2022 北京二十中高二 12 月月考

数　　学

（时间：120 分钟　满分：150 分）

班级__________姓名__________

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知 i 是虚数单位，$z=1-2i$，复数 z 的共轭复数为（　　）

A. $1+2\mathrm{i}$　　B. $-1-2\mathrm{i}$

C. $-1+2\mathrm{i}$　　D. $1-2\mathrm{i}$

2. 已知圆 $C: x^2+y^2+ax=0$ 的圆心 C 的横坐标为 -1，则 a 等于（　　）

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

3. 已知双曲线的一个焦点为 $(5,0)$，一个顶点为 $(3,0)$，则双曲线方程的标准方程为（　　）

A. $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$　　B. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$

C. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$　　D. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

4. 已知直线 $l: y=x+m$ 和圆 $C: x^2+y^2=4$ 有两个不同的交点，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $(-2,2)$　　B. $[-2,2]$

C. $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$　　D. $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的右顶点和抛物线 $y^2=8x$ 的焦点重合，则 a 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. “$a=1$”是“直线 $ax+2y-6=0$ 与直线 $x+(a+1)y+(a^2-1)=0$ 互相平行且不重合”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 $F(c,0)$ 到一条渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$，则其离心率为（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

8. 已知直线 l 过抛物线 $y^2=8x$ 的焦点 F，与抛物线交于 A，B 两点，与其准线交于点 C. 若点 F 是 AC 的中点，则线段 BC 的长为

A. $\dfrac{8}{3}$　　B. 3　　C. $\dfrac{16}{3}$　　D. 6

9. 设椭圆的两个焦点分别为 F_1、F_2，过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P，若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形，则椭圆的离心率是（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$　　C. $2-\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}-1$

10. 已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<\sqrt{6})$ 的两个焦点分别为 F_1、F_2，短轴的两个端点分别为 B_1、B_2，点 P 在椭圆 G 上，且满足 $|PB_1|+|PB_2|=|PF_1|+|PF_2|$. 当 b 变化时，给出下列三个命题：

①点 P 的轨迹关于 y 轴对称；

②存在 b 使得椭圆 G 上满足条件的点 P 仅有两个；

③ $|OP|$ 的最小值为 2.

其中，所有正确命题的序号是（　　）

A ①　　B. ①②　　C. ①③　　D. ②③

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

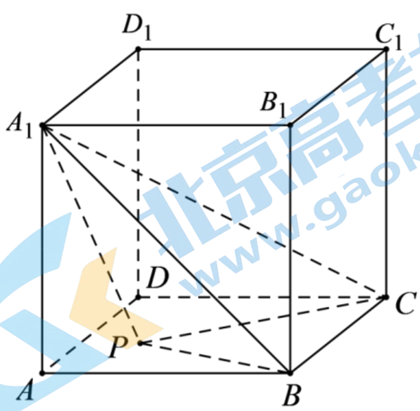
11. 椭圆 $x^2+4y^2=4$ 的长轴长为__________.

12. 已知 i 是虚数单位，复数 z 满足 $z\cdot\mathrm{i}=3-\mathrm{i}$，则 z　虚部为__________，$|z|=$__________.

13. 双曲线 $y^2-\dfrac{x^2}{4}=1$ 的渐近线方程为等于____________.

14. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左顶点为 A，上顶点为 B，且 $|OA|=\sqrt{3}|OB|$（O 为坐标原点），则该椭圆的离心率为__________.

15. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 P 在正方形 $ABCD$ 的边界及其内部运动，平面区域 W 由所有满足 $A_1P\leqslant\sqrt{5}$ 的点 P 组成，则 W 的面积是__________，四面体 $P-A_1BC$ 的体积的最大值是__________.



