房山区 2020–2021 学年度第二学期期中检测试卷

高一数学

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回，试卷自行保存。

第一部分（选择题　共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）210° 化成弧度是

（A）$\frac{5\pi}{6}$　　（B）$\frac{7\pi}{6}$

（C）$\frac{5\pi}{12}$　　（D）$\frac{7\pi}{12}$

（2）若 $\cos\theta<0$，$\tan\theta>0$，则 θ 的终边所在的象限为

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

（3）$\tan\frac{4\pi}{3}=$

（A）$-\sqrt{3}$　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$

（C）1　　（D）$\sqrt{3}$

（4）已知 $\boldsymbol{a}=(3,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

（A）$\frac{\pi}{4}$　　（B）$\frac{\pi}{3}$

（C）$\frac{3\pi}{4}$　　（D）$\frac{5\pi}{6}$

(5) 函数 $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x+1$ 的最大值为

(A) 1　　(B) 2

(C) 3　　(D) 4

(6) 设 $a=\sin 35^\circ$, $b=\cos(-35^\circ)$, $c=\tan 55^\circ$, 则

(A) $a>b>c$　　(B) $b>a>c$

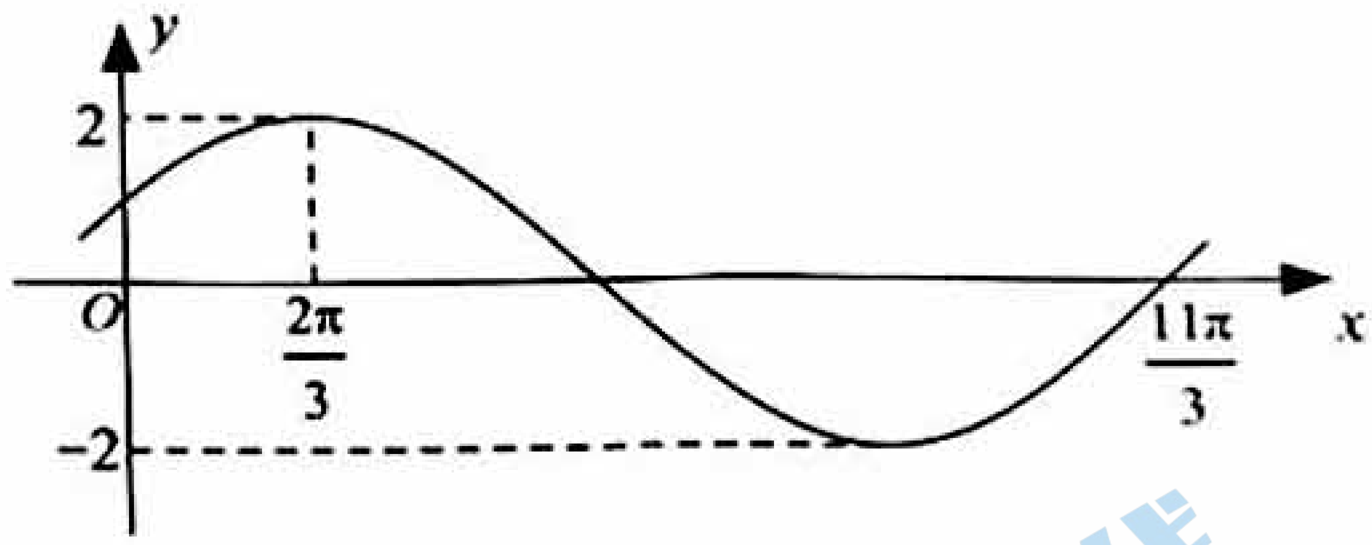
(C) $c>a>b$　　(D) $c>b>a$

(7) 为了得到函数 $y=\cos(2x+1)$ 的图象，只需把函数 $y=\cos 2x$ 图象上的所有点

(A) 向左平移1个单位　　(B) 向右平移1个单位

(C) 向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位　　(D) 向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位

(8) 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0$, $|\varphi|<\pi)$的部分图象如图所示，则



(A) $\omega=\frac{1}{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$　　(B) $\omega=\frac{1}{2}$, $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$

(C) $\omega=2$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$　　(D) $\omega=2$, $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$

