2022 北京丰台高二（下）期末

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知函数 $f(x)=\cos x$，则 $f'(\frac{\pi}{6})=($　　$)$

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

2．$(x-2)^3$ 的展开式中 x^2 的系数是 $($　　$)$

A．-12　　B．12　　C．-6　　D．6

3．设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_n=n^2+2n$，则 $a_5=($　　$)$

A．-21　　B．11　　C．27　　D．35

4．经验表明，某种树的高度 y（单位：m）与胸径 x（单位：cm）（树的主干在地面以上 1.3 米处的直径）具有线性相关关系．根据一组样本数据 $(x_i，y_i)(i=1，2，\ldots，n)$，用最小二乘法建立的经验回归方程为 $\hat{y}=0.25x+15$．据此模型进行推测，下列结论正确的是 $($　　$)$

A．y 与 x 负相关

B．胸径为 $20cm$ 的树，其高度一定为 $20m$

C．经过一段时间，样本中一棵树的胸径增加 $1cm$，估计其高度增加 $0.25m$

D．样本数据 $(x_i，y_i)(i=1，2，\ldots，n)$ 中至少有一对满足经验回归方程 $\hat{y}=0.25x+15$

5．在一次高台跳水运动中，某运动员在运动过程中的重心相对于水面的高度 h（单位：m）与起跳后的时间 t（单位：s）存在函数关系 $h(t)=-4.9t^2+4.8t+11$．该运动员在 $t=1s$ 时的瞬时速度（单位：m/s）为 $($　　$)$

A．10.9　　B．-10.9　　C．5　　D．-5

6．同时抛掷一枚红骰子和一枚蓝骰子，观察向上的点数，记“红骰子向上的点数为 1”为事件 A，“两枚骰子的点数之和等于 6”为事件 B，则 $P(B|A)=($　　$)$

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{6}$　　C．$\frac{1}{12}$　　D．$\frac{1}{36}$

7．甲，乙，丙 3 位同学从即将开设的 4 门校本课程中任选一门参加，则他们参加的校本课程各不相同的概率为 $($　　$)$

A．$\frac{3}{8}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{8}{27}$　　D．$\frac{8}{9}$

8．“$a=2$”是“函数 $f(x)=e^x(x-a)$ 在 $x=1$ 处有极小值”的 $($　　$)$

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

9．某项活动需要把包含甲，乙，丙在内的 6 名志愿者安排到 A，B，C 三个小区做服务工作，每个小区安排 2 名志愿者．已知甲必须安排在 A 小区，乙和丙不能安排在同一小区，则不同安排方案的种数为 $($　　$)$

A．24　　B．36　　C．48　　D．72

10．已知 a_n 是不大于 $\sqrt{n}$ 的正整数，其中 $n \in N^*$．若 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m \geqslant 70$，则正整数 m 的最小值为(　　)

A．23　　　　B．24　　　　C．25　　　　D．26

二．填空题.共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．（5 分）为了解性别因素是否对某班学生打篮球的经常性有影响，对该班 40 名学生进行了问卷调查，得到如表的 2×2 列联表：

	经常打篮球	不经常打篮球	合计
男生	m	4	20
女生	8		20
合计		n	40

则 $m=$____，$n=$____．

12．（5 分）由两个“1”和两个“2”组成的不同的四位数有 ____个．（用数字作答）

13．（5 分）函数 $f(x)=\dfrac{lnx}{x}$ 在 $x=1$ 处的瞬时变化率为 ____．

14．（5 分）数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=pn^2+n(p\in R)$，若 $a_{n+1}<a_n$，则 p 的一个取值为 ____．

15．（5 分）某制造商制造并出售球形瓶装的某种饮料．每个瓶子的造价 P_1（单位：元）、瓶内饮料的获利 P_2（单位：元）分别与瓶子的半径 r（单位：cm，$r \leqslant 5$）之间的关系如图甲、乙所示．设制造商的利润为 $f(r)=P_2-P_1$，给出下列四个结论：

