2e}$, 无极大值.....5分

(II) 因为 $\forall x \in (-1, +\infty)$, 有 $f(x) > g(x)$ 恒成立

设函数 $H(x) = f(x) - g(x) = xe^{2x} - ax^2 - ax + 1$ ($x > -1$),

则 $H(x) > 0$ 恒成立.....6分

因为 $H'(x) = e^{2x}(1+2x) - 2ax - a = (1+2x)(e^{2x} - a)$8分

①当 $a \leq 0$ 时, $e^{2x} - a > 0$, $H'(x) = 0$, $x = -\frac{1}{2}$,

所以 $H'(x) > 0$, $x > -\frac{1}{2}$; $H'(x) < 0$, $-1 < x < -\frac{1}{2}$;

即 $H(x)$ 在区间 $(-1, -\frac{1}{2})$ 上单调递减, 在区间 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

因此函数 $H(x)$ 在 $x = -\frac{1}{2}$ 时有最小值

当 $H(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2e} + \frac{1}{4}a > 0$, 即 $\frac{2}{e} - 4 < a \leq 0$ 时, 函数 $H(x) > 0$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 恒成立.....10分

当 $0 < a \leq \frac{1}{e}$ 时, 令 $H'(x) = 0$, $x_1 = \frac{1}{2} \ln a$, $x_2 = -\frac{1}{2}$

②当 $a = \frac{1}{e}$, 即 $x_1 = x_2$ 时, $H'(x) \geq 0$ 恒成立, 即: 函数 $H(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 单调递增. 所以函数 $H(x) >$

$H(-1) = 1 - e^{-2} > 0$, 满足条件.....11分

③当 $0 < a < \frac{1}{e}$, 即 $x_1 < x_2$ 时, $H'(x) > 0$, $x < \frac{1}{2} \ln a$, $x > -\frac{1}{2}$; $H'(x) < 0$, $\frac{1}{2} \ln a < x < -\frac{1}{2}$

若 $\frac{1}{2} \ln a \leq -1$ 即 $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$ 时, $H(x)$ 在区间 $(-1, -\frac{1}{2})$ 上单调递减, 在区间 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

函数 $H(x)$ 在 $x = -\frac{1}{2}$ 时有最小值,

而 $H\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2e} + \frac{1}{4}a > 0$ 恒成立. 所以满足条件.

若 $\frac{1}{2}\ln a > -1$ 即 $\frac{1}{e^2} < a < \frac{1}{e}$ 时, $H(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}\ln a, -\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减, 在区间 $\left(-1, \frac{1}{2}\ln a\right), \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递

增. 而 $H(-1) = 1 - e^{-2} > 0$, $H\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2e} + \frac{1}{4}a > 0$,

所以函数 $H(x) > 0$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 恒成立.....14 分

综上, 当 $\frac{2}{e} - 4 < a \leq \frac{1}{e}$ 时, 函数 $H(x) > 0$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 恒成立.....15 分

21. (本小题 14 分)

解: (I) 令 $a_n \geq 1$ 时, n 的最小值 $b_1 = 1$

令 $a_n \geq 2$ 时, n 的最小值 $b_2 = 2$

令 $a_n \geq 3$ 时, n 的最小值 $b_3 = 2$

令 $a_n \geq 4$ 时, n 的最小值 $b_4 = 3$4 分

(II) 由 $a_n = 2^{n-1}$, 即数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列

所以使得 $a_n \geq m$ 成立的 n 的最小值 b_m 为:

$b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = b_4 = 3, b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = 4,$

$b_9 = b_{10} = b_{11} = b_{12} = b_{13} = b_{14} = b_{15} = b_{16} = 5, b_{17} = b_{18} = \dots = b_{32} = 6,$

$b_{33} = b_{34} = \dots = b_{64} = 7, b_{65} = b_{66} = \dots = b_{100} = 8$

所以

$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{100} = 1 + 2 + 2 \times 3 + 4 \times 4 + 8 \times 5 + 16 \times 6 + 32 \times 7 + 36 \times 8 = 673$9 分

(III) 由题意 $a_n = 2n - 1$,

对于正整数, 由 $a_n \geq m$, 得 $n \geq \frac{m+1}{2}$.

根据 b_m 的定义可知

当 $m = 2k - 1$ 时, $b_m = k (k \in \mathbb{N}^*)$; 当 $m = 2k$ 时, $b_m = k + 1 (k \in \mathbb{N}^*)$.

$\therefore b_1 + b_2 + \dots + b_{2m} = (b_1 + b_3 + \dots + b_{2m-1}) + (b_2 + b_4 + \dots + b_{2m})$

$= (1 + 2 + 3 + \dots + m) + [2 + 3 + 4 + \dots + (m+1)]$

$$= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+3)}{2} = m^2 + 2m \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