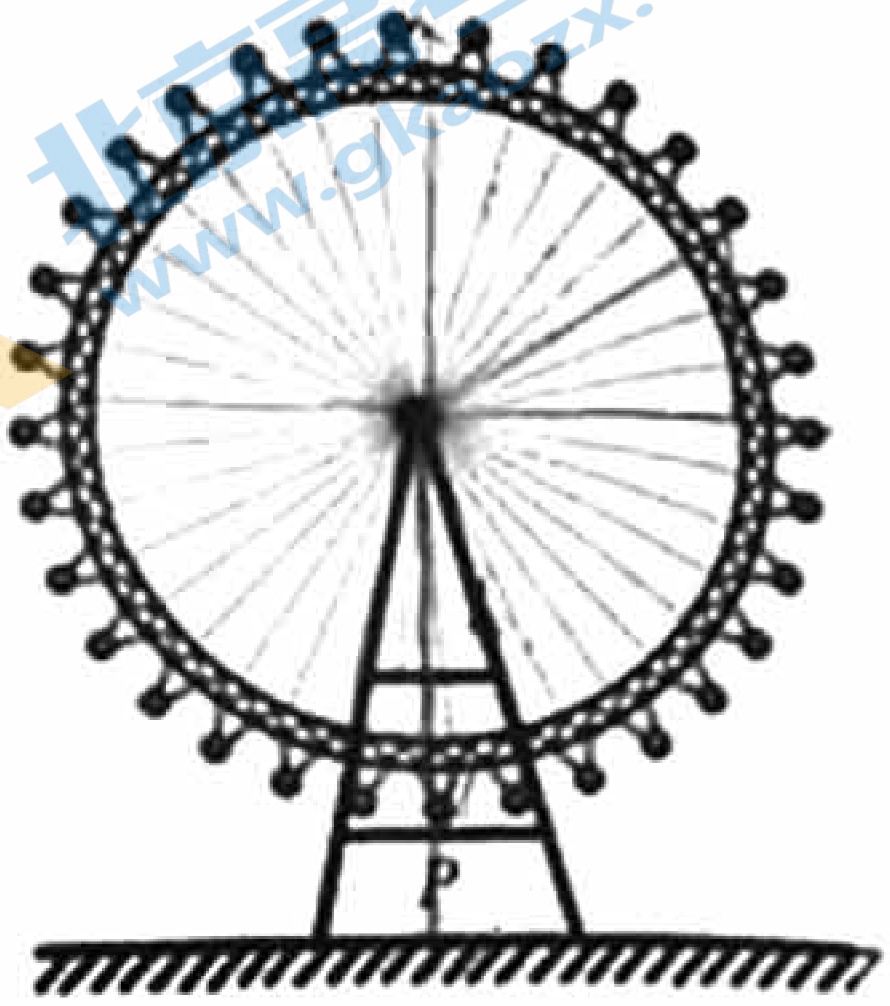
(9) 已知点 $A(x_1,y_1)$ 在函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{2})$ 的图象上，点 $B(x_2,y_2)$ 在函数

$y=4$ 的图象上，则 $|\overrightarrow{AB}|$ 的最小值为

(A) 1　　(B) 2

(C) 3　　(D) 4

（10）如图，摩天轮的半径为40米，摩天轮的中心O点距离地面的高度为45米，摩天轮匀速逆时针旋转，每30分钟转一圈，若摩天轮上点P的起始位置在最低点处，下面有关结论正确的是



（A）经过10分钟，点P距离地面的高度为45米

（B）第25分钟和第70分钟点P距离地面的高度相同

（C）从第10分钟至第20分钟，点P距离地面的高度一直在上升

（D）摩天轮旋转一圈，点P距离地面的高度不低于65米的时间为10分钟

第二部分（非选择题 共100分）

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

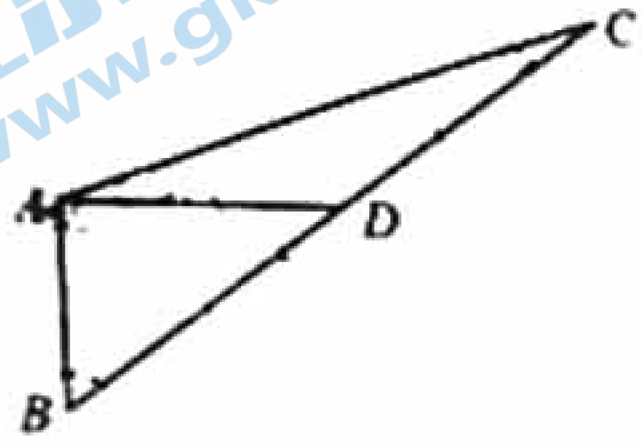
（11）已知某扇形的圆心角为$\frac{\pi}{6}$、弧长为$\frac{2\pi}{3}$，则该扇形的半径为________；面积为________.