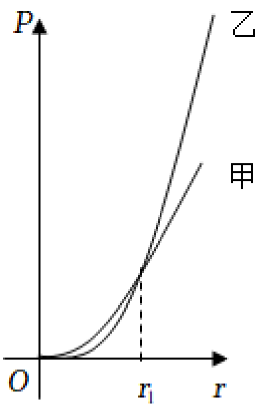
①当 $r\in(0,r_1)$ 时，$f(r)<0$；

② $f(r)$ 在区间 $(r_1,\ 5)$ 上单调递减；

③ $f(r)$ 在区间 $(0,r_1)$ 上存在极小值；

④ $f'(r)$ 在区间 $(0,r_1)$ 上存在极小值．

其中所有正确结论的序号是 ____．



三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．（14 分）某同学在上学途中要经过一个路口，假设他骑车上学在该路口遇到红灯的概率为 $\dfrac{1}{3}$．已知该同学一周有 3 天骑车上学．

（I）求该同学在这 3 天上学途中恰有 1 天遇到红灯的概率；

（II）记该同学在这 3 天上学途中遇到红灯的天数为 X，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$．

17．（13 分）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n， $S_2=9$，请从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，解决下面的问题：

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=2^{a_n-3}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n．

条件①： $a_4=7$；

条件②： $S_4=22$．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

18．（14 分）已知函数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$， $a\in R$．

（I）当$a=2$时，求 $f(x)$ 在区间$[1，3]$上的最大值和最小值；

（II）求 $f(x)$ 的单调区间．

19．（15 分）一兴趣小组为了解 5 种 APP 的使用情况，在某社区随机抽取了 200 人进行调查，得到使用这 5 种 APP 的人数及每种 APP 的满意率，调查数据如表：

APP	第 1 种	第 2 种	第 3 种	第 4 种	第 5 种
使用 APP 的人数	160	90	150	90	80
满意率	0.85	0.75	0.8	0.7	0.75

（I）从这 200 人中随机抽取 1 人，求此人使用第 2 种 APP 的概率；

（II）根据调查数据，将使用人数超过50%的 APP 称为"优秀 APP"．该兴趣小组从这 5 种 APP 中随机选取 3 种，记其中"优秀 APP"的个数为 X，求 X 的分布列及数学期望$E(X)$；

（III）假设每种 APP 被社区居民评价为满意的概率与表格中该种 APP 的满意率相等，用"$\xi_k=1$"表示居民对第 k 种 APP 满意，"$\xi_k=0$"表示居民对第 k 种 APP 不满意$(k=1，2，3，4，5)$．写出方差$D(\xi_1)$， $D(\xi_2)$， $D(\xi_3)$， $D(\xi_4)$， $D(\xi_5)$的大小关系．（只需写出结论）

20．（15 分）已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x(a\in R)$．

（I）当$a=0$时，求曲线$y=f(x)$点$(0，f(0))$处的切线方程；

（II）求证：当$a>0$时，函数 $f(x)$ 存在极值；

（III）若函数 $f(x)$ 在区间$(-1,+\infty)$上有零点，求 a 的取值范围．

21．（14 分）已知数列$\{a_n\}$是无穷数列．若$b_n=a_{n+1}-a_n$，则称$\{b_n\}$为数列$\{a_n\}$的 1 阶差数列；若$c_n=b_{n+1}-b_n$，则称数列$\{c_n\}$为数列$\{a_n\}$的 2 阶差数列；以此类推，可得出数列$\{a_n\}$的 p 阶差数列，其中 $p\in N^*$．

（I）若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2$，求数列$\{a_n\}$的 2 阶差数列的通项公式；

（II）若数列$\{a_n\}$的首项为 1，其一阶差数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（III）若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^m(m\in N^*)$，写出数列$\{a_n\}$的 m 阶差数列的通项公式，并说明理由．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【分析】根据导数的公式即可得到结论.

【解答】解：$f(x)=\cos x$，$\therefore f'(x)=-\sin x$，则 $f'(\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$.

故选：D.

【点评】本题主要考查导数的基本运算，比较基础.

2.【分析】利用二项式定理的展开式，即可解出.

【解答】解：展开式中 x^2 的系数为：$C_3^1(-2)^1=-6$，

故选：C.