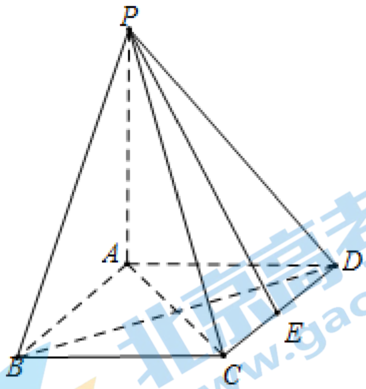
三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出相应文字说明，证明过程或演算步骤．

16. 已知圆 $C: x^2+y^2-2x-4y+1=0$．

（1）求圆 C　圆心坐标和半径；

（2）直线 $l: y=x-1$ 交圆 C 于 A、B 两点，求 $|AB|$　值．

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为菱形，E 为 CD 的中点．



（1）求证：$BD\perp$ 平面 PAC；

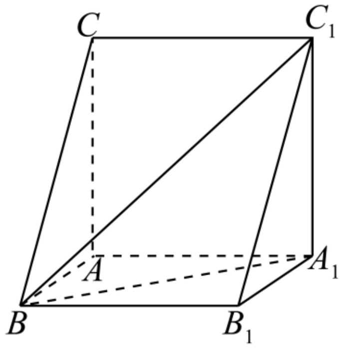
（2）若点 F 是棱 AB 的中点，求证：CF // 平面 PAE．

18. 半径为 3 的圆 C 过点 $A(1,-1)$，圆心 C 在直线 $y=2x$ 上且圆心在第一象限．

（1）求圆 C 的方程；

（2）过点 $(4,3)$ 作圆 C 的切线，求切线的方程．

19. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 AA_1C_1C 是边长为 4　正方形，$AB=3$．再从条件①、条件②、条件③中选择两个能解决下面问题的条件作为已知，并作答．



（1）求证：$AB\perp$ 平面 AA_1C_1C；

（2）求直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值．

条件①：$BC=5$；条件②：$AB\perp AA_1$；条件③：平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1C_1C．

20. 已知椭圆 $G:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 $2\sqrt{2}$，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，过点 $M(-2,0)$ 的直线 l 与椭圆 G

交于不同的两点 A, B .

（1）求椭圆 G 的方程；

（2）若点 B 关于 x 轴的对称点为 B'，求线段 AB' 长度的取值范围.

21. 设 A 是正整数集的一个非空子集，如果对于任意 $x \in A$，都有 $x-1 \in A$ 或 $x+1 \in A$，则称 A 为自邻集.记集合 $A_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ $(n \geq 2, n \in N)$ 的所有子集中的自邻集的个数为 a_n .

（1）直接写出 A_4 的所有自邻集；

（2）若 n 为偶数且 $n \geq 6$，求证：A_n 的所有含 5 个元素的子集中，自邻集的个数是偶数；

（3）若 $n \geq 4$，求证：$a_n \leq 2a_{n-1}$.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 【答案】A

【解析】

【分析】根据共轭复数的定义求解.

【详解】由共轭复数的定义知： $z=1-2\mathrm{i}$ 的共轭复数为： $\bar{z}=1+2\mathrm{i}$ ；

故选：A.

2. 【答案】B

【解析】

【分析】由圆的一般方程得圆心坐标,从而得参数 a 值.

【详解】圆 $C:x^2+y^2+ax=0$ 的标准方程为 $(x+\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$， $a\neq 0$，圆心为 $C(-\frac{a}{2},0)$，

$\therefore -\frac{a}{2}=-1$， $a=2$.

故选：B.

3. 【答案】D

【解析】

【分析】根据双曲线中 a,b,c 的关系求解.

【详解】由题可知，双曲线的焦点在 x 轴上，所以可设方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

且 $c=5,a=3$，所以 $b^2=c^2-a^2=16$，

所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，

故选:D.

4. 【答案】C

【解析】

【分析】根据直线与圆的位置关系可得 $\frac{|m|}{\sqrt{2}}<2$，即得.

【详解】因为圆 $C:x^2+y^2=4$ 的圆心为 $(0,0)$，半径为 2，

又直线 $l:y=x+m$ 和圆 $C:x^2+y^2=4$ 有两个不同的交点，

所以 $\frac{|m|}{\sqrt{2}}<2$，

解得 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$，

即实数 m 的取值范围是 $\left(-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$.

故选：C.

5. 【答案】B

【解析】

【分析】求出抛物线的焦点坐标，再根据题意可求出 a 的值.

【详解】抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 $(2,0)$，

因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的右顶点和抛物线 $y^2=8x$ 的焦点重合，

所以 $a=2$，

故选：B

6. 【答案】C

【解析】

【分析】利用直线与直线平行化简求出 a，再由范围大小判断充分与必要条件.

