

# 海淀区高二年级练习

## 数 学

2023.01

学校\_\_\_\_\_

班级\_\_\_\_\_

姓名\_\_\_\_\_

- |                  |                                                                                                                                                    |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 考<br>生<br>须<br>知 | <p>1. 本试卷共 6 页，共 3 道大题，19 道小题。满分 100 分。考试时间 90 分钟。</p> <p>2. 在试卷上准确填写学校名称、班级名称、姓名。</p> <p>3. 答案一律填涂或书写在试卷上，用黑色字迹签字笔作答。</p> <p>4. 考试结束，请将本试卷交回。</p> |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### 第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 在复平面内，复数  $(2-i)(1+3i)$  对应的点位于

- (A) 第一象限 (B) 第二象限  
(C) 第三象限 (D) 第四象限

(2) 经过点  $P(-1, 0)$  且倾斜角为  $60^\circ$  的直线的方程是

- (A)  $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$  (B)  $\sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0$   
(C)  $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$  (D)  $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$

(3) 已知直线  $l$  经过点  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ，平面  $\alpha$  的一个法向量为  $\mathbf{n} = (-2, 0, -4)$ ，则

- (A)  $l \parallel \alpha$  (B)  $l \perp \alpha$   
(C)  $l \subset \alpha$  (D)  $l$  与  $\alpha$  相交，但不垂直

(4) 已知抛物线  $y^2 = ax$  上的点  $M(\frac{1}{2}, y_0)$  到其焦点的距离是 1，那么实数  $a$  的值为

- (A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C) 1 (D) 2

(5) 在平行六面体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $M$  满足  $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$ . 若  $\overrightarrow{A_1B_1} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{A_1D_1} = \mathbf{b}$ ,  $\overrightarrow{A_1A} = \mathbf{c}$ , 则下列向量中与  $\overrightarrow{B_1M}$  相等的是

(A)  $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$

(B)  $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$

(C)  $-\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$

(D)  $-\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$

(6) 已知直线  $l: y = kx + b$ ,  $\odot O: x^2 + y^2 = 1$ , 则 “ $|b| < 1$ ” 是 “直线  $l$  与  $\odot O$  相交” 的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(7) 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 直线  $l$  是底面  $ABCD$  所在平面内的一条动直线, 记直线  $A_1C$  与直线  $l$  所成的角为  $\alpha$ , 则  $\sin \alpha$  的最小值是

(A)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(B)  $\frac{1}{2}$

(C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(8) 已知  $A, B$  (异于坐标原点) 是圆  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$  与坐标轴的两个交点, 则下列点  $M$  中, 使得  $\triangle MAB$  为钝角三角形的是

(A)  $M(0, 0)$

(B)  $M(4, \frac{3\sqrt{2}}{2})$

(C)  $M(2, 1 - \sqrt{5})$

(D)  $M(1, 3\sqrt{2})$

(9) “天问一号” 是执行中国首次火星探测任务的探测器, 该名称源于屈原长诗《天问》, 寓意探求科学真理征途漫漫, 追求科技创新永无止境. 图(1)是“天问一号”探测器环绕火星的椭圆轨道示意图, 火星的球心是椭圆的一个焦点. 过椭圆上的点  $P$  向火星被椭圆轨道平面截得的大圆作两条切线  $PM, PN$ , 则  $\angle MPN$  就是“天问一号”在点  $P$  时对火星的观测角. 图(2)所示的  $Q, R, S, T$  四个点处, 对火星的观测角最大的是

(A)  $Q$

(B)  $R$

(C)  $S$

(D)  $T$

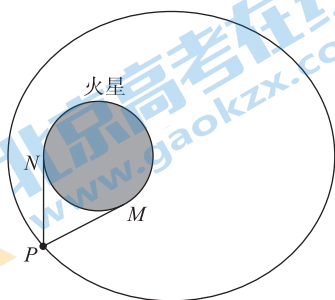


图1

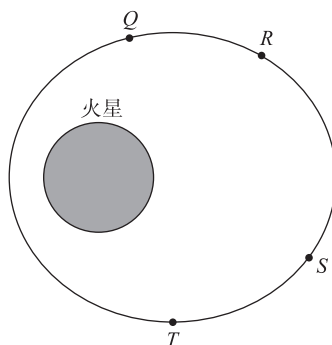
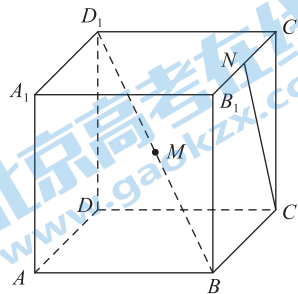


