

2023 北京五十五中高三 10 月月考

数 学

本试卷共 4 页，满分 150 分，考试时长 120 分钟

第 I 卷（选择题）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | x > 0\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $[-2, 3]$ B. $[0, 3]$ C. $(0, +\infty)$ D. $[-2, +\infty)$

2. 已知 i 是虚数单位，则复数 $\frac{2-i}{1+2i} =$ ()

- A. $-i$ B. i C. $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ D. $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

3. 下列函数中，既是偶函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的函数是 ()

- A. $y = \log_2 x$ B. $y = 2^{|x|} + 1$ C. $y = \sin x$ D. $y = -x^2$

4. $\left(2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中常数项是 ()

- A. 14 B. -14 C. 42 D. -42

5. 已知两条直线 m, n , 两个平面 α, β , 下面说法正确的是 ()

- A. $\left. \begin{matrix} \alpha \perp \beta \\ m \subset \alpha \\ n \subset \beta \end{matrix} \right\} \Rightarrow m \perp n$ B. $\left. \begin{matrix} \alpha \parallel \beta \\ m \subset \alpha \\ n \subset \beta \end{matrix} \right\} \Rightarrow m \parallel n$
- C. $\left. \begin{matrix} \alpha \perp \beta \\ m \subset \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow m \perp \beta$ D. $\left. \begin{matrix} \alpha \parallel \beta \\ m \subset \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow m \parallel \beta$

6. 在 $\triangle ABC$ 中“ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ ”是“ $\triangle ABC$ 是等腰三角形”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

7. 函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，所得图象经过点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$, 则 ω 的最小值是 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{2}$

8. 基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数. 基本再生数指一个感染者传染的平均人

数,世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间.在新冠肺炎疫情初始阶段,可以用指数模型: $I(t) = e^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t (单位:天) 的变化规律,指数增长率 r 与 R_0 , T 近似满足 $R_0 = 1 + rT$. 有学者基于已有数据估计出 $R_0 = 3.28$, $T = 6$. 据此,在新冠肺炎疫情初始阶段,累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为 $(\ln 2 \approx 0.69)$ ()

- A. 1.2 天
B. 1.8 天
C. 2.5 天
D. 3.5 天

9. 已知直线 $x + y - a = 0$ 与圆 $C: (x - a)^2 + (y + a)^2 = 1$ 相交于 A, B 两点,且 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,则实数 a 的取值为 ()

- A. -1 或 $\frac{1}{2}$
B. 1 或 -1
C. 2 或 -2
D. 1

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > 0$, $a_{11} = 4$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n^2$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n > 0$, $b_1 = a_{12}$,

$b_n = b_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, 若存在正整数 m, n ($m \leq n$), 使得 $b_m + b_n = 14$, 则 ()

- A. $m = 10, n = 12$
B. $m = 9, n = 11$
C. $m = 4, n = 6$
D. $m = 1, n = 3$

第II卷(非选择题)

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 函数 $f(x) = \sqrt{x} + \log_2(1-x)$ 的定义域为_____.

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$, 则双曲线 C 的焦距为_____.

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差为零, 若 a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 8 项的和为_____.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 y 轴对称, 则满足 $|\cos \alpha| = \cos \beta$ 的一个角 α 的值可以是_____.

15. 已知定义在 $[1, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = \begin{cases} 4 - |8x - 12|, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right), & x > 2 \end{cases}$ 及如下的 4 个命题:

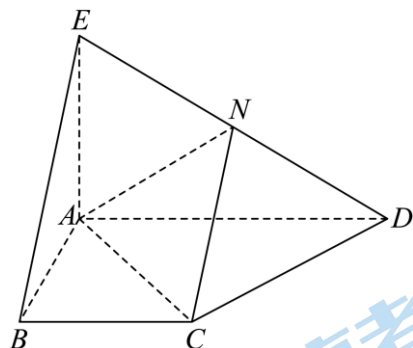
- ① 关于 x 的方程 $f(x) - \frac{1}{2^n} = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) 有 $2n + 4$ 个不同的零点;
② 对于实数 $x \in [1, +\infty)$, 不等式 $xf(x) \leq 6$ 恒成立;
③ 在 $[1, 6]$ 上, 方程 $6f(x) - x = 0$ 有 5 个零点;
④ $x \in [2^{n-1}, 2^n]$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 时, 函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的图形的面积是 4.