【详解】若直线 $ax+2y-6=0$ 与直线 $x+\left(a+1\right)y+\left(a^2-1\right)=0$ 互相平行且不重合，则

$a\left(a+1\right)=1\times2$，解得 $a=1$ 或 -2，经检验，$a=1$ 时，符合题意，$a=-2$ 时，两直线重合，故 $a=1$，所以"$a=1$"是"$a=1$"的充要条件.

故选：C

7. 【答案】A

【解析】

【分析】利用双曲线的简单性质，以及点到直线的距离列出方程，转化求解即可.

【详解】双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点 $F\left(c,0\right)$ 到一条渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$

可得：$\dfrac{\frac{bc}{a}}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}=b=\frac{\sqrt{3}}{2}c$ 可得 $c^2-a^2=\frac{3}{4}c^2$，即 $c=2a$

所以双曲线的离心率为：$e=\frac{c}{a}=2$.

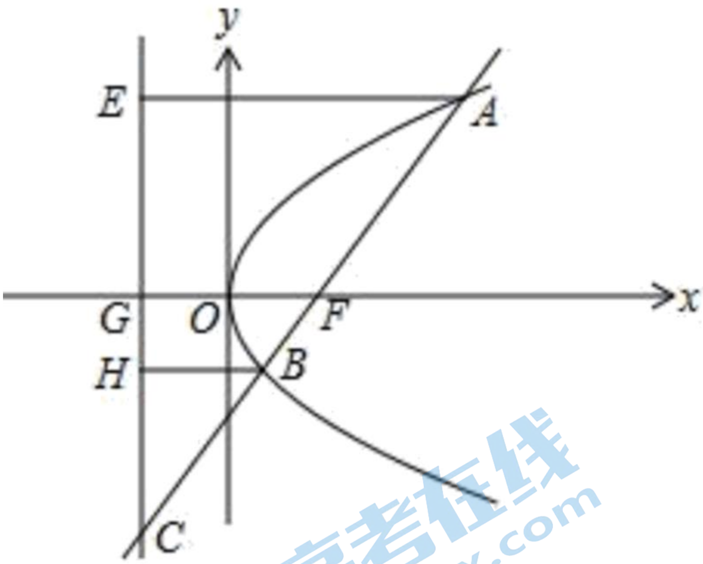
故选：A.

8. 【答案】C

【解析】

【分析】由题意结合抛物线的定义和性质首先求得直线 AB 的方程，然后联立直线方程与抛物线方程可得点 B 的坐标，进一步整理计算即可求得最终结果.

【详解】如图，A 在准线上的射影为 E，B 在准线上的射影为 H，



由抛物线 $y^2=8x$，得焦点 F（2，0），

∵点 F 是的 AC 中点，∴$AE=2p=8$，则 $AF=8$，

∴A 点横坐标为 6，代入抛物线方程，可得 $A\left(6,4\sqrt{3}\right)$.

$\therefore k_{AF}=\dfrac{4\sqrt{3}}{6-2}=\sqrt{3}$，则 AF 所在直线方程为 $y=\sqrt{3}\left(x-2\right)$.

联立方程：$\begin{cases} y=\sqrt{3}\left(x-2\right) \\ y^2=8x \end{cases}$ 可得：$3x^2-20x+12=0$，

$\therefore 6x_B=4, x_B=\dfrac{2}{3}$，则 $BF=BH=\dfrac{2}{3}+2=\dfrac{8}{3}$.

故 $BC=CF-BF=AF-BF=8-\dfrac{8}{3}=\dfrac{16}{3}$

故选 C.

【点睛】本题主要考查抛物线的标准方程，抛物线的几何性质及其应用等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

9. 【答案】D

【解析】

【分析】

解法一：根据方程，令 $x=c$，求得 P 的纵坐标，利用 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形可得 a,b,c 的方程，消去 b 后可得 $a^2-2ac-c^2=0$，从而可得离心率的方程，其解即为所求的离心率，注意取舍.

解法二：不妨设椭圆的焦距为 1，利用等腰直角三角形的性质得到 $\triangle F_1PF_2$ 另外两边的长度，根据椭圆的定义求得长轴 $2a$ 的值，进而得到离心率.