【点评】本题考查了二项式定理的展开式，学生的数学运算能力，属于基础题.

3.【分析】本题根据公式 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$ 代入进行计算即可得到 a_5 的值，从而可得正确选项.

【解答】解：由题意，

可知 $a_5=S_5-S_4=5^2+2\times 5-(4^2+2\times 4)=11$.

故选：B.

【点评】本题主要考查由数列前 n 项和求通项公式的问题．考查了转化与化归思想，公式法，整体思想，以及逻辑推理能力和数学运算能力，属基础题.

4.【分析】由已知经验回归方程逐一分析四个选项得答案.

【解答】解：由经验回归方程 $\hat{y}=0.25x+15$，可知 y 与 x 正相关，故 A 错误；

取 $x=20$，得 $\hat{y}=0.25\times 20+15=20$，说明胸径为 $20cm$ 的树，预测其高度为 $20m$，但也不一定就是 $20m$，故 B 错误；

样本中一棵树的胸径增加 $1cm$，估计其高度增加 $0.25m$，故 C 正确；

经验回归方程恒过样本点的中心，但样本中的点不一定经过经验回归方程，故 D 错误.

故选：C.

【点评】本题考查经验回归方程的应用，明确有关量的意义是关键，是基础题.

5.【分析】求出函数的导数，令 $t=1$ 即可求解.

【解答】解：由已知可得 $h'(t)=-9.8t+4.8$，

则 h'（1）$=-9.8+4.8=-5$，

故选：D.

【点评】本题考查了变化的快慢与变化率，考查了学生的运算能力，属于基础题.

6.【分析】分别写出事件 A 和 B 的基本事件，根据条件概率公式计算即可.

【解答】解：由题可知，同时抛掷一枚红骰子和一枚蓝骰子，共 36 种情况，事件 A 为“红骰子向上的点数为 1“，共 6 种情况，

而事件 B “两枚骰子的点数之和等于 6“，共 5 种情况，事件 AB 同时发生“红骰子向上的点数为 1 且两枚骰子的点数之和等于 6“，共 1 种情况，

所以 $P(B|A)=\dfrac{n(AB)}{n(A)}=\dfrac{1}{6}$.

故选：B.

【点评】本题考查条件概率，考查学生的计算能力，确定基本事件的个数是关键.

7.【分析】利用古典概型的概率公式即可求解.

【解答】解：甲，乙，丙 3 位同学从开设的 4 门校本课程中任选一门参加的事件数为 4^3．甲，乙，丙 3 位同学参加的校本课程各不相同的事件数为 A_4^3.

故所求概率为 $P=\dfrac{A_4^3}{4^3}=\dfrac{3}{8}$.

故选：A.

【点评】本题主要考查古典概型，属于基础题.

8.【分析】根据充分与必要条件的概念，导数的几何意义即可判断.

【解答】解：由 $a=2$ 得 $f(x)=e^x(x-2)$，$\therefore f'(x)=e^x(x-2)+e^x=e^x(x-1)$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$；$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处有极小值，

反过来，函数 $f(x)=e^x(x-a)$ 在 $x=1$ 处有极小值可得：

f'（1）$=0$，且 $x<1$ 时 $f'(x)<0$；$x>1$ 时 $f'(x)>0$，又 $f'(x)=e^x(x-a+1)$，

$\therefore e(2-a)=0$，$\therefore a=2$，经检验知 $x<1$ 时 $f'(x)<0$；$x>1$ 时 $f'(x)>0$，

故“$a=2$”是“函数 $f(x)=e^x(x-a)$ 在 $x=1$ 处有极小值”的充分必要条件，

故选：C.

【点评】本题考查充分与必要条件的概念，导数的几何意义，属基础题.

9.【分析】对乙丙进行分类讨论，即可解出.

【解答】解：根据题意，分 2 种情况讨论：

①甲和乙丙中 1 人安排在 A 小区，

此时 A 小区的安排方法有 C_2^1 种，B 区的选法有 C_4^2 种，则此时有 $C_2^1\times C_4^2=12$ 种安排分法，

②甲和其他三人中的 1 人在 A 区，

则乙丙两人分别在 B 区、C 区，有 2 种情况，将其他三人全排列，安排到三个小区，有 $A_3^3=6$ 种安排方法，

则此时有 $2\times6=12$ 种安排方法；

故有 $12+12=24$ 种安排方法；

故选：A.