则以上命题正确的为_____ (把正确命题前的序号填在横线上)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. 如图所示在四棱锥 $E-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是直角梯形， $AB=AE=BC=\frac{1}{2}AD=1, BC \parallel AD$,

$AE \perp$ 平面 $ABCD, \angle BAD=90^\circ$, N 为 DE 的中点.



(1) 求证 $NC \parallel$ 平面 EAB ;

(2) 求二面角 $A-CN-D$ 的余弦值.

17. 在 $\triangle ABC$ 中， $b=2\sqrt{7}, \sqrt{3}\sin B - \cos B = 2$ ，从下面四个条件中选择一个作为已知，使三角形存在且唯一.

① $a=2b$; ② $c=2a$; ③ $\tan A = 2\sqrt{2}$; ④ $a=2$.

(1) 求 $\sin C$ 的值

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. 某闯关游戏必须闯过若干关口才能成功，其中第一关是答题，分别设置“文史常识题”“生活常识题”“影视艺术常识题”这 3 道题目，规定有两种答题方案：

方案一：答题 3 道，至少有 2 道答对

方案二：在这 3 道题目中，随机选取 2 道，这 2 道都答对.

方案一和方案二中只要完成一个，就能通过第一关，假设甲选择方案一、且答对每一道题的概率是 $\frac{1}{3}$ ，乙选择方案二，且 3 道题中只能答对其中两道题.

(1) 求甲答对题目数量 X 的分布列与数学期望；

(2) 设甲和乙中通过第一关的人数为 ξ ，求 ξ 的分布列；

(3) 若丙答对这 3 道题中每一道题的概率都是 $p (p \in (0,1))$ ，且这 3 道题是否答对相互之间没有影响，丙选择方案一通过第一关的概率为 p_1 ，选择方案二通过第一关的概率为 p_2 ，直接比较 p_1 与 p_2 的大小.

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，且 $|F_1F_2| = 4$ ，且 $a = \sqrt{2}b$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两个不同的点, 求证: x 轴上存在定点 P , 使得直线 PA 与直线 PB 的斜率之和为零.

20. 已知函数 $f(x) = x - a \ln x$, $g(x) = -\frac{1+a}{x} (a > 0)$.

- (1) 若 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 $y = 1$, 求实数 a 的值;
- (2) 设函数 $h(x) = f(x)g(x)$, 求函数 $h(x)$ 的单调区间与极值;
- (3) 若存在 $x_0 \in [1, e]$, 使得 $f(x_0) < g(x_0)$ 成立, 求 a 的取值范围.

21. 约数, 又称因数. 它的定义如下: 若整数 a 除以整数 $m (m \neq 0)$ 除得的商正好是整数而没有余数, 我们就称 a 为 m 的倍数, 称 m 为 a 的约数. 设正整数 a 共有 k 个正约数, 即为 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$ ($a_1 < a_2 < \dots < a_k$).

- (1) 当 $k = 4$ 时, 若正整数 a 的 k 个正约数构成等比数列, 请写出一个 a 的值;
- (2) 当 $k \geq 4$ 时, 若 $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_k - a_{k-1}$ 构成等比数列, 求正整数 a ;
- (3) 记 $A = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{k-1} a_k$, 求证: $A < a^2$.

参考答案

第I卷（选择题）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 【答案】D

【分析】利用并集的定义可求得集合 $A \cup B$ 。

【详解】因为集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$ ， $B = \{x | x > 0\}$ ，因此， $A \cup B = [-2, +\infty)$ 。

故选：D。

2. 【答案】A

【分析】根据复数的除法运算计算即可。

【详解】 $\frac{2-i}{1+2i} = \frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-5i}{5} = -i$ 。

故选：A。

3. 【答案】B

【分析】

偶函数的定义域需关于原点对称，并且满足 $f(-x) = f(x)$ ，再根据解析式的形式直接判断函数的单调性。

【详解】A. $y = \log_2 x$ 的定义域是 $(0, +\infty)$ ，不是偶函数，故 A 不成立；

B. $y = 2^{|x|} + 1$ 的定义域为 R ，并且满足 $f(-x) = f(x)$ ，函数是偶函数，当 $x > 0$ 时， $y = 2^x + 1$ ，是增函数，故 B 成立；

C. $y = \sin x$ 是奇函数，故 C 不成立；

D. $y = -x^2$ 是偶函数，但是开口向下的抛物线，在 $(0, +\infty)$ 是减函数，故 D 不成立。

故选：B

4. 【答案】A

【分析】

利用二项式展开式的通项公式，即可容易求得结果。

【详解】展开式的通项为 $T_{r+1} = C_7^r (2x^3)^{7-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_7^r 2^{7-r} (-1)^r x^{21-\frac{7}{2}r}$ ，