（12）已知$\boldsymbol{a}=(3,-4)$，则与$\boldsymbol{a}$垂直的单位向量的坐标为________.

（13）已知$\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{3}$，则$\tan\alpha=$________.

（14）若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{8})$ 图象的一条对称轴方程为 $x=-\frac{5\pi}{16}$，则 ω 的一个取值为______.

（15）如图，在$\triangle ABC$中，$AD\perp AB$，$AD=2$，$BD=DC$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$的值为______.



（16）关于x的函数$f(x)=\cos(x+\varphi)$ $(\varphi>0)$有以下命题：

①存在φ，使得$f(x)$是偶函数；

②对任意的φ，$f(x)$都不是奇函数；

③对任意的φ，$f(x)$都是以2π为最小正周期的周期函数；

④若$f(x)\geqslant f(\frac{\pi}{3})$对任意的实数$x$都成立，则$\varphi$的最小值为$\frac{2\pi}{3}$.

其中正确结论的序号为______.

三、解答题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（17）（本小题 14 分）

已知平面向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$.

（Ⅰ）求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

（Ⅱ）求$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$.

(18)(本小题 15 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 和角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于 y 轴对称，且角 α 的终边与单位圆交于点 $P(-\frac{1}{3},m\ (m<0)$.

(Ⅰ)求 $\sin\alpha$ 的值；

(Ⅱ)求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

(19)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\cos 2x$.

(Ⅰ)求 $f(\frac{\pi}{2})$ 的值；

(Ⅱ)求 $f(x)$ 的最小正周期；

(Ⅲ)求函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

(20)(本小题 14 分)

已知函数 $f(x)=\tan x(\cos^2 x+\sin x\cos x)$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的定义域；

(Ⅱ)求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{3\pi}{8},0]$ 上的最小值.

（21）（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$ $(A>0，\omega>0)$ 只能满足下列三个条件中的两个：

①函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$；

②函数 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 2；

③函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $y=2\sin(x+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$ 的图象左右平移得到

（Ⅰ）请写出这两个条件的序号，并求出 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）计算 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2021)$ 的值；

（Ⅲ）已知 $t\in\mathbf{R}$，讨论 $f(x)$ 在 $[t,t+2]$ 上零点的个数.

房山区 2020-2021 学年度第二学期期中检测参考答案

高一年级数学学科

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	D	A	B	D	C	A	B	D

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分，有两空的第一空 3 分，第二空 2 分）

（11）4； $\dfrac{4\pi}{3}$

（12）$(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5})$ 或 $(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5})$；

（13）2

（14）2（答案不唯一）

（15）8

（16）①，③，④

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

（17）（本小题 14 分）

解：

（Ⅰ）由 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$， $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{3\pi}{4}$

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\times|\boldsymbol{b}|\times\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=2\sqrt{2}\times1\times\cos\dfrac{3\pi}{4}$

$=2\sqrt{2}\times1\times(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

$=-2$

（Ⅱ）$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2$

$=8+4\times(-2)+4=4$

所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$

（18）（本小题 15 分）

解：

（Ⅰ）因为角 α 的终边与单位圆交于点 $P(-\dfrac{1}{3},m)$ $(m<0)$，可知角 α 的终边在第三象限，且

$\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$，则

$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-(-\dfrac{1}{3})^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

（Ⅱ）因为角 α 和角 β 的终边关于 y 轴对称，所以 $\sin\beta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{3}$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{3})+(-\frac{2\sqrt{2}}{3})\times(-\frac{2\sqrt{2}}{3})=\frac{7}{9}$$

（19）（本小题 15 分）

解：

（Ⅰ）$f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\cos 2x$

$$=\sqrt{3}(\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3})-\cos 2x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x-\cos 2x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$$

$f(\frac{\pi}{2})=\sin(2\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）由 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\pi}=2$.

（Ⅲ）函数 $y=\sin x$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$

由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{2\pi}{3}+k\pi$，

函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$.

（20）（本小题 14 分）

解：

（Ⅰ）因为 $f(x)=\tan x(\cos^2 x+\sin x\cos x)$，所以 $x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$

因此 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

（Ⅱ）$f(x)=\tan x(\cos^2 x+\sin x\cos x)=\frac{\sin x}{\cos x}(\cos^2 x+\sin x\cos x)$

$$=\sin x\cos x+\sin^2 x$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$$

因为$-\frac{3\pi}{8}\le x\le 0$，所以$-\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le -\frac{\pi}{4}$.

