东城区 2020—2021 学年度第一学期期末统一检测

高三数学参考答案及评分标准

2021.1

一、选择题(共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

(1)D (2)C (3)D (4)B (5)A

(6)A (7)B (8)C (9)C (10)B

二、填空题(共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分)

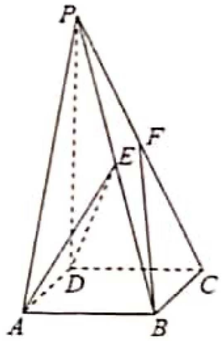
(11)$4-3i$ (12)$[1,+\infty)$

(13)$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ $\dfrac{7}{9}$ (14)$\sqrt{2}$

(15)$\dfrac{4}{3}$ $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}-2\pi\right]$

三、解答题(共 6 小题,共 85 分)

(16)(共 13 分)



解:(Ⅰ)因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $PD\perp AD$.

因为底面 $ABCD$ 是正方形,

所以 $AD\perp CD$.

因为 $PD\cap CD=D$,

所以 $AD\perp$ 平面 PCD.

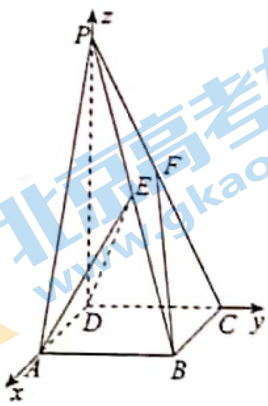
又因为 $AD\subset$ 平面 ADE,

所以平面 $ADE\perp$ 平面 PCD. ………………………………… 4 分

(Ⅱ)因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$,

所以 $PD\perp AD$,$PD\perp CD$.

因为底面 $ABCD$ 是正方形,所以 $AD\perp CD$.



如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$.

因为 $PD=4$,底面 $ABCD$ 为边长为 2 的正方形,

所以 $P(0,0,4)$,$A(2,0,0)$,$B(2,2,0)$,$C(0,2,0)$,

$D(0,0,0)$,$E(1,1,2)$,$F(0,1,2)$.

则 $\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{DE}=(1,1,2)$,$\overrightarrow{BF}=(-2,-1,2)$.

设平面 ADE 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}2x=0,\\ x+y+2z=0.\end{cases}$

令 $z=-1$,则 $x=0$,$y=2$.

所以 $\boldsymbol{m}=(0,2,-1)$.

设直线 BF 与平面 ADE 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BF},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{BF}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{4}{\sqrt{9}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$.

所以直线 BF 与平面 ADE 所成角的正弦值为 $\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$. ………………………… 13 分

(17)(共 13 分)

解：选条件①：$f(x)=g(x)\cdot h(x)$；

(Ⅰ) $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{6})\cos x$

$=(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x)\cos x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x-\frac{1}{2}\cos^2 x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\times\frac{1+\cos 2x}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}$.

所以 $f(x)$ 的最小正周期是 π. ………………………………………… 7 分

(Ⅱ)因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

所以 $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$.

所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\sin(2x-\frac{\pi}{6})\leqslant 1$.

所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}$.

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 有最大值 $\frac{1}{4}$. ……………………………… 13 分

选条件②：$f(x)=g(x)+h(x)$.

(Ⅰ) $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{6})+\cos x$

$=(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x)+\cos x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$

$=\sin(x+\frac{\pi}{6})$.

所以 $f(x)$ 的最小正周期是 2π. ……………………………………………… 7 分

(Ⅱ)因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

所以 $\frac{\pi}{6}\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

所以 $\frac{1}{2}\leqslant\sin(x+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$,

当 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 有最大值 1. ……………………………… 13 分

18)(共 14 分)

解:(Ⅰ)质量在[250,300),[300,350)的该种水果的频率分别为 $0.008\times 50=0.4$,

$0.004\times 50=0.2$,其比为 2 : 1,

所以按分层抽样从质量在[250,300),[300,350)的这种水果中随机抽取 6 个,

质量在[250,300)的该种水果有 4 个. ………………………………………… 4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知,6 个水果中有 2 个质量在[300,350).

所以 X 的所有可能取值为 0,1,2.

$P(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$, $P(X=1)=\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\dfrac{3}{5}$, $P(X=2)=\dfrac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

故 X 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{5}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{1}{5}=1$. ……………………… 10 分

(Ⅲ)由频率分布直方图可知,质量在[100,150),[150,200),[200,250),[250,300),[300,350),[350,400]的该种水果的频率分别为 0.1,0.1,0.15,0.4,0.2,0.05.

所以估计 20 000 个水果中,二等品有 $20\ 000\times(0.1+0.1)=4\ 000$ 个;

一等品有 $20\ 000\times(0.15+0.4)=11\ 000$ 个;

特等品有 $20\ 000\times(0.2+0.05)=5\ 000$ 个.

果园该种水果的销售收入为 $4\ 000\times 4+11\ 000\times 7+5\ 000\times 10=143\ 000$(元).

……………………………………………………………………………………… 14 分

(共 15 分)

解:(Ⅰ)依题意,得$\begin{cases} a=2, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$

解得 $a^2=4$, $b^2=3$.

所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)由题设知直线 l 的斜率存在,设直线 l 的方程为:$y=kx+m(k\neq 0)$.

由$\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 y,整理得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+(4m^2-12)=0$.

依题意,有 $\Delta=64k^2m^2-16(3+4k^2)(m^2-3)=0$,解得 $m^2=3+4k^2$.