【点评】本题考查了概率与统计，特殊元素的安排，学生的数学运算能力，属于基础题.

10.【分析】根据题意，当数列的每一项最大时，m 的值最小，结合 $\{a_n\}$ 的规律，分析可得答案.

【解答】解：根据题意，对于数列 $\{a_n\}$，当数列的每一项最大时，m 的值最小，

又由 a_n 是不大于 $\sqrt{n}$ 的正整数，

当$1\leqslant n\leqslant 3$时，$a_n=1$，$a_1+a_2+a_3=3<70$，

当$4\leqslant n\leqslant 8$时，$a_n=2$，$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_8=13<70$

当$9\leqslant n\leqslant 15$时，$a_n=3$，$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{15}=34<70$

当$16\leqslant n\leqslant 24$时，$a_n=4$，$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{24}=70$，

故正整数m的最小值为24；

故选：B.

【点评】本题考查数列与不等式的性质，

二．填空题.共5小题，每小题5分，共25分。

11.【分析】根据已知条件，结合列联表之间的数据关系，即可求解.

【解答】解：由表中数据可得$m=20-4=16$，

则经常打篮球的人数为$16+8=24$，

故$n=40-24=16$.

故答案为：16；16.

【点评】本题主要考查独立性检验中列联表的应用，属于基础题.

12.【分析】先将个“1”和两个“2”共4个数排列，因为有两个“1”和两个“2”相同元素，除以$A_2^2\cdot A_2^2$即可.

【解答】解：由两个“1”和两个“2”组成的不同的四位数有$\dfrac{A_4^4}{A_2^2A_2^2}=6$种.

故答案为：6.

【点评】本题考查了排列的应用，是基础题.

13.【分析】求出函数的导数，然后令$x=1$即可求解.

【解答】解：由已知可得$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-lnx\times 1}{x^2}=\dfrac{1-lnx}{x^2}$，

令$x=1$，则f'（1）$=\dfrac{1-ln1}{1^2}=1$，

故答案为：1.

【点评】本题考查了变化的快慢以及变化率，考查了导数的几何意义，属于基础题.

14.【分析】根据题意，分析可得$a_{n+1}-a_n=p(n+1)^2+n+1-pn^2-n=2np+p+1<0$，解可得$n$的取值范围，由此分析可得答案.

【解答】解：根据题意，数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=pn^2+n(p\in R)$，

若$a_{n+1}<a_n$，则$a_{n+1}-a_n=p(n+1)^2+n+1-pn^2-n=2np+p+1<0$，

又由$n\geqslant 1$，必有$\begin{cases}p<0\\3p+1<0\end{cases}$，解可得$p<-\dfrac{1}{3}$，

故p的一个值为-1；

故答案为：-1（答案不唯一）.

【点评】本题考查数列的函数特性，涉及数列的单调性，属于基础题.

15.【分析】根据函数在某点处的几何意义可逐一判断.

【解答】解：由图可知：当 $r\in(0,r_1)$ 时，$P_2<P_1$，故 $f(r)=P_2-P_1<0$，故①正确；

$f'(r)=P_{2'}-P_{1'}$，当 $r_0\in(r_1$，$5)$ 时，由图象可知 P_2 在 $r=r_0$ 处的切线斜率大于 P_1 在 $r=r_0$ 处的切线斜率，

故 $P_{2'}-P_{1'}>0\Rightarrow f'(r)=P_{2'}-P_{1'}>0$，

因此 $f(r)$ 在区间 $(r_1$，$5)$ 上单调递增，故②错误；

根据图象可知：图象 P_1 先快后慢，而 P_2 图象先慢后快，所以可得 $f(r)$ 在 $(0$，$r_1)$ 上的变化是先减后增，故有极小值，故③正确；

$f'(r)=P_{2'}-P_{1'}$，当 r 趋近于 r_1 时，P_2 在 r 处的切线斜率明显大于 P_1 在 r 处的切线斜率，而当 r 趋近于 0 时，P_1 在 r 处的切线斜率明显大于 P_2 在 r 处的切线斜率，