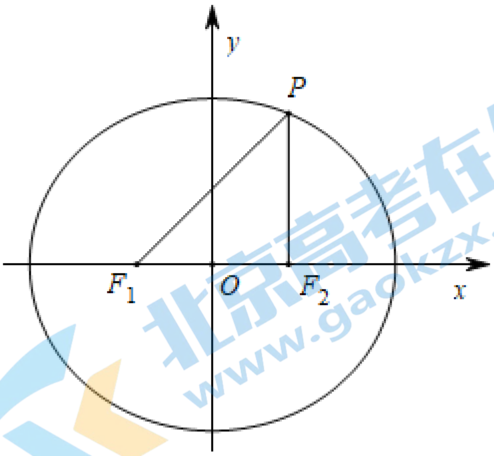
【详解】解法一：不妨设椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，

半焦距为c，左右焦点为F_1,F_2，P在第一象限，则$F_2\left(c,0\right)$.

在椭圆方程中，令$x=c$，则$\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，解得$y_P=\dfrac{b^2}{a}$，故$P\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right)$.

$\triangle F_1PF_2$为直角三角形且$\angle F_1F_2P=\dfrac{\pi}{2}$，故$\dfrac{b^2}{a}=2c$即$a^2-2ac-c^2=0$，

故$e^2+2e-1=0$，解得$e=-1+\sqrt{2}$（负值舍去）



解法二：如图，不妨设$2c=\left|F_1F_2\right|=1$,则$\left|PF_2\right|=1,\left|PF_1\right|=\sqrt{2}$,

于是$2a=\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=\sqrt{2}+1$,

$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$,

故选：D.

【点睛】圆锥曲线中　离心率的计算，关键是利用题设条件构建关于a,b,c的一个等式关系；而利用定义方法求离心率常常能起到快速解答的作用.

10. 【答案】C

【解析】

【分析】由题可知$\left|PB_1\right|+\left|PB_2\right|=2\sqrt{6}$，所以点$P$同时也在以$B_1$、$B_2$为焦点，长轴长为$2\sqrt{6}$的椭圆上，其椭圆方程为：$C:\dfrac{y^2}{6}+\dfrac{x^2}{6-b^2}=1(0<b<\sqrt{6})$，而点$P$则是两椭圆交点，根据椭圆的几何性质即可对选项进行判断.

【详解】由题可知$\left|PB_1\right|+\left|PB_2\right|=\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=2\sqrt{6}$，所以点$P$同时也在以$B_1$、$B_2$为焦点，长轴长为$2\sqrt{6}$的椭圆上，其椭圆方程为：$C:\dfrac{y^2}{6}+\dfrac{x^2}{6-b^2}=1(0<b<\sqrt{6})$

对于①，将x换为$-x$方程不变，则点P的轨迹关于y轴对称，故①正确；

对于②，由椭圆方程可知椭圆G的长轴顶点$\left(\pm\sqrt{6},0\right)$，短轴长度小于$2\sqrt{6}$，椭圆$C$的长轴顶点

$\left(0,\pm\sqrt{6}\right)$，短轴长度小于 $2\sqrt{6}$，所以椭圆 G 与椭圆 C 有 4 个交点，对应的点 P 有 4 个，故②错误；

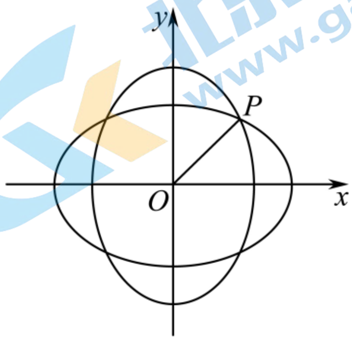
对于③，代数法：联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ \dfrac{y^2}{6}+\dfrac{x^2}{6-b^2}=1\end{cases}$，即 $\begin{cases}b^2x^2+6y^2=6b^2\\ 6x^2+\left(6-b^2\right)y^2=6\left(6-b^2\right)\end{cases}$，即

$\begin{cases}\dfrac{b^2\cdot b^2}{6-b^2}x^2+\dfrac{6b^2}{6-b^2}y^2=\dfrac{b^2}{6-b^2}\cdot 6b^2\\ 6x^2+\left(6-b^2\right)y^2=6\left(6-b^2\right)\end{cases}$，两式相加可得 $\dfrac{b^4-6b^2+36}{6-b^2}\left(x^2+y^2\right)=\dfrac{6b^4}{6-b^2}+6\left(6-b^2\right)$，则