当$2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$，即$x=-\frac{\pi}{8}$时，$f(x)$取得最小值，

所以$f(x)$在区间$[-\frac{3\pi}{8},0]$上的最小值为$f(-\frac{\pi}{8})=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$.

（21）（本小题12分）

解：

（Ⅰ）$f(x)=A\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$满足的条件为①②；

由①得$A=1$，由②得$\frac{T}{2}=2$，则$\omega=\frac{\pi}{2}$，由③得$A=2$，$\omega=1$，

因此满足的条件只能为①②，

$f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$

（Ⅱ）因为$\omega=\frac{\pi}{2}$，则$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，所以

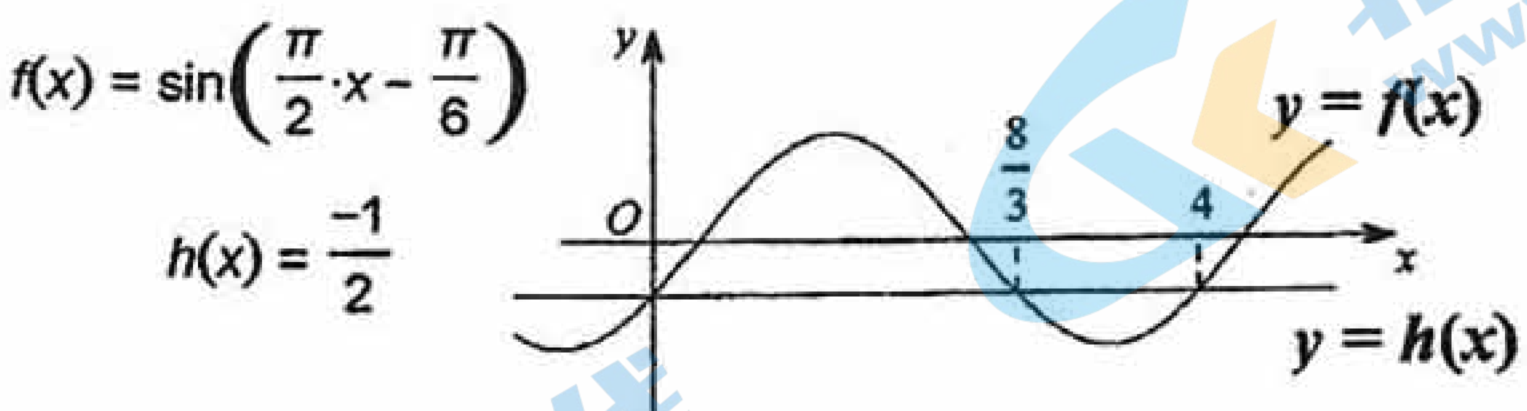
$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$$

$$=\cdots=f(2017)+f(2018)+f(2019)+f(2020)=2$$

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2021)=2\times 505+f(1)=1010+\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

（Ⅲ）$f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$在$[t,t+2]$上零点的个数等价于函数$y=\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6})$与$y=-\frac{1}{2}$图象的交点个数.

在同一直角坐标系内作出这两个数的图象：



当$4k<t<\frac{2}{3}+4k\ (k\in \mathbf{Z})$时，由图象可知，$y=\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6})$与$y=-\frac{1}{2}$两图象无交点，无零点，

当$\frac{2}{3}+4k\le t<2+4k$或$\frac{8}{3}+4k<t\le 4+4k$时，，$y=\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6})$与$y=-\frac{1}{2}$两图象1个交点，

当$2+4k\le t\le \frac{8}{3}+4k$时，$y=\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6})$与$y=-\frac{1}{2}$两图象2个交点，

2021 北京房山高一（下）期中数学

参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	D	A	B	D	C	A	B	D

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分，有两空的第一空 3 分，第二空 2 分）

（11）4； $\frac{4\pi}{3}$

（12）$(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ 或 $(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$；（写出一个即可）

（13）2

（14）2（答案不唯一）

（15）8

（16）①，③，④（少选得 3 分，错选不得分）

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

（17）（本小题 14 分）

解：

（I）由 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\times|\boldsymbol{b}|\times\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=2\sqrt{2}\times1\times\cos\frac{3\pi}{4}$ -------------------4 分

（有公式或有代入步骤均可）

$=2\sqrt{2}\times1\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$=-2$ -------------------2 分

（II）$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2$ -------------------4 分