由 $21 - \frac{7}{2}r = 0$ ，得 $r = 6$ ，那么展开式中常数项是 $C_7^6 2^{7-6} (-1)^6 = 14$ 。

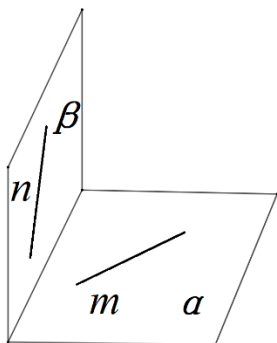
故选：A。

【点睛】本题考查由二项式定理的通项公式求指定项，属基础题。

5. 【答案】D

【分析】画图逐项分析，然后根据面面平行、垂直的性质进行判断便可得答案。

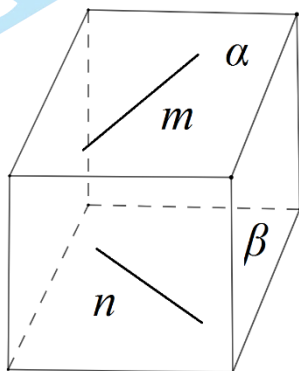
【详解】解：选项 A、C：如图所示



$$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ m \subset \alpha \\ n \subset \beta \end{array} \right\} \text{不能推出 } m \perp n, \text{ 故 A 错误;}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ m \subset \alpha \end{array} \right\} \text{不能推出 } m \perp \beta, \text{ 故 C 错误;}$$

选项 B、D：如图所示



$$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ m \subset \alpha \\ n \subset \beta \end{array} \right\} \text{不能推出 } m \parallel n, \text{ 故 B 错误;}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ m \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow m \parallel \beta, \text{ 故 D 正确;}$$

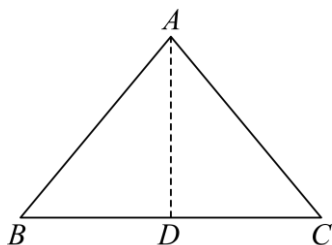
故选：D

6. 【答案】A

【分析】根据向量的四则运算法则，结合三角形的性质求解即可。

【详解】因为 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$,

设 D 为 BC 的中点，



所以 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) = -2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$,

所以 $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AD}$,

即 $BC \perp AD$,

因为 D 为 BC 的中点, 所以 $AB = AC$, $\triangle ABC$ 是等腰三角形;

但 $\triangle ABC$ 是等腰三角形不一定得到 $AB = AC$, 也可能是 $BC = AC$ 或者 $AB = BC$,

故选: A.

7. 【答案】C

【分析】根据三角函数图像平移求出解析式, 再根据图像经过 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 求得 ω 的值即可.

【详解】依题意得, 函数 $f(x + \frac{\pi}{3}) = \sin[\omega(x + \frac{\pi}{3})]$ ($\omega > 0$) 的图象过点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$,

于是有 $f(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = \sin[\omega(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3})] = \sin\omega\pi = 0$ ($\omega > 0$),

$\therefore \omega\pi = k\pi, k \in \mathbf{N}^*$, 即 $\omega = k, k \in \mathbf{N}^*$,

因此正数 ω 的最小值是 1.

故选: C.

8. 【答案】B

【分析】根据题意可得 $I(t) = e^{rt} = e^{0.38t}$, 设在新冠肺炎疫情初始阶段, 累计感染病例数增加 1 倍需要的时间为 t_1 天, 根据 $e^{0.38(t+t_1)} = 2e^{0.38t}$, 解得 t_1 即可得结果.

【详解】因为 $R_0 = 3.28$, $T = 6$, $R_0 = 1 + rT$, 所以 $r = \frac{3.28-1}{6} = 0.38$, 所以 $I(t) = e^{rt} = e^{0.38t}$,

设在新冠肺炎疫情初始阶段, 累计感染病例数增加 1 倍需要的时间为 t_1 天,

则 $e^{0.38(t+t_1)} = 2e^{0.38t}$, 所以 $e^{0.38t_1} = 2$, 所以 $0.38t_1 = \ln 2$,

所以 $t_1 = \frac{\ln 2}{0.38} \approx \frac{0.69}{0.38} \approx 1.8$ 天

故选: B.