$x^2+y^2=\dfrac{12b^4-72b^2+216}{b^4-6b^2+36}=\dfrac{12\left(b^4-6b^2+36\right)-216}{b^4-6b^2+36}=12-\dfrac{216}{b^4-6b^2+36}$，当 $b^2=3$ 时，x^2+y^2 的最小值为

4，即当 $|OP|$ 的最小值为 2；

几何法：如图所示



因为椭圆 G 与椭圆 C 长轴确定，所以当点 P 靠近坐标轴时（$b\to 0$ 或 $b\to\sqrt{6}$），即其中一个椭圆更接近圆时，此时 $|OP|$ 会越接近 $\sqrt{6}$，$|OP|$ 会越大；反之点 P 远离坐标轴时，即两个椭圆离心率逐渐接近时，$|OP|$ 越小，所以当 $b^2=6-b^2$，即 $b^2=3$ 时 $|OP|$ 最小

此时 $G:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$C:\dfrac{y^2}{6}+\dfrac{x^2}{3}=1$，两式相加得 $\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{x^2}{2}=2\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=2$，即 $|OP|$ 的最小值为 2，故③正确.

故选：C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】4

【解析】

【分析】根据椭圆方程转化为标准方程确定 $a^2=4$，即可得长轴长.

【详解】解：椭圆 $x^2+4y^2=4$，化为标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，则 $a^2=4$，即 $a=2$

所以椭圆的长轴长为 $2a=4$.

故答案为：4.

12. 【答案】　①. -3　②. $\sqrt{10}$

【解析】

【分析】根据复数的除法法则计算 z，然后根据复数的概念及复数模的计算公式即得.

【详解】因为 $z\cdot \mathrm{i}=3-\mathrm{i}$，

所以 $z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-1-3\mathrm{i}$

所以 z 的虚部为 -3，$|z|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$.

故答案为：-3；$\sqrt{10}$.

13. 【答案】$y=\pm\dfrac{1}{2}x$

【解析】

【分析】

根据双曲线的方程，求得 a,b 的值，进而求得双曲线的渐近线的方程.

【详解】由题意，双曲线 $y^2-\dfrac{x^2}{4}=1$ 的焦点在 y 上，且 $a=1,b=2$，

所以双曲线的渐近线的方程为 $y=\pm\dfrac{a}{b}x=\pm\dfrac{1}{2}x$.

故答案为：$y=\pm\dfrac{1}{2}x$.

14. 【答案】$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】

【分析】由椭圆的性质得出 a,c，进而得出离心率.

【详解】因为 $|OA|=\sqrt{3}|OB|$，所以 $a=\sqrt{3}b$，$c=\sqrt{3b^2-b^2}=\sqrt{2}b$，所以离心率为 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}b}{\sqrt{3}b}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

15. 【答案】　①. $\dfrac{\pi}{4}$　②. $\dfrac{4}{3}$

【解析】

【详解】由题意可知，满足 $A_1P\le\sqrt{5}$ 的点 P 是以 A_1 为球心，$\sqrt{5}$ 为半径的球及其内部的点，

又因为点 P 在正方形 $ABCD$ 的边界及其内部运动，

所以平面区域 W 是以 A 为圆心，1 为半径的圆的 $\dfrac{1}{4}$，所以可知 W 的面积是 $\dfrac{\pi}{4}$；

设点 A_1 到平面 PBC 的距离为 $h=2$，

所以四面体 $P-A_1BC$ 的体积为 $\frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{\triangle PBC}=\frac{2}{3}\cdot S_{\triangle PBC}$，

所以当点 P 是 AD 的中点时，$S_{\triangle PBC}$ 取得最大值为 2，四面体 $P-A_1BC$ 的体积最大值是 $\frac{4}{3}$.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出相应文字说明，证明过程或演算步骤．

16. 【答案】（1）圆心坐标 $C(1,2)$，半径 $r=2$

（2）$2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）首先将圆的一般方程配方整理成标准方程，根据圆的标准方程即可求得圆心坐标及半径；

（2）首先求解圆心到直线 l 的距离 d，然后直接根据圆的弦长公式进行求解即可.

【小问 1 详解】

已知圆 $C: x^2+y^2-2x-4y+1=0$，

配方整理得：C：$(x-1)^2+(y-2)^2=4$，

故得圆 C 的圆心为 $C(1,2)$，半径 $r=2$.

