高二第一学期期末试卷

数学

（清华附中高 21 级）　　2023.1.

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid -1<x<2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{0,1\}$　　B．$\{-1,0,1\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{-1,0,1,2\}$

2．在复平面内，复数 $\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程为（　　）

A．$y=\pm\dfrac{3}{4}x$　　B．$y=\pm\dfrac{4}{3}x$　　C．$y=\pm\dfrac{3}{5}x$　　D．$y=\pm\dfrac{9}{16}x$

4．设函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$，则 $f(x)$ 是（　　）

A．奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增　　B．奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

C．偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增　　D．偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

5．已知 α,β 是两个不同的平面，直线 $l\subset\alpha$，那么“$\alpha\parallel\beta$”是“$l\parallel\beta$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 2^x-a, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,0)$　　B．$(0,+\infty)$　　C．$(-\infty,1]$　　D．$[1,+\infty)$

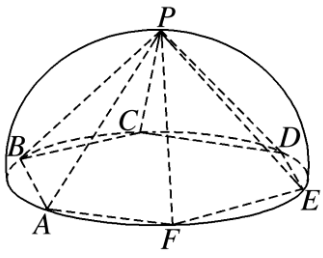
7．点 P 在抛物线 $y^2=4x$ 上，则 P 到直线 $x=-1$ 的距离与到直线 $3x-4y+12=0$ 的距离之和的最小值为（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

8．如图，半径为 1 的半球内有一内接正六棱锥 $P-ABCDEF$，则异面直线 PB 与 AF 所成的角为（　　）

A．$\dfrac{5\pi}{12}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$

C．$\dfrac{\pi}{4}$　　D．$\dfrac{\pi}{2}$

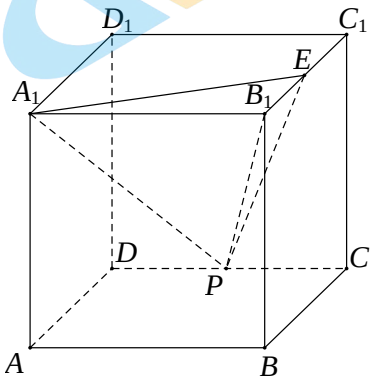


关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析

9. 已知直线l： $y=mx-m-1$， P 为圆C： $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 上一动点，设 P 到直线 l 距离的最大值为$d(m)$，当$d(m)$最大时， m 的值为（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 2

10. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 B_1C_1 的中点. 动点 P 沿着棱 DC 从点 D 向点 C 移动，对于下列四个结论：



①存在点 P，使得 $PA_1=PE$；

②存在点 P，使得 $BD_1\perp$ 平面 PA_1E；

③ΔPA_1E 的面积越来越小；

④四面体 A_1PB_1E 的体积不变.

其中，所有正确的结论的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 函数 $y=\frac{\sqrt{x+1}}{e^x-1}$ 的定义域是_____.

12. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$， C 的焦点到其渐近线的距离为 5，则 $a=$_____.

13. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2=4$，且 $|\overrightarrow{AP}|=1$，则 $|\overrightarrow{AB}|=$_____；$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的最大值为_____.

14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，其前 n 项和为 S_n，前 n 项乘积为 T_n， $T_2=T_7$，$a_6+a_7=6$，则公比 $q=$_____；满足 $S_n>T_n$ 的正整数 n 的最大值为_____.

15. 已知点 $P(2,0)$ 和圆 $O:x^2+y^2=36$ 上两个不同的点 M， N，满足 $\angle MPN=90°$， Q 是弦 MN 的中点，给出下列四个结论：

①$|MP|$ 的最小值是 4；

②点 Q 的轨迹是一个圆；

③若点 $A(5,3)$，点 $B(5,5)$，则存在点 Q，使得 $\angle AQB=90°$；

④$\triangle MPN$ 面积的最大值是 $18+2\sqrt{17}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）已知函数 $f(x)=4\sin x\cos(x-\frac{\pi}{3})+m$ 的最大值与最小值之和为 0.

（Ⅰ）求 m 的值以及 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上是增函数，求实数 a 的最大值.

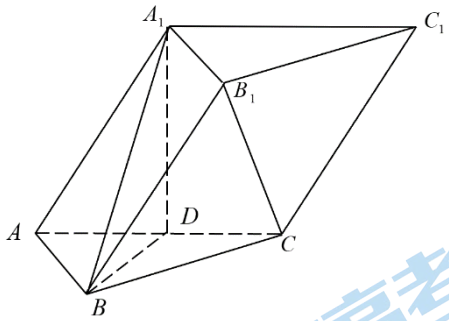
17.（本小题 14 分）在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，现有下列四个条件：

$$①\sqrt{3}\left(a^2+c^2-b^2\right)=-2ac；\quad ②\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}；\quad ③a=\sqrt{3}；\quad ④b=2.$$

（Ⅰ）条件①和条件②可以同时成立吗？请说明理由；

（Ⅱ）请从上述四个条件中选择三个条件作为已知，使得 ΔABC 存在且唯一，并求 ΔABC 的面积.

18.（本小题 14 分）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $AA_1C_1C\perp$ 底面 ABC，D 为 AC 中点，$AC=AA_1=2$，$AB=BC=\sqrt{6}$.



（Ⅰ）求证：$B_1C//$平面 A_1BD；

（Ⅱ）求证：平面 $BDA_1\perp$ 平面 AA_1C_1C；

（Ⅲ）若 $B_1C=2\sqrt{2}$，求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积.

19.（本小题 14 分）已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=x-1$ 的公共点个数，并说明理由；

（Ⅲ）若对于任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)<ax+2$ 恒成立，直接写出实数 a 的取值范围.

20.（本小题 14 分）已知椭圆 $W:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，短轴长为 2.

（Ⅰ）求椭圆 W 的标准方程；

（Ⅱ）设 A 为椭圆 W 的右顶点，C,D 是 y 轴上关于 x 轴对称的两点，直线 AC 与椭圆 W 的另一个交点为 B，点 E 为 AB 中点，点 H 在直线 AD 上且满足 $CH\perp OE$（O 为坐标原点），记 $\Delta AEH,\Delta ACD$ 的面积分别为 S_1,S_2，若 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{25}$，求直线 AB 的斜率.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析

21.（本小题 15 分）已知无穷数列$\{a_n\}$满足：

$a_1=0$，$a_2=1$，且当$n\geq 3$时，总存在$i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，使得$a_n=\dfrac{a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{n-1}}{n-i}$.

（Ⅰ）求a_4的所有可能值；

（Ⅱ）求a_{2023}的所有可能值中的最大值；

（Ⅲ）求证：当$n\geq 3$时，$a_{n+1}-a_n\geq -\dfrac{1}{n}$.

请将全部答案都写在答题纸上！

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。