所以可得 $f'(r)$ 在 $(0$，$r_1)$ 上的变化是先减后增，故有极小值，故④正确．

故答案为：①③④．

【点评】本题考查了函数图象与导函数的几何意义，考查函数的单调性与极值，属于中档题．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．【分析】（I）利用二项分布的概率公式即可求解；

（II）首先得到随机变量 X 的取值，再分别写出概率，再利用期望公式即可求解．

【解答】解：（I）记"该同学在这 3 天上学途中恰有 1 天遇到红灯"为事件 A，

则 $P(A)=C_3^1\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9}$，

所以，该同学在这 3 天上学途中恰有 1 天遇到红灯的概率为 $\frac{4}{9}$．

（II）X 的所有可能取值为：0，1，2，3．

$P(X=0)=C_3^0\times(\frac{1}{3})^0\times(1-\frac{1}{3})^3=\frac{8}{27}$，

$P(X=1)=C_3^1\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9}$，

$P(X=2)=C_3^2\times(\frac{1}{3})^2\times(1-\frac{1}{3})^1=\frac{2}{9}$，

$P(X=3)=C_3^3\times(\frac{1}{3})^3\times(1-\frac{1}{3})^0=\frac{1}{27}$，

X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

数学期望 $E(X)=0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{27}=1$

【点评】本题主要考查了离散型随机变量的分布列与期望，属于基础题．

17．【分析】（I）选条件①和②直接利用等差数列的性质求出数列的首项和公差，进一步求出数列的通项公式；

（II）利用（I）的结论，进一步利用等比数列的通项公式求出数列的和．

【解答】解：（I）选条件①：$a_4=7$；设首项为 a_1，公差为 d，

所以$\begin{cases}S_2=a_1+a_2=2a_1+d=9\\a_4=a_1+3d=7\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=4\\d=1\end{cases}$；

故$a_n=n+3$；

选条件②：$S_4=22$时，

所以$\begin{cases}S_2=a_1+a_2=2a_1+d=9\\S_4=4a_1+6d=22\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=4\\d=1\end{cases}$；

故$a_n=n+3$；

（II）由（I）得：数列$\{b_n\}$满足$b_n=2^{a_n-3}=2^n$，

所以$T_n=2^1+2^2+...+2^n=\dfrac{2\times(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$.

【点评】本题考查的知识要点：数列的通项公式的求法和应用，数列的求和，等比数列的求和，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于中档题.

18.【分析】(I）当$a=2$时，对函数求导，研究其在$[1，3]$的单调性，从而计算最值即可.

（II）对函数求导，通过未知数a的范围判断函数单调性即可.

【解答】解：(I）当$a=2$时，$f(x)=x^3-4x^2+4x$，$f'(x)=3x^2-8x+4=(3x-2)(x-2)$，

令$f'(x)>0$，解得$x>2$或者$x<\dfrac{2}{3}$，

又因为$x\in[1，3]$，故$f(x)$在$[1，2)$单调递减，在$(1，2]$单调递增，

又因为f（1）$=1$，f（2）$=0$，f（3）$=3$，故$f(x)$在$[1，3]$的最大值为3，最小值为0；

（II）$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=(3x-a)(x-a)$，

当$a=0$时，$f'(x)=3x^2\geqslant0$，此时$f(x)$在R上单调递增，故$f(x)$的单调增区间为R，无减区间；

当$a>0$时，令$f'(x)>0$，解得$x>a$或者$x<\dfrac{a}{3}$，

此时$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,\dfrac{a}{3})$，$(a,+\infty)$，单调减区间为$(\dfrac{a}{3},a)$；

当$a<0$时，令$f'(x)>0$，解得$x>\dfrac{a}{3}$或者$x<a$，

此时$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,a)$，$(\dfrac{a}{3},+\infty)$，单调减区间为$(a,\dfrac{a}{3})$，

综上所述：当$a=0$时，$f(x)$的单调增区间为R，无减区间；

当$a>0$时，$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,\dfrac{a}{3})$，$(a,+\infty)$，单调减区间为$(\dfrac{a}{3},a)$；

$a<0$时，$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,a)$，$(\dfrac{a}{3},+\infty)$，单调减区间为$(a,\dfrac{a}{3})$.