【点睛】本题考查了指数型函数模型的应用，考查了指数式化对数式，属于基础题。

9. 【答案】B

【分析】由题意可知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，可得圆心 $C(a, -a)$ 到直线 $x + y - a = 0$ 的距离等于 $\sin 45^\circ$ ，再利用点到直线的距离公式求得 a 的值。

【详解】 $\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $CA = CB = 1, \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 斜边 AB 上的高为 $\sin 45^\circ$ ，

$\therefore$ 圆心 $C(a, -a)$ 到直线 $x + y - a = 0$ 的距离等于 $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$$\therefore \frac{|a - a - a|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得 $a = \pm 1$ 。

故选：B。

【点睛】本题主要考查直线和圆的位置关系，直角三角形中的边角关系，点到直线的距离公式的应用，属于基础题。

10. 【答案】D

【分析】

根据递推公式，由题中条件，先判断 $a_{n+1} > a_n > \dots > a_1 > 0$ ， $b_1 > b_2 > \dots > b_n > 0$ ，再计算出

$b_2 = a_{11} = 4$ ， $b_3 = a_{10} = 2$ ， $b_1 = a_{12} = 12$ ，即可得出结果。

【详解】因为 $a_1 > 0$ ， $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n^2$ ， $b_n = b_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1}^2$ ， $b_n > 0$ ，

则有 $a_{n+1} > a_n > \dots > a_1 > 0$ ， $b_1 > b_2 > \dots > b_n > 0$ ，

且函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增， $b_1 = a_{12}$ ，

故有 $b_1 = a_{12} = b_2 + \frac{1}{2}b_2^2 = a_{11} + \frac{1}{2}a_{11}^2$ ，得 $b_2 = a_{11} = 4$ ，

所以 $b_2 = b_3 + \frac{1}{2}b_3^2 = 4$ ， $a_{11} = a_{10} + \frac{1}{2}a_{10}^2 = 4$ ，解得 $b_3 = a_{10} = 2$ ，

同理有 $b_4 = a_9, \dots, b_m = a_{13-m}$ ，

又因为 $a_{12} = a_{11} + \frac{1}{2}a_{11}^2 = 12$ ，所以 $b_1 = 12$ ，

故 $b_m + b_n = 14 = a_{10} + a_{12}$ ，

所以 $m = 1, n = 3$ 。

故选：D。

【点睛】本题主要考查数列递推公式的应用，属于常考题型。

第II卷（非选择题）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 【答案】 $[0,1)$

【分析】根据函数成立的条件列不等式组,求解即可得定义域.

【详解】解:要使函数有意义,则 $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$,

即 $0 \leq x < 1$. 则定义域为: $[0,1)$.

故答案为: $[0,1)$

【点睛】本题主要考查定义域的求解,要熟练掌握函数成立的条件.

12. 【答案】4

【分析】根据双曲线的标准方程求出 a , b , c 即可得解.

【详解】由双曲线方程 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$, 可得 $a^2 = 2$, $b^2 = 2$,

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 4$, $\therefore c = 2$, 故焦距为 4.

故答案为: 4.

13. 【答案】-48.

【分析】设等差数列的公差为 d , 运用等比数列的中项性质和等差数列的通项公式, 解方程可得公差 d , 再由等差数列的求和公式, 计算可得所求和.

【详解】等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差 d 不为零, 若 a_2 , a_3 , a_6 成等比数列,

可得 $a_2 a_6 = a_3^2$, 即 $(1+d)(1+5d) = (1+2d)^2$,

解得 $d = -2$ (0 舍去),

数列 $\{a_n\}$ 的前 8 项的和为 $8a_1 + \frac{8 \times 7}{2}d = 8 - 56 = -48$.

故答案为: -48.

【点睛】本题考查等差数列的通项公式和求和公式, 等比数列的中项性质, 考查方程思想和运算能力, 属于基础题.

14. 【答案】 $\frac{2\pi}{3}$ (答案不唯一)

【分析】根据任意角三角函数分析判断.

【详解】例如 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, 可知角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称,

且 $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \beta = \frac{1}{2}$, 满足 $|\cos \alpha| = \cos \beta$.

故答案为： $\frac{2\pi}{3}$ （答案不唯一）.

15. 【答案】②③

【分析】根据题意，对选项中的每一个问题进行分析与思考，结合函数 $f(x)$ 的解析式进行解答，即可得出正确的选项.