图2

- (10) 如图, 在棱长为 1 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $M, N$  分别为  $BD_1, B_1C_1$  的中点,  $P$  为正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  表面上的动点. 下列叙述正确的是



- (A) 当点  $P$  在侧面  $AA_1D_1D$  上运动时, 直线  $CN$  与平面  $BMP$  所成角的最大值为  $\frac{\pi}{2}$
- (B) 当点  $P$  为棱  $A_1B_1$  的中点时,  $CN \parallel$  平面  $BMP$
- (C) 当点  $P$  在棱  $BB_1$  上时, 点  $P$  到平面  $CNM$  的距离的最小值为  $\frac{\sqrt{6}}{6}$
- (D) 当点  $P \notin NC$  时, 满足  $MP \perp$  平面  $NCP$  的点  $P$  共有 2 个

## 第二部分 (非选择题 共60分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。

- (11) 若复数  $z$  满足  $(1+i) \cdot z = i^3$ , 则  $|z| =$  \_\_\_\_\_.
- (12) 已知直线  $l_1: ax - y + 2 = 0$ , 直线  $l_2: x - (a+1)y - 1 = 0$ . 若  $l_1 \perp l_2$ , 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_.
- (13) 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的渐近线为  $y = \pm \sqrt{2}x$ , 则该双曲线的离心率为 \_\_\_\_\_.
- (14) 已知椭圆  $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别是  $F_1, F_2$ ,  $A(0, b)$ , 且  $\triangle AF_1F_2$  是面积为  $\sqrt{3}$  的正三角形. 过  $F_1$  垂直于  $AF_2$  的直线交椭圆  $M$  于  $B, C$  两点, 则  $\triangle ABC$  的周长为 \_\_\_\_\_.
- (15) 古希腊数学家阿波罗尼斯在其著作《圆锥曲线论》中, 系统地阐述了圆锥曲面的定义和利用圆锥曲面生成圆锥曲线的方法, 并探究了许多圆锥曲线的性质. 其研究的问题之一是“三线轨迹”问题: 给定三条直线, 若动点到其中两条直线的距离的乘积与到第三条直线距离的平方之比等于常数, 求该点的轨迹.
- 小明打算使用解析几何的方法重新研究此问题, 他先将问题特殊化如下:

给定三条直线  $l_1: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ,  $l_2: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ,  $l_3: x = 1$ , 动点  $P$  到直线  $l_1$ ,  $l_2$  和  $l_3$  的距离分别为  $d_1$ ,  $d_2$  和  $d_3$ , 且满足  $\frac{d_1 d_2}{d_3^2} = \frac{1}{5}$ , 记动点  $P$  的轨迹为曲线  $C$ . 给出下列四个结论:

① 曲线  $C$  关于  $x$  轴对称;

② 曲线  $C$  上的点到坐标原点的距离的最小值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

③ 平面内存在两个定点, 曲线  $C$  上有无数个点  $P$  到这两个定点的距离之差为  $\sqrt{2}$ ;

④  $d_1 + d_2$  的最小值为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

三、解答题共 4 小题, 共 40 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 10 分)

已知直线  $l_1: y = 1$  与直线  $l_2: y = kx - 2$  交于点  $A$ , 点  $A$  关于坐标原点的对称点为  $C$ , 点  $B$  在直线  $l_1$  上, 点  $D$  在直线  $l_2$  上.

(I) 当  $k = 1$  时, 求  $C$  点的坐标;

(II) 当四边形  $ABCD$  为菱形时, 求  $k$  的值.