【小问 2 详解】

由（1）可知圆 C 的圆心坐标为 $C(1,2)$，半径 $r=2$，

则圆心到直线的距离 $d=\frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，

则 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$.

17. 【答案】（1）答案见解析

（2）答案见解析

【解析】

【分析】由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，且底面 $ABCD$ 为菱形，即可得到 $BD\perp$ 平面 PAC 内的两条相交直线，则可证得 $BD\perp$ 平面 PAC.

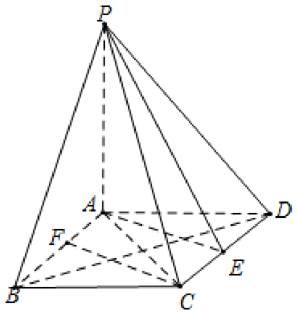
(2) 由 E,F 分别为中点，可得到 $CF//AE$，则问题即可得以证明.

【小问 1 详解】

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BD$，又因为底面 $ABCD$ 是菱形，则 $BD\perp AC$，$PA\cap AC=A$，$PA,AC\subset$ 平面 PAC，所以 $BD\perp$ 平面 PAC.

【小问 2 详解】

连接 CF，AE 如图所示：



因为E,F分别为CD,AB的中点，则$AF//CE$且$AF=CE$，所以四边形$AFCE$为平行四边形，所以$AE//CF$，$AE\subset$平面PAE，$CF\not\subset$平面PAE，所以$CF//$平面PAE.

18. 【答案】（1）$(x-1)^2+(y-2)^2=9$

（2）$x-4=0$或$4x+3y-25=0$

【解析】

【分析】（1）通过圆心在直线上，且在第一象限设出圆心的坐标，再利用圆上的点到圆心的距离等于半径求出圆心，进而可得圆的方程.

（2）先判断出点在圆外，再通过切线斜率存在与不存在两种情况借助圆心到切线的距离等于半径求切线方程.

【小问1详解】

设圆心为$C(a,2a)(a>0)$，则$r=|CA|=\sqrt{(a-1)^2+(2a+1)^2}=\sqrt{5a^2+2a+2}=3$，

解得$a=1$，则圆C的方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

故答案为：$(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

【小问2详解】

点$(4,3)$在圆外，

①切线斜率不存在时，切线方程为$x=4$，圆心到直线的距离为$d=4-1=3=r$，满足条件.

②切线斜率存在时，设切线$l:y-3=k(x-4)$，即$kx-y-4k+3=0$，

则圆心到切线的距离$d=\dfrac{|k-2-4k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得$k=-\dfrac{4}{3}$，

则切线的方程为：$4x+3y-25=0$.

故答案为：$x-4=0$或$4x+3y-25=0$.

19. 【答案】条件选择见解析；（1）证明见解析；（2）$\dfrac{12}{25}$.

【解析】

【分析】选择①②：（1）根据勾股定理可得$AB\perp AC$，再由$AB\perp AA_1$，利用线面垂直的判定定理可得

$AB \perp$ 平面 AA_1C_1C；选择①③：（1）根据勾股定理可得 $AB \perp AC$，再由面面垂直的性质定理可得 $AB \perp$ 平面 AA_1C_1C.

（2）以 A 为原点建立空间直角坐标系 $A-xyz$，求出平面 A_1BC_1 的一个法向量，根据 $\sin\theta = |\cos<\overrightarrow{BC},\vec{n}>|$

【详解】解：选择①②：

（1）因为 $AC=4$， $AB=3$， $BC=5$，

所以 $AB \perp AC$.

又因为 $AB \perp AA_1$， $AC \cap AA_1 = A$，

所以 $AB \perp$ 平面 AA_1C_1C.

选择①③：（1）因为 $AC=4$， $AB=3$， $BC=5$，

所以 $AB \perp AC$.

又因为平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C，

平面 $ABC \cap$ 平面 $AA_1C_1C = AC$，

所以 $AB \perp$ 平面 AA_1C_1C.

（2）由（1）知 $AB \perp AC$， $AB \perp AA_1$.