$=8+4\times(-2)+4=4$ -------------------2 分

所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$ -------------------2 分

（18）（本小题 15 分）

解：

（I）因为角 α 的终边与单位圆交于点 $P(-\frac{1}{3},m)$ $(m<0)$，可知角 α 的终边在第三象限，

且 $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$，------------------3 分

则 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-(-\frac{1}{3})^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$．------------------3 分

（II）因为角 α 和角 β 的终边关于 y 轴对称，所以 $\sin\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos\beta=\frac{1}{3}$ ------------------4 分

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{3})+(-\frac{2\sqrt{2}}{3})\times(-\frac{2\sqrt{2}}{3})$ ------------------2 分

（有公式或有代入步骤均可）

$=\frac{7}{9}$ ------------------3 分

（19）（本小题 15 分）

解：

（I） $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\cos 2x$

$=\sqrt{3}(\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3})-\cos 2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x-\cos 2x$ ------------------2 分

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x$ ------------------1 分

$=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ ------------------2 分

$f(\frac{\pi}{2})=\sin(2\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$． ------------------2 分

（II）由 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$， $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$． ------------------3 分

（III）函数 $y=\sin x$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$

由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$， ------------------2 分

得 $\frac{\pi}{6}+k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3}+k\pi$， ------------------2 分

函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi](k\in \mathbf{Z})$． ------------------1 分

（20）（本小题 14 分）

解：

（I）因为 $f(x)=\tan x(\cos^2 x+\sin x\cos x)$，所以 $x\ne \frac{\pi}{2}+k\pi$， $k\in \mathbf{Z}$

因此 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\ne \frac{\pi}{2}+k\pi,k\in \mathbf{Z}\}$------------------3 分

（II） $f(x)=\tan x(\cos^2 x+\sin x\cos x)=\frac{\sin x}{\cos x}(\cos^2 x+\sin x\cos x)$

$=\sin x\cos x+\sin^2 x$ ------------------1 分

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$ ------------------2 分

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$ ------------------2 分

因为 $-\frac{3\pi}{8}\le x\le 0$，所以 $-\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le -\frac{\pi}{4}$． ------------------2 分

当 $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$，即 $x=-\frac{\pi}{8}$ 时， $f(x)$ 取得最小值，------------------2 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{3\pi}{8},0]$ 上的最小值为 $f(-\frac{\pi}{8})=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$． ------------------2 分

（21）（本小题 12 分）

解：

（I） $f(x)=A\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$ 满足的条件为①②；------------------1 分

由①得 $A=1$，由②得 $\frac{T}{2}=2$，则 $\omega=\frac{\pi}{2}$，由③得 $A=2$， $\omega=1$，

因此满足的条件只能为①②，------------------1 分

$f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$ ------------------1 分

（II）因为 $\omega=\frac{\pi}{2}$，则 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，------------------2 分

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$

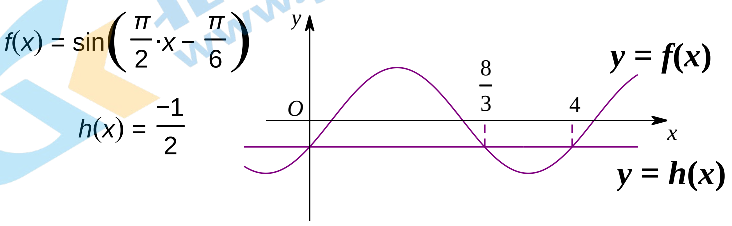
$=\cdots=f(2017)+f(2018)+f(2019)+f(2020)=2$

------------------2 分

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2021)=2\times 505+f(1)=1010+\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ------------------2 分

（III） $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$ 在 $[t,t+2]$ 上零点的个数等价于函数 $y=\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6})$ 与 $y=-\frac{1}{2}$ 图象的交点个数.

在同一直角坐标系内作出这两个数的图象：



当 $4k<t<\frac{2}{3}+4k\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，由图象可知， $y=\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6})$ 与 $y=-\frac{1}{2}$ 两图象无交点，无零点，------------------1 分

当 $\frac{2}{3}+4k\le t<2+4k$ 或 $\frac{8}{3}+4k<t\le 4+4k$ 时，， $y=\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6})$ 与 $y=-\frac{1}{2}$ 两图象 1 个交点，------------------1 分

当 $2+4k\le t\le\frac{8}{3}+4k$ 时， $y=\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6})$ 与 $y=-\frac{1}{2}$ 两图象 2 个交点，------------------1 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。