(17) (本小题 10 分)

已知曲线  $M$  上的任意一点到点  $(1, 0)$  的距离比它到直线  $x = -2$  的距离小 1.

(I) 求曲线  $M$  的方程;

(II) 设点  $E(0, 1)$ . 若过点  $A(2, 1)$  的直线与曲线  $M$  交于  $B, C$  两点, 求  $\triangle EBC$  的面积的最小值.

(18) (本小题 10 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 四边形  $ABCD$  是平行四边形, 点  $F$  为  $PD$  的中点.

(I) 已知点  $G$  为线段  $BC$  的中点, 求证:  $CF \parallel$  平面  $PAG$ ;

(II) 若  $PA = AB = 2$ , 直线  $PC$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $30^\circ$ , 再从条件①、条件②、条件③这三

个条件中选择几个作为已知, 使四棱锥  $P-ABCD$  唯一确定, 求:

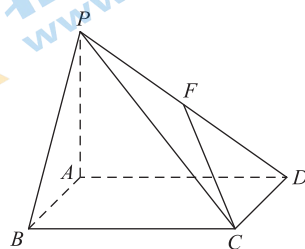
(i) 直线  $CD$  到平面  $ABF$  的距离;

(ii) 二面角  $B-AF-C$  的余弦值.

条件①:  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ;

条件②:  $AD = 2\sqrt{2}$ ;

条件③: 平面  $PAB \perp$  平面  $PAD$ .



(19)(本小题 10 分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的焦距为 2, 长轴长为 4.

(I) 求椭圆  $E$  的方程;

(II) 过点  $M(-3, 0)$  且与  $x$  轴不重合的直线  $l$  与椭圆  $E$  交于不同的两点  $B, C$ , 点  $B$  关于  $x$  轴的对称点为  $B'$ . 问: 平面内是否存在定点  $P$ , 使得  $B'$  恒在直线  $PC$  上? 若存在, 求出点  $P$  的坐标; 若不存在, 说明理由.



关注北京高考在线官方微信：**北京高考资讯(微信号:bjgkzx)**，获取更多试题资料及排名分析信息。



关注北京高考在线官方微信：**北京高考资讯(微信号:bjgkzx)**，获取更多试题资料及排名分析信息。



## 海淀区高二年级练习

### 数学参考答案

2023.01

#### 一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) A      (2) B      (3) B      (4) D      (5) C  
(6) A      (7) A      (8) D      (9) A      (10) C

#### 二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

- (11)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (12)  $-\frac{1}{2}$   
(13)  $\sqrt{3}$       (14) 8  
(15) ①③④

注：第 15 题少选项得 2 分，错选或未作答均为 0 分。

#### 三、解答题（共 4 小题，共 40 分）

(16)（本小题 10 分）

解：（I）当  $k=1$  时，直线  $l_2$  的方程为  $y=x-2$ .

$$\text{由 } \begin{cases} y=1, \\ y=x-2 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$$

所以 点 A 的坐标为 (3,1).

.....2 分

因为 点 A 关于坐标原点的对称点为 C,

所以 点 C 的坐标为 (-3,-1).

.....3 分

（II）由题意知  $k \neq 0$ .

$$\text{由 } \begin{cases} y=1, \\ y=kx-2 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=\frac{3}{k}, \\ y=1. \end{cases}$$

所以 点 A 的坐标为  $(\frac{3}{k}, 1)$ .

.....4 分

因为 点 A 关于坐标原点的对称点为 C,

所以 点 C 的坐标为  $(-\frac{3}{k}, -1)$ .

.....5 分

因为 四边形 ABCD 为菱形,

所以  $AC \perp BD$ ,  $CD \parallel AB$ .

数学参考答案 第 1 页（共 5 页）

所以 点  $D$  的纵坐标为  $-1$ . .....6 分

由点  $D$  在直线  $l_2$  上,

所以 点  $D$  的横坐标为  $\frac{1}{k}$ , 即点  $D$  的坐标为  $(\frac{1}{k}, -1)$ . .....7 分

在菱形  $ABCD$  中, 点  $D$ , 点  $B$  关于坐标原点对称,

所以 点  $B$  的坐标为  $(-\frac{1}{k}, 1)$ . .....8 分

由  $AC \perp BD$  可得  $\frac{-1-1}{\frac{1}{k}-(-\frac{1}{k})} \cdot \frac{1-(-1)}{\frac{3}{k}-(-\frac{3}{k})} = -1$ .