【点评】本题主要考查利用导函数研究函数单调性及求解函数最值，属于中档题.

19.【分析】(I）按照古典概型的概率计算方法求解；

（II）分别算出随机变量X等于0，1，2，时的概率，然后写出分布列，即可求出期望；

（III）根据方差的性质和计算方法判断它们的大小.

【解答】解：（I）记“从这 200 人中随机抽取 1 人，此人选择第 2 种 APP”为事件 A，

由表中数据可得：200 人中有 90 人选择使用了第 2 种 APP，

所以 $P(A)=\dfrac{9}{20}$，故从这 200 人中随机抽取 1 人，此人选择第 2 种 APP 的概率为 $\dfrac{9}{20}$；

（II）样本数据中有 5 种 APP，其中“优秀 APP”有 2 种，X 的所有可能取值为：0，1，2，

$P(X=0)=\dfrac{C_2^0\cdot C_3^3}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}$，$P(X=1)=\dfrac{C_2^1\cdot C_3^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{5}$，$P(X=2)=\dfrac{C_2^2\cdot C_3^1}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$，

故 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{3}{10}$

故 X 数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{10}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{6}{5}$；

（III）易知 $D(\xi_1)=0.85(1-0.85)=0.1275$，

$D(\xi_3)=0.8(1-0.8)=0.16$，

$D(\xi_2)=0.75(1-0.75)=0.1875$，

$D(\xi_5)=0.75(1-0.75)=0.1875$，

$D(\xi_4)=0.7(1-0.7)=0.21$，

故 $D(\xi_1)<D(\xi_3)<D(\xi_2)=D(\xi_5)<D(\xi_4)$.

【点评】本题考查离散性随机变量分布列的求法以及期望和方差的计算方法，属于中档题.

20．【分析】（I）利用导数的几何意义能求出曲线 $y=f(x)$ 点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程；

（II）求得 $f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^x-1=(ae^x-1)(2e^x+1)$，从而求出 $f(x)$ 的单调性，即可求得极值；

（III）$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^x-1=(ae^x-1)(2e^x+1)$，当 $a\leqslant 0$ 时，只需 $f(-1)=\dfrac{a}{e^2}+\dfrac{a-2}{e}+1=\dfrac{ea+a-2+e^2}{e^2}>0$，当 $a>0$ 时，只需 $f(x)_{min}=lna-\dfrac{1}{a}+1\leqslant 0$，从而求得 a 的取值范围.

【解答】解：（I）当 0 时，$f(x)=-2e^x-x$，$f'(x)=-2e^x-1$，$f'(0)=-3$，

因为 $f(0)=-2$，

所以曲线 $y=f(x)$ 点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程为 $y-(-2)=-3(x-0)$，即 $3x+y+2=0$.

（II）$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^x-1=(ae^x-1)(2e^x+1)$，

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$ 得，$x=ln\dfrac{1}{a}$.

随着 x 的变化，$f'(x)$、$f(x)$ 的变化情况如下表

x	$(-\infty,ln\dfrac{1}{a})$	$ln\dfrac{1}{a}$	$(ln\dfrac{1}{a},\ +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$f(x)$	单调递减	$lna-\frac{1}{a}+1$	单调递增

所以 $f(x)$ 存在极小值，且极小值为 $lna-\frac{1}{a}+1$.

（III） $f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^{x}-1=(ae^{x}-1)(2e^{x}+1)$，

当 $a\leqslant 0$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递减，且 $f(0)=2a-2<0$，

因为 $f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上有零点，

所以 $f(-1)=\frac{a}{e^{2}}+\frac{a-2}{e}+1=\frac{ea+a-2+e^{2}}{e^{2}}>0$，解得 $a>\frac{2e-e^{2}}{e+1}$，

所以 $\frac{2e-e^{2}}{e+1}<a\leqslant 0$.