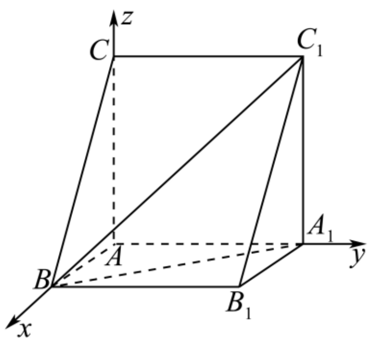
因为四边形 AA_1C_1C 是正方形，所以 $AC \perp AA_1$.

如图，以 A 为原点建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$， $B(3,0,0)$， $C(0,0,4)$，

$A_1(0,4,0)$， $C_1(0,4,4)$，

$\overrightarrow{A_1B}=(3,-4,0)$， $\overrightarrow{A_1C_1}=(0,0,4)$， $\overrightarrow{BC}=(-3,0,4)$.



设平面 A_1BC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0, \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 3x-4y=0, \\ 4z=0. \end{cases}$

令 $y=3$， 则 $x=4$， $z=0$， 所以 $\vec{n}=(4,3,0)$.

设直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{BC},\vec{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BC}||\vec{n}|}=\dfrac{12}{25}$.

所以直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{12}{25}$.

【点睛】思路点睛：

解决二面角相关问题通常用向量法，具体步骤为：

（1）建坐标系，建立坐标系　原则是尽可能的使得已知点在坐标轴上或在坐标平面内；

（2）根据题意写出点的坐标以及向量的坐标，注意坐标不能出错.

（3）利用数量积验证垂直或求平面的法向量.

（4）利用法向量求距离、线面角或二面角.

20. 【答案】（1）$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；

（2）$|AB'|\in(\sqrt{2},2\sqrt{2}]$.

【解析】

【分析】（1）由题意得 $2a=2\sqrt{2},\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，再结合 $b^2=a^2-c^2$ 可求出 b，从而可求出椭圆的方程；

（2）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，设直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$，将直线方程代入椭圆方程化简，由 $\Delta>0$ 可得 $k^2<\dfrac{1}{2}$，再利用根与系数的关系，表示出 $|AB'|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$ 结合前面的式子化简，再由 $0\le k^2<\dfrac{1}{2}$ 可求出其范围.

【小问 1 详解】

由题意得 $2a=2\sqrt{2},\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得 $a=\sqrt{2},c=1$，

所以 $b^2=a^2-c^2=2-1=1$，

所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；

【小问 2 详解】

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

显然直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$，

由 $\begin{cases}y=k(x+2)\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得 $(2k^2+1)x^2+8k^2x+8k^2-2=0$，

由 $\Delta=64k^4-4(2k^2+1)(8k^2-2)>0$，得 $1-2k^2>0$，得 $k^2<\dfrac{1}{2}$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{2k^2+1},x_1x_2=\dfrac{8k^2-2}{2k^2+1}$，

因为 $B'(x_2,-y_2)$，

所以 $|AB'|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$，

因为 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(\dfrac{-8k^2}{2k^2+1}\right)^2-4\cdot\dfrac{8k^2-2}{2k^2+1}=\dfrac{8-16k^2}{(2k^2+1)^2}$，

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+4k=k\cdot\dfrac{-8k^2}{2k^2+1}+4k=\dfrac{4k}{2k^2+1}$，

所以 $|AB'|=\sqrt{\dfrac{8-16k^2}{(2k^2+1)^2}+\dfrac{16k^2}{(2k^2+1)^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2k^2+1}$，

因为 $0\le k^2<\dfrac{1}{2}$，所以 $1\le 2k^2+1<2$，

所以 $|AB'|\in(\sqrt{2},2\sqrt{2}]$

21. 【答案】（1）$\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,3\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{3,4\}$；（2）证明见解析；（3）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）每个自邻集中至少有两个元素，然后按相邻元素规则确定；

（2）利用配对原则证明，对于集合 A_n 的含有 5 个元素的自邻集 $B=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，

不妨设，构造集合 $C=\{n+1-x_5,n+1-x_4,n+1-x_3,n+1-x_2,n+1-x_1\}$，它们是不相等的集合，也是 5 个元素的自邻集，这样可得证结论；

（3）记自邻集中最大元素为 k　自邻集的个数为 b_k，$k=2,3,4,\cdots,n$.

当 $n\ge4$ 时，$a_{n-1}=b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}$，$a_n=b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n$，得 $a_n=a_{n-1}+b_n$.