所以  $k = \pm\sqrt{3}$ , 即  $k$  的值为  $\pm\sqrt{3}$ . .....10 分

(17) (本小题 10 分)

解: (I) 因为 曲线  $M$  上的任意一点到点  $(1, 0)$  的距离比它到直线  $x = -2$  的距离小 1,

所以 曲线  $M$  上的点均位于  $y$  轴上或  $y$  轴的右侧.

所以 曲线  $M$  上的任意一点到点  $(1, 0)$  的距离等于它到直线  $x = -1$  的距离.

所以 曲线  $M$  的方程为  $y^2 = 4x$ . .....4 分

(II) 设直线  $BC$  的方程为  $x = m(y-1) + 2$ ,  $B(x_1, y_1)$ ,  $C(x_2, y_2)$ . .....5 分

由  $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = m(y-1) + 2 \end{cases}$  得  $y^2 - 4my + 4m - 8 = 0$ . .....6 分

因为  $\Delta = 16m^2 - 16m + 32 > 0$ ,

所以  $y_1 + y_2 = 4m$ ,  $y_1 y_2 = 4m - 8$ . .....7 分

因为 点  $E(0, 1)$ , 点  $A(2, 1)$ ,

所以  $\triangle EBC$  的面积  $S = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |y_1 - y_2|$   
 $= 4\sqrt{m^2 - m + 2}$ . .....9 分

当  $m = \frac{1}{2}$  时,  $\triangle EBC$  的面积取得最小值  $2\sqrt{7}$ . .....10 分

(18) (本小题 10 分)

解: (I) 取  $PA$  的中点  $E$ , 连接  $EF$ ,  $EG$ .

因为 点  $F$  为  $PD$  的中点,

所以  $EF \parallel AD$ ,  $EF = \frac{1}{2}AD$ . .....1 分

因为 四边形  $ABCD$  是平行四边形,

所以  $BC \parallel AD$ ,  $BC = AD$ .

因为 点  $G$  为线段  $BC$  的中点,

所以  $CG = \frac{1}{2}BC$ .

所以  $EF \parallel CG$ ,  $EF = CG$ .

所以 四边形  $EFCG$  是平行四边形,

所以  $FC \parallel EG$ . .....2 分

因为  $EG \subset$  平面  $PAG$ ,  $FC \not\subset$  平面  $PAG$ ,

所以  $CF \parallel$  平面  $PAG$ . .....3 分

(II) 选择条件①②: 因为  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 直线  $PC$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $30^\circ$ ,

所以  $\angle PCA = 30^\circ$ . .....4 分

因为  $PA = 2$ ,

所以  $AC = 2\sqrt{3}$ .

因为  $AD = 2\sqrt{2}$ , 四边形  $ABCD$  是平行

四边形,

所以  $AD \parallel BC$ ,  $BC = 2\sqrt{2}$ .

因为  $AB = 2$ ,

所以  $AC^2 = 12 = AB^2 + BC^2$ .

所以  $\angle ABC = 90^\circ$ , 即  $AB \perp BC$ .

所以  $AB \perp AD$ . .....5 分

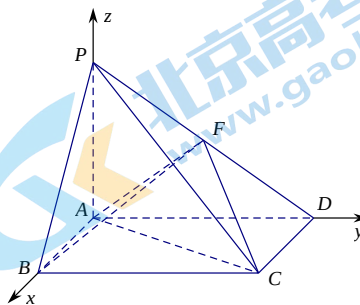
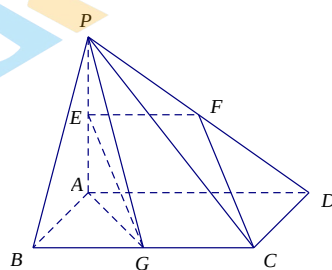
如图建立空间直角坐标系  $A-xyz$ . 由题意得  $B(2,0,0)$ ,  $F(0,\sqrt{2},1)$ ,

$C(2,2\sqrt{2},0)$ ,  $D(0,2\sqrt{2},0)$ .

