

数学试卷

2023 年 1 月

本试卷共 4 页,共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,请将答题卡交回。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 为椭圆上一点, 则 $|PF_1| + |PF_2| =$

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

(2) 已知双曲线的标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$, 则该双曲线的渐近线方程为

- (A) $y = \pm \frac{1}{2}x$ (B) $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ (C) $y = \pm \sqrt{2}x$ (D) $y = \pm 2x$

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式为

- (A) $a_n = \frac{1}{n}$ (B) $a_n = \frac{1}{n+1}$ (C) $a_n = \frac{1}{2n-1}$ (D) $a_n = \frac{1}{2n}$

(4) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 2n - 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公差 d 分别为

- (A) $a_1 = -1, d = -2$ (B) $a_1 = -1, d = 2$ (C) $a_1 = 1, d = -2$ (D) $a_1 = 1, d = 2$

(5) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 3, a_{n+1} = 3a_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项和为

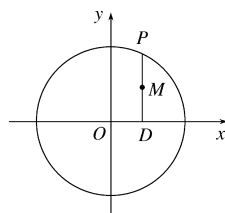
- (A) 40 (B) 80 (C) 121 (D) 242

(6) 已知圆 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = r^2$ 与 y 轴相切, 则 $r =$

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) 3

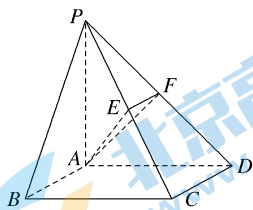
(7) 如图, 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上任取一点 P , 过点 P 作 x 轴的垂线段 PD , D 为垂足. 当点 P 在圆上运动时, 线段 PD 的中点 M 的轨迹方程为

- (A) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$
(C) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$



- (8) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=AP=2$, 点 E, F 分别是 PC, PD 的中点, 则点 C 到平面 AEF 的距离为

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\sqrt{2}$
(C) $\frac{3}{2}$ (D) 2



- (9) 已知抛物线 $y^2=4x$ 与直线 $y=2x-2$ 相交于 A, B 两点, 则线段 AB 的长为

- (A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) 5

- (10) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \frac{1}{2n(n+1)}$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $T_n > \frac{n\lambda}{n^2+4n+19}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$)

对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 则 λ 的取值范围是

- (A) $(-\infty, 4)$ (B) $(-\infty, 2\sqrt{5})$ (C) $(-\infty, 5)$ (D) $(-\infty, 6)$

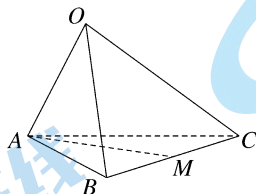
第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

- (11) 点 $(1, -2)$ 到直线 $3x+4y-5=0$ 的距离为 _____.

- (12) 已知抛物线 $x^2=2py$ ($p>0$) 经过点 $(2, 2)$, 则该抛物线的方程为 _____; 准线方程为 _____.

- (13) 如图, 点 M 为四面体 $OABC$ 的棱 BC 的中点, 用 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 表示 $\overrightarrow{AM}$, 则 $\overrightarrow{AM} =$ _____.



- (14) 已知有穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均不相等, 将数列 $\{a_n\}$ 的项从大到小重新排序后相应的项数构成新数列 $\{p_n\}$, 称数列 $\{p_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的“序数列”. 例如, 数列 a_1, a_2, a_3 满足 $a_1 > a_3 > a_2$, 则其“序数列”为 $1, 3, 2$. 设各项均不相等的数列 $2, 3-t, t+1, 5$ ($t \in \mathbf{R}$) 为数列 Ω .

① 若 $t=0$, 则数列 Ω 的“序数列”为 _____;

② 若数列 Ω 的“序数列”为 $3, 4, 1, 2$, 则 t 的取值范围为 _____.

(15) 已知曲线 E 的方程为 $\frac{x|x|}{4} + y^2 = 1$, 给出下列四个结论:

- ① 若点 $M(x, y)$ 是曲线 E 上的点, 则 $x \leq 2, y \in \mathbf{R}$;
- ② 曲线 E 关于 x 轴对称, 且关于原点对称;
- ③ 曲线 E 与 x 轴, y 轴共有 4 个交点;
- ④ 曲线 E 与直线 $y = \frac{1}{2}x$ 只有 1 个交点.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

(16) (本小题 13 分)

已知两点 $A(-1, 1), B(1, 1)$, 直线 $l: x + y + 1 = 0$.

(I) 若直线 l_1 经过点 A , 且 $l_1 \parallel l$, 求直线 l_1 的方程;

(II) 若圆心为 C 的圆经过 A, B 两点, 且圆心 C 在直线 l 上, 求该圆的标准方程.

(17) (本小题 13 分)

已知双曲线的顶点在 x 轴上, 两顶点间的距离是 2, 离心率 $e = 2$.

(I) 求双曲线的标准方程;

(II) 若抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 与该双曲线的一个焦点相同, 点 M 为抛物线上一点, 且 $|MF| = 3$, 求点 M 的坐标.

(18) (本小题 15 分)

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 公比 $q = 2$, 设 $b_n = 3n - 2 + a_n$.

(I) 求 a_3 的值;

(II) 若 m 是 a_3 和 b_4 的等差中项, 求 m 的值;

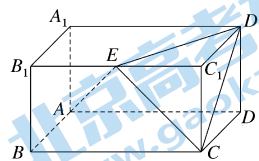
(III) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(19)(本小题 14 分)

如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AA_1=1, AD=2$, 点 E 为 B_1C_1 的中点.

(I) 求证: $AE \perp$ 平面 CD_1E ;

(II) 求平面 CD_1E 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的夹角的余弦值.



(20)(本小题 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$, 点 $(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆 C 上, 点 B 的坐标为

$(-1, 0)$, 点 O 为坐标原点.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 过 $A(-4, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$) 两点, 判断 $\angle ABM$ 与 $\angle OBN$ 的大小, 并说明理由.

(21)(本小题 15 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的第 2 项为 4, 前 6 项的和为 42, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

且 $2T_n = 3b_n - a_n$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求证: 数列 $\{b_n + 1\}$ 是等比数列, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(III) 设 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n=1, \\ \frac{1}{b_n + a_n - 1}, & n \geq 2, \end{cases}$ 求证: $c_1 + c_2 + \dots + c_n < \frac{5}{12}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