【详解】当 $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ 时， $f(x) = 8x - 8$ ； $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ 时， $f(x) = 16 - 8x$ ；

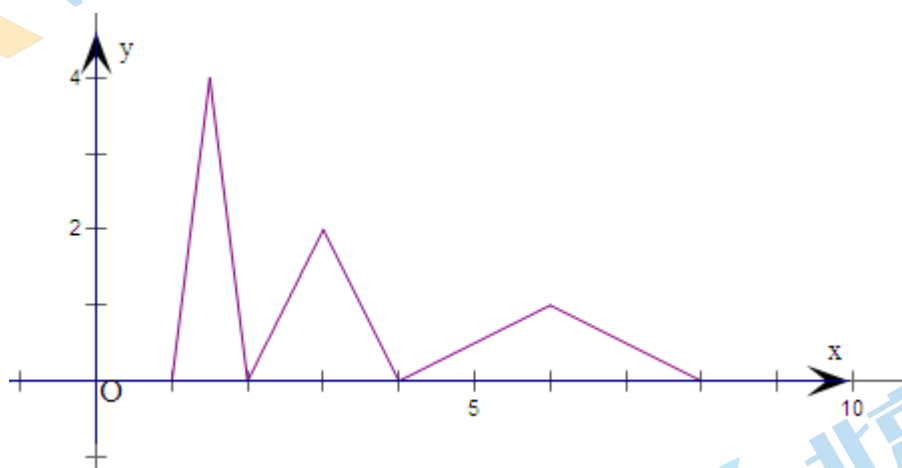
设 $2 \leq x \leq 3$ ，则 $1 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{3}{2}$ ， $f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = 2x - 4$ ；

$3 \leq x \leq 4$ ，则 $\frac{3}{2} \leq \frac{x}{2} \leq 2$ ， $f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = 8 - 2x$ ；

$4 \leq x \leq 6$ ，则 $2 \leq \frac{x}{2} \leq 3$ ， $f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - 2$ ；

$6 \leq x \leq 8$ ，则 $3 \leq \frac{x}{2} \leq 4$ ， $f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = 4 - \frac{x}{2}$.

画出草图，



当 $n=1$ 时， $f(x) - \frac{1}{2} = 0$ 在 $[1, 8]$ 上有 6 个不相等的实根， $[8, 16]$ 上只有一个实根，以后再也没有了，共有 7 个不相等的实根，故①错；

函数 $f(x)$ 的最高点都在曲线 $y = \frac{6}{x} (x > 0)$ 上，对于实数 $x \in [1, +\infty)$ ，不等式 $xf(x) \leq 6$ 恒成立，故②正确；

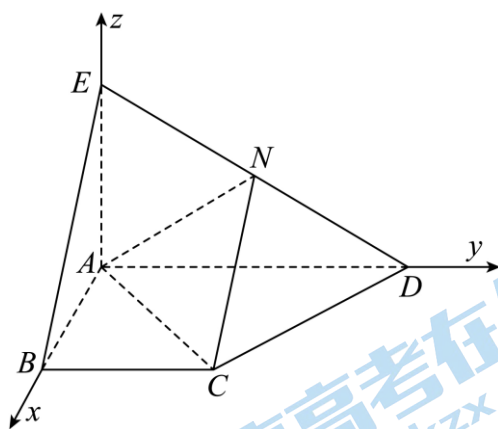
在 $[1, 6]$ 上，方程 $6f(x) - x = 0$ 即 $f(x) = \frac{x}{6}$ ，

由函数 $f(x)$ 及 $y = \frac{x}{6}$ 的图像，可得方程 $6f(x) - x = 0$ 有 5 个解，故③正确；

函数 $f(x)$ 的最高点为以 4 为首项，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

$$\text{则 } \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{2}{3},$$

观察知，二面角 $A-CN-D$ 对应的平面角为钝角，故余弦值为 $-\frac{2}{3}$.



【点睛】本题考查了线面平行，二面角，意在考查学生的计算能力和空间想象能力.

17. 【答案】(1) $\frac{\sqrt{21}}{7}$

(2) $2\sqrt{3}$

【分析】(1) 选①，由 $a = 2b$ ，即 $A > B$ ，又 $\sqrt{3} \sin B - \cos B = 2$ 可得 $B = \frac{2\pi}{3}$ ，这与 $A+B+C = \pi$ 矛盾，不合题意；选②，由 $\sqrt{3} \sin B - \cos B = 2$ 可得 $B = \frac{2\pi}{3}$ ，又 $c = 2a$ ，由余弦定理可得 a, c ，由正弦

定理可得 $\sin C$ 选③，由 $\tan A = 2\sqrt{2}$ 可得 $A > \frac{\pi}{3}$ ，又 $B = \frac{2\pi}{3}$ ，这与 $A+B+C = \pi$ 矛盾，不合题意；选

④，由 $a = 2$ 结合余弦定理可求得 c ，再由正弦定理得解.