当 $a>0$ 时， $f(-1)=\frac{a}{e^{2}}+\frac{a-2}{e}+1=\frac{ea+a-2+e^{2}}{e^{2}}>0$，

因为 $f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上有零点，

由（II）可知 $f(x)_{min}=lna-\frac{1}{a}+1\leqslant 0$，

因为函数 $g(x)lnx-\frac{1}{x}+1$ 是增函数，且 g（1）$=0$，

所以 $0<a\leqslant 1$.

综上所述， a 的取值范围是 $(\frac{2e-e^{2}}{1+e}$， $1]$.

【点评】本题考查了切线方程问题，考查函数的单调性，最值问题，考查导数的应用以及不等式的证明，考查分类讨论思想，转化思想，属于难题.

21.【分析】(I）根据差数列的定义直接求解可得通项公式;

（II）使用累加法可得通项公式;

（III）先计算 $m=1$， $m=2$ 时的 m 阶差数列，然后使用数学归纳法可证.

【解答】解:（I）因为 $a_{n}=n^{2}$，所以 $b_{n}=a_{n+1}-a_{n}=(n+1)^{2}-n^{2}=2n+1$，

$c_{n}=b_{n+1}-b_{n}=2(n+1)+1-(2n+1)=2$；

（II）因为 $b_{n}=a_{n+1}-a_{n}$，且 $b_{n}=2n$，所以 $a_{n+1}-a_{n}=2n$，

所以 $a_{2}-a_{1}=2$， $a_{3}-a_{2}=4$， $a_{4}-a_{3}=6$， $\cdots$， $a_{n}-a_{n-1}=2(n-1)$，

把上面 $n-1$ 个等式左右两边分别依次相加，得到 $a_{n}-a_{1}=2+4+6+\cdots+2(n-1)$，

于是 $a_{n}-a_{1}=n^{2}-n$，

又因为 $a_{1}=1$，所以 $a_{n}=n^{2}-n+1$.

（III）数列 $\{a_{n}\}$ 的 m 阶差数列的通项公式为 $\triangle^{m}a_{n}=m!$. 理由如下:

当 $m=1$时， $a_{n}=n$，

其 1 阶差数列的通过项公式 $b_{n}=n+1-n=1$， $t(t>1)$ 阶差数列各项均为 0.

当 $m=2$ 时， $a_{n}=n^{2}$，

其1阶差数列的通过项公式 $b_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$，

2阶差数列的通项公式为 $c_n=2$， $t(t>2)$ 阶差数列各项均为0.

假设 $m\leqslant k$ 时， $a_n=n^i(i\in N,0<i\leqslant k)$ 的 i 阶差数列为常数 k， $t(t>i)$ 阶差数列各项均为0.

当 $m=k+1$ 时， $a_n=n^{k+1}$ 的1阶差数列为

$b_n=(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=C_{k+1}^1n^k+C_{k+1}^2n^{k-1}+\cdots+C_{k+1}^kn+1$

因为 $a_n=n^{k+1}$ 的 $k+1$ 阶差数列就是 $b_n=C_{k+1}^1n^k+C_{k+1}^2n^{k-1}+\cdots+C_{k+1}^kn+1$ 的 k 阶差数列,

由假设知 b_n 的 k 阶差数列各项均为常数 $C_{k+1}^1k!=(k+1)!$.

因为 $\lambda a_n+\mu b_n$ 的1阶差数列为

$(\lambda a_n+\mu b_n)-(\lambda a_{n-1}+\mu b_{n-1})=\lambda(a_n-a_{n-1})+\mu(b_n-b_{n-1})$，

所以 a_n+b_n 的1阶差数列为 a_n 的1阶差数列与 b_n 的1阶差数列的和，

进而有 a_n+b_n 的 k 阶差数列为 a_n 的 k 阶差数列与 b_n 的 k 阶差数列的和.

所以，数列 $\{a_n\}$ 的 m 阶差数列的通项公式为 $\triangle^m a_n=m!$.

【点评】本题主要考查数列通项公式的计算，数列中的新定义问题，数学归纳法的应用等知识，属于中等题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。