下面只要证明 $b_n\le a_{n-1}$ 即可，对自邻集进行分类确定自邻集的个数：①含有 $n-2,n-1,n$ 这三个元素，②含有 $n,n-1$ 两个元素，不含有 $n-2$ 这个元素，且不只有 $n-1$，n 两个元素.③只含有 $n,n-1$ 这两个元素，可得 b_n 与 a_{n-1} 的关系，完成证明.

【详解】解：（1）. A_4 的子集中的自邻集有：

$\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,3\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{3,4\}$.

（2）.对于集合 A_n 的含有 5 个元素的自邻集 $B=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，

不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$.

因为对于任意 $x_i\in B$，都有 $x_i-1\in B$ 或 $x_i+1\in B$，$i=1,2,3,4,5$.

所以 $x_2=x_1+1$，$x_4=x_5-1$，$x_3=x_2+1$ 或 $x_3=x_4-1$.

对于集合 $C=\{n+1-x_5,n+1-x_4,n+1-x_3,n+1-x_2,n+1-x_1\}$，

因为$1\leqslant x_1<x_2<x_3<x_4<x_5\leqslant n$，所以$1\leqslant n+1-x_i\leqslant n$，$i=1,2,3,4,5$.

且$n+1-x_5<n+1-x_4<n+1-x_3<n+1-x_2<n+1-x_1$.

所以$C\subseteq A_n$.

因为$x_1+1=x_2$，$x_5-1=x_4$，$x_3=x_2+1$或$x_3=x_4-1$.

所以$n+1-x_2=(n+1-x_1)-1$，$n+1-x_4=(n+1-x_5)+1$，

$n+1-x_3=(n+1-x_4)+1$或$n+1-x_3=(n+1-x_2)-1$.

所以，对于任意$n+1-x_i\in C$，都有

$(n+1-x_i)+1\in C$或$(n+1-x_i)-1\in C$，$i=1,2,3,4,5$.

所以集合C也是自邻集.

因为当n为偶数时，$x_3\neq n+1-x_3$，

所以$B\neq C$.

所以，对于集合A_n任意一个含有5个元素的自邻集，在上述对应方法下会存在一个不同的含有5个元素的自邻集与其对应.

所以，A_n的含有5个元素的自邻集的个数为偶数.

（3）记自邻集中最大元素为k的自邻集的个数为b_k，$k=2,3,4,\cdots,n$.

当$n\geq 4$时，$a_{n-1}=b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}$，$a_n=b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n$.

显然$a_n=a_{n-1}+b_n$.

下面证明$b_n\leqslant a_{n-1}$.

①自邻集中含$n-2$，$n-1$，n这三个元素.

记去掉这个自邻集中的元素n后的集合为D，因为$n-2,n-1\in D$，所以D仍然是自邻集，且集合D中的最大元素是$n-1$，所以含$n-2,n-1,n$这三个元素的自邻集的个数为b_{n-1}.

②自邻集中含有$n-1$，n这两个元素，不含$n-2$，且不只有$n-1$，n两个元素.

记自邻集中除n，$n-1$之外的最大元素为m，则$2\leqslant m\leqslant n-3$.

每个自邻集去掉$n-1$，n这两个元素后，仍然为自邻集，

此时的自邻集的最大元素为m，可将此时的自邻集分为$n-4$类：

含最大数为2的集合个数为b_2.

含最大数为3的集合个数为b_3.

……

含最大数为$n-3$的集合个数为b_{n-3}.

则这样的集合共有$b_2+b_3+\cdots+b_{n-3}$个.

③自邻集只含 $n-1$，n 两个元素，这样的自邻集只有 1 个.

综上可得 $b_n=b_2+b_3+\cdots+b_{n-3}+b_{n-1}+1$

$\leqslant b_2+b_3+\cdots+b_{n-3}+b_{n-1}+b_{n-2}$

$=a_{n-1}$.

所以 $b_n\leqslant a_{n-1}$，

所以当 $n\geq 4$ 时，$a_n\leq 2a_{n-1}$.

【点睛】关键点点睛：本题考查集合的新定义，解题关键是理解新定义，并能利用新定义求解．特别是对新定义自邻集的个数的记数：记自邻集中最大元素为 k 的自邻集的个数为 b_k，$k=2,3,4,\cdots,n$.然后求得 a_n 与 b_n 的关系.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。