(2) 选①，由 $a = 2b$ ，即 $A > B$ ，又 $\sqrt{3} \sin B - \cos B = 2$ 可得 $B = \frac{2\pi}{3}$ ，这与 $A+B+C = \pi$ 矛盾，不合

题意；选②，由 $\sqrt{3} \sin B - \cos B = 2$ 可得 $B = \frac{2\pi}{3}$ ，又 $c = 2a$ ，由余弦定理可得 a, c ，由三角形面积公

式得解；选③，由 $\tan A = 2\sqrt{2}$ 可得 $A > \frac{\pi}{3}$ ，又 $B = \frac{2\pi}{3}$ ，这与 $A+B+C = \pi$ 矛盾，不合题意；选④，由

$a = 2$ 结合余弦定理可求得 c ，再由正弦定理得解.

【小问1详解】

选①，由 $a = 2b$ ，即 $A > B$ ，又 $\sqrt{3} \sin B - \cos B = 2$ ，

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{2} \sin B - \frac{1}{2} \cos B = 1, \therefore \sin \left(B - \frac{\pi}{6} \right) = 1, \text{ 又 } 0 < B < \pi,$$

$$\therefore B = \frac{2\pi}{3}, \text{ 这与 } A+B+C = \pi \text{ 矛盾，不合题意；}$$

选②, 由 $\sqrt{3}\sin B - \cos B = 2$ 可得 $B = \frac{2\pi}{3}$, 又 $c = 2a$, $b = 2\sqrt{7}$,

由余弦定理 $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B$, 即 $a^2 + 4a^2 - (2\sqrt{7})^2 = 2a \times 2a \times \left(-\frac{1}{2}\right)$, 解得 $a = 2$, $c = 4$,

由正弦定理得 $\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$;

选③, 由 $\tan A = 2\sqrt{2}$ 可得 $A > \frac{\pi}{3}$, 又 $B = \frac{2\pi}{3}$, 这与 $A + B + C = \pi$ 矛盾, 不合题意;

选④, 由 $a = 2$, 由余弦定理得 $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B$

即 $4 + c^2 - (2\sqrt{7})^2 = 2 \times 2 \times c \times \left(-\frac{1}{2}\right)$, 解得 $c = 4$ 或 -6 (舍),

由正弦定理得 $\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$;

再由正弦定理得解.

【小问 2 详解】

选①, 由 $a = 2b$, 即 $A > B$, 又 $\sqrt{3}\sin B - \cos B = 2$ 即 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B - \frac{1}{2}\cos B = 1$, $\therefore \sin\left(B - \frac{\pi}{6}\right) = 1$,

又 $0 < B < \pi$, $\therefore B = \frac{2\pi}{3}$, 这与 $A + B + C = \pi$ 矛盾, 不合题意;

选②, 由 $\sqrt{3}\sin B - \cos B = 2$ 可得 $B = \frac{2\pi}{3}$, 又 $c = 2a$, $b = 2\sqrt{7}$,

由余弦定理 $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B$,

即 $a^2 + 4a^2 - (2\sqrt{7})^2 = 2a \times 2a \times \left(-\frac{1}{2}\right)$, 解得 $a = 2$, $c = 4$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$;

选③, 由 $\tan A = 2\sqrt{2}$ 可得 $A > \frac{\pi}{3}$, 又 $B = \frac{2\pi}{3}$, 这与 $A + B + C = \pi$ 矛盾, 不合题意;

选④, 由 $a = 2$, 由余弦定理得 $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B$ 即 $4 + c^2 - (2\sqrt{7})^2 = 2 \times 2 \times c \times \left(-\frac{1}{2}\right)$,

解得 $c = 4$ 或 -6 (舍), $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

18. 【答案】(1) 分布列见解析, $E(X) = 1$

(2) 分布列见解析, $E(\xi) = \frac{7}{27}$

(3) $p_1 > p_2$

【分析】(1) 写出随机变量 X 的所有取值, 求出对应概率, 即可得分布列, 再根据期望公式求期望即可;

(2) 先分别求出两人过关的概率, 写出随机变量 ξ 的所有取值, 求出对应概率, 即可得分布列, 再根据期望公式求期望即可;

(3) 先分别求出 p_1, p_2 , 再作差即可得解.