所以  $\overrightarrow{AB} = (2,0,0)$ ,  $\overrightarrow{AF} = (0,\sqrt{2},1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (2,2\sqrt{2},0)$ ,  $\overrightarrow{AD} = (0,2\sqrt{2},0)$ .

设平面  $ABF$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x_0, y_0, z_0)$ , 则

数学参考答案 第 3 页 (共 5 页)



$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2x_0 = 0, \\ \sqrt{2}y_0 + z_0 = 0. \end{cases}$$

令  $y_0 = \sqrt{2}$ ，则  $z_0 = -2$ 。

于是  $\mathbf{n} = (0, \sqrt{2}, -2)$ 。

设平面  $ACF$  的法向量为  $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ，则

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AF} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2\sqrt{2}y_1 = 0, \\ \sqrt{2}y_1 + z_1 = 0. \end{cases}$$

令  $y_1 = \sqrt{2}$ ，则  $z_1 = -2$ ， $x_1 = -2$ 。

于是  $\mathbf{m} = (-2, \sqrt{2}, -2)$ 。

(i) 直线  $CD$  到平面  $ABF$  的距离为  $\frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\mathbf{n}|} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 。

(ii) 因为  $\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ 。

所以 二面角  $B-AF-C$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 。

**选择条件①③：**因为  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ，直线  $PC$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $30^\circ$ ，

所以  $\angle PCA = 30^\circ$ ， $PA \perp AB$ 。

因为  $PA = 2$ ，

所以  $AC = 2\sqrt{3}$ 。

因为 平面  $PAB \perp$  平面  $PAD$ ， $BA \subset$  平面  $PAB$ ，平面  $PAB \cap$  平面  $PAD = PA$ ，

所以  $BA \perp$  平面  $PAD$ 。

所以  $BA \perp AD$ 。

因为 四边形  $ABCD$  是平行四边形，

所以 四边形  $ABCD$  是矩形。

因为  $AB = 2$ ，

所以  $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{2}$ 。

以下同选择条件①②。

选择条件①②③：同选择条件①②或选择条件①③。

(19) (本小题 10 分)

解: (I) 因为 椭圆  $E$  的焦距为 2, 长轴长为 4,

所以  $c=1$ ,  $a=2$ .

所以  $b^2 = a^2 - c^2 = 3$ .

所以 椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . .....3 分

(II) 存在定点  $P(-\frac{4}{3}, 0)$ , 使得  $B'$  恒在直线  $PC$  上. 理由如下: .....4 分

设直线  $l: x = my - 3$ ,  $B(x_1, y_1)$ ,  $C(x_2, y_2)$ , 则  $B'(x_1, -y_1)$ .

所以  $\overrightarrow{PC} = (x_2 + \frac{4}{3}, y_2)$ ,  $\overrightarrow{PB'} = (x_1 + \frac{4}{3}, -y_1)$ .

由  $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ x = my - 3 \end{cases}$  得  $(3m^2 + 4)y^2 - 18my + 15 = 0$ . .....6 分

所以  $\Delta = 48(3m^2 - 5) > 0$ ,  $y_1 + y_2 = \frac{18m}{3m^2 + 4}$ ,  $y_1 y_2 = \frac{15}{3m^2 + 4}$ . .....8 分

因为  $x_1 = my_1 - 3$ ,  $x_2 = my_2 - 3$ ,

$$\begin{aligned} \text{所以 } (x_1 + \frac{4}{3})y_2 + (x_2 + \frac{4}{3})y_1 &= 2my_1 y_2 - \frac{5}{3}(y_1 + y_2) \\ &= 2m \times \frac{15}{3m^2 + 4} - \frac{5}{3} \times \frac{18m}{3m^2 + 4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以  $\overrightarrow{PC} \parallel \overrightarrow{PB'}$ .

所以 点  $B'$ ,  $P$ ,  $C$  共线. ....10 分

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