设 $G(x_1,0)$,$E(x_0,y_0)$,则 $x_1=-\dfrac{m}{k}$,$x_0=\dfrac{-4km}{3+4k^2}=-\dfrac{4k}{m}$.

因为 $ET\perp x$ 轴,所以 $T(-\dfrac{4k}{m},0)$.

所以$\dfrac{|TA|}{|TB|}=\dfrac{\left|-\dfrac{4k}{m}+2\right|}{\left|2-(-\dfrac{4k}{m})\right|}=\dfrac{|-4k+2m|}{|2m+4k|}=\dfrac{|m-2k|}{|m+2k|}$.

又因为$\dfrac{|GA|}{|GB|}=\dfrac{\left|-2+\dfrac{m}{k}\right|}{\left|2+\dfrac{m}{k}\right|}=\dfrac{|m-2k|}{|m+2k|}$,

所以$\dfrac{|TA|}{|TB|}=\dfrac{|GA|}{|GB|}$. ………………………………………………………… 15 分

(20)(共 15 分)

解:(Ⅰ)因为 $f'(x)=\dfrac{ax(x-2)}{e^x}$,所以 $f'(1)=-\dfrac{a}{e}=1$,故 $a=-e$.

所以 $f(1)=1-\dfrac{a}{e}=2$.

所求切线方程为 $y-2=x-1$,即 $y=x+1$.

………………………………………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)当 $a=1$ 时,$f(x)=1-\dfrac{x^2}{e^x}$,$f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{e^x}$.

当 $x\in(0,2)$时,$f'(x)<0$;当 $x\in(2,+\infty)$时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在区间$(0,2)$上单调递减,在区间$(2,+\infty)$上单调递增.

所以 $f(x)$的最小值为 $f(2)=1-\dfrac{4}{e^2}>0$.

故 $x>0$ 时,$f(x)>0$. ………………………………………………………… 10 分

(Ⅲ)对于函数 $f(x)=1-\dfrac{ax^2}{e^x}$,$a\in\mathbf{R}$.

(i)当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)>0$,$f(x)$没有零点;

(ii)当 $a>0$ 时,$f'(x)=\dfrac{ax(x-2)}{e^x}$.

当 $x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递增;

当 $x\in(0,2)$时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$在区间$(0,2)$上单调递减;

当 $x\in(2,+\infty)$时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$在区间$(2,+\infty)$上单调递增.

所以 $f(0)=1$ 是 $f(x)$的极大值,$f(2)=1-\dfrac{4a}{e^2}$是 $f(x)$的极小值.

因为 $f(-\dfrac{1}{\sqrt{a}})=1-\dfrac{a(-\dfrac{1}{\sqrt{a}})^2}{e^{-\frac{1}{\sqrt{a}}}}=1-\dfrac{1}{e^{-\frac{1}{\sqrt{a}}}}=1-e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}<0$,

所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$上有且只有一个零点.

由于 $f(2)=1-\dfrac{4a}{e^2}$,

①若 $f(2)>0$,即 $a<\dfrac{e^2}{4}$,$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上没有零点;

②若 $f(2)=0$,即 $a=\dfrac{e^2}{4}$,$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上只有一个零点;

③若 $f(2)<0$,即 $a>\dfrac{e^2}{4}$,由于 $f(0)=1$,所以 $f(x)$在区间$(0,2)$上有一个零点.

由(Ⅱ)知，当 $x>0$ 时，$e^x>x^2$，

所以 $f(4a)=1-\frac{16a^3}{e^{4a}}=1-\frac{16a^3}{(e^{2a})^2}>1-\frac{16a^3}{(2a)^4}=1-\frac{1}{a}>0$.

故 $f(x)$ 在区间 $(2,4a)$ 上有一个零点.

因此 $a>\frac{e^2}{4}$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有两个零点.

综上，当 $f(x)$ 有两个零点时，$a=\frac{e^2}{4}$. …………………………………………………… 15 分

(共 15 分)

解：(Ⅰ)数列 $A+B$ 的前四项和为 A 的前四项和与 B 的前四项和之和，为 $2+10=12$. …………………………………………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)由题知 $m\leqslant 4$，数列 $A_i(i\in\mathbf{N}^*)$ 满足：$a_j=a_{j+4}$，$b_j=b_{j+4}(j\in\mathbf{N}^*)$，所以只考虑数列 A_i 和 B 的前四项.

取 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 为 1,0,0,0； 1,0,0,0； 1,0,0,0； 0,1,0,0； 0,1,0,0； 0,0,1,0，可使 $A_1+A_2+\cdots+A_6+B$ 的前四项为 4,4,4,4，所以 $m=1$ 成立；

取 A_1,A_2,A_3 为 1,1,0,0； 1,1,0,0； 1,0,1,0，可使 $A_1+A_2+A_3+B$ 的前四项为 4,4,4,4，所以 $m=2$ 成立；

取 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 为 1,1,1,0； 1,1,1,0； 1,1,0,1； 1,1,1,0； 1,0,1,1； 1,1,0,1，可使 $A_1+A_2+\cdots+A_6+B$ 的前四项为 7,7,7,7，所以 $m=3$ 成立；

当 $m=4$ 时，A_i 前四项是 1,1,1,1，所以对任意的 k，$A_1+A_2+\cdots+A_k+B$ 不会是常数列；…………………………………………………………………………………… 12 分

综上，$m=1,2,3$. …………………………………………………………………………… 15 分

(Ⅲ)$\frac{1}{2}t(t-1)$. …………………………………………………………………………… 15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。