【小问 1 详解】

由题意, X 可取 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}, \quad P(X=1) = C_3^1 \cdot \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \quad P(X=3) = C_3^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

所以分布列如下:

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{8}{27} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{27} = 1;$$

【小问 2 详解】

$$\text{甲通过的概率 } P_{\text{甲}} = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} + C_3^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7}{27},$$

$$\text{乙通过的概率 } P_{\text{乙}} = \frac{C_2^2}{C_3^2} = \frac{1}{3},$$

ξ 可取 0, 1, 2,

$$\text{则 } P(\xi=0) = \left(1 - \frac{7}{27}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{40}{81},$$

$$P(\xi=1) = \frac{7}{27} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{7}{27}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{34}{81},$$

$$P(\xi=2) = \frac{7}{27} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{81},$$

所以分布列如下:

ξ	0	1	2
-------	---	---	---

P	$\frac{40}{81}$	$\frac{34}{81}$	$\frac{7}{81}$
-----	-----------------	-----------------	----------------

$$\text{所以 } E(\xi) = 0 \times \frac{40}{81} + 1 \times \frac{34}{81} + 2 \times \frac{7}{81} = \frac{16}{27};$$

【小问 3 详解】

$$p_1 = C_3^2 \cdot p^2(1-p) + C_3^3 \cdot p^3 = 3p^2 - 2p^3, \quad p_2 = p^2,$$

$$\text{则 } p_1 - p_2 = 2p^2 - 2p^3 = 2p^2(1-p),$$

$$\text{因为 } p \in (0,1), \text{ 所以 } p_1 - p_2 = 2p^2(1-p) > 0,$$

$$\text{所以 } p_1 > p_2.$$

$$19. \text{【答案】(1) } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

(2) 证明见解析.

【分析】(1) 利用待定系数法求出椭圆 C 的方程; (2) 对直线 l 的斜率是否存在, 进行分类讨论: 当直线 l 的斜率存在时, 设直线 $l: y = k(x+2)$. 设 x 轴上存在定点 $P(t,0)$, 利用“设而不求法”表示出

$$k_{PA} + k_{PB} = 0, \text{ 求出 } P(-4,0); \text{ 再由对称性判断出直线 } l \text{ 的斜率不存在时符合题意.}$$

【小问 1 详解】

$$\text{由题意可得: } \begin{cases} 2c = 4 \\ a^2 = b^2 + c^2 \\ a = \sqrt{2}b \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} c = 2 \\ a^2 = 8 \\ b = 2 \end{cases}, \text{ 所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

【小问 2 详解】

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2).$$

$$\text{当直线 } l \text{ 的斜率存在时, 设为 } k, \text{ 则直线 } l: y = k(x+2).$$

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = k(x+2) \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 可得: } (1+2k^2)x^2 + 8k^2x + 8k^2 - 8 = 0.$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{8k^2}{1+2k^2}, x_1x_2 = \frac{8k^2-8}{1+2k^2}.$$

$$\text{设 } x \text{ 轴上存在定点 } P(t,0), \text{ 则 } k_{PA} = \frac{y_1-0}{x_1-t}, k_{PB} = \frac{y_2-0}{x_2-t}.$$

$$\text{因为 } k_{PA} + k_{PB} = \frac{y_1-0}{x_1-t} + \frac{y_2-0}{x_2-t} = 0, \text{ 所以 } k_{PA} + k_{PB} = \frac{y_1 \times (x_2-t) + y_2 \times (x_1-t)}{(x_1-t)(x_2-t)} = 0,$$

$$\text{所以 } y_1 \times (x_2-t) + y_2 \times (x_1-t) = 0, \text{ 即 } k(x_1+2) \times (x_2-t) + k(x_2+2) \times (x_1-t) = 0,$$

整理得: $2x_1x_2 + (2-t)(x_1+x_2) - 4t = 0$,

$$\text{所以 } 2 \times \frac{8k^2-8}{1+2k^2} + (2-t) \left(-\frac{8k^2}{1+2k^2} \right) - 4t = 0,$$

所以 $16k^2 - 16 - 16k^2 + 8tk^2 - 4t - 8tk^2 = 0$, 解得: $t = -4$.

即 $P(-4, 0)$.

当直线 l 的斜率不存在时, 由对称性可知: A, B 关于 x 轴对称, 由 $P(-4, 0)$, 可知直线 PA 与直线 PB 关于 x 轴对称, 所以直线 PA 与直线 PB 的斜率之和为零. 符合题意.

综上所述: x 轴上存在定点 $P(-4, 0)$, 使得直线 PA 与直线 PB 的斜率之和为零.

20. 【答案】(1) $a = 1$

(2) 答案见详解

$$(3) \left(\frac{e^2+1}{e-1}, +\infty \right)$$

【分析】(1) 求出 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$, 根据 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 $y = 1$, 得 $f'(1) = 0$ 得解;

(2) 求出 $h'(x)$, 判断 $h'(x)$ 的正负, 得解;

(3) 令 $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, 把题干中的问题转化为在 $x \in [1, e]$ 上有 $\varphi(x)_{\min} < 0$, 再利用导数研究 $\varphi(x)$ 的单调性, 对 a 进行分类讨论, 求出不同范围下的 $\varphi(x)_{\min}$, 得解.

【小问 1 详解】

$$\because f(x) = x - a \ln x,$$

$$\therefore f'(x) = 1 - \frac{a}{x}, \text{ 又 } f(x) \text{ 在点 } (1, f(1)) \text{ 处的切线为 } y = 1, \text{ 得 } f'(1) = 0,$$

即 $1 - a = 0$, 解得 $a = 1$.

【小问 2 详解】

$$h(x) = f(x)g(x) = -1 - a + \frac{a(1+a)\ln x}{x},$$

$$\therefore h'(x) = a(1+a) \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad a > 0,$$

令 $h'(x) > 0$, 解得 $x \in (0, e)$, 令 $h'(x) < 0$, 解得 $x \in (e, +\infty)$,

$\therefore x \in (0, e)$, $h(x)$ 单调递增, $x \in (e, +\infty)$, $h(x)$ 单调递减,

$\therefore h(x)$ 在 $x = e$ 处取得极大值, 极大值为 $h(e) = -1 - a + \frac{a(1+a)}{e}$, 无极小值.

【小问 3 详解】

令 $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, $\exists x_0 \in [1, e]$, 使得 $f(x_0) < g(x_0)$,

等价于在 $x \in [1, e]$ 上, $\varphi(x)_{\min} < 0$,

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{a}{x} - \frac{1+a}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1-a)}{x^2}, \quad x > 0,$$

$\because a > 0, \therefore 1+a > 1$,

令 $\varphi'(x) > 0, x \in (1+a, +\infty)$, 令 $\varphi'(x) < 0, x \in (0, 1+a)$,

即 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1+a)$ 上单调递减, 在 $(1+a, +\infty)$ 上单调递增,

当 $1+a \geq e$ 即 $a \geq e-1$ 时, $\varphi(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减,

$$\therefore \varphi(x)_{\min} = \varphi(e) = e - a + \frac{1+a}{e}, \text{ 则 } e - a + \frac{1+a}{e} < 0, \text{ 解得 } a > \frac{e^2+1}{e-1},$$

$$\because \frac{e^2+1}{e-1} > e-1, \therefore a > \frac{e^2+1}{e-1}.$$

当 $1+a < e$ 即 $0 < a < e-1$ 时, $\varphi(x)$ 在 $[1, 1+a]$ 上单调递减, 在 $(1+a, e)$ 上单调递增,

$$\therefore \varphi(x)_{\min} = \varphi(1+a) = 2+a-a\ln(1+a), \text{ 因为 } 0 < \ln(1+a) < 1, \text{ 所以 } 0 < a\ln(1+a) < a,$$

则 $2 < 2+a < 2+a-a\ln(1+a)$, 即 $\varphi(1+a) > 2$, 不合题意,

综上, a 的取值范围为 $\left(\frac{e^2+1}{e-1}, +\infty\right)$.

21. 【答案】(1) 8. (2) $a = a_2^{k-1} (k \geq 4)$.

(3) 证明见解析.

【分析】(1) 根据题意即可写出 a 的一个值;

(2) 由题意可知 $a_1 = 1, a_k = a, a_{k-1} = \frac{a}{a_2}, a_{k-2} = \frac{a}{a_3}$, 结合 $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_k - a_{k-1}$ 构成等比数列, 可推出 a_3 是完全平方数, 继而可得 $a_3 = a_2^2$, 由此可知 $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_k - a_{k-1}$ 为 $a_2 - 1, a_2^2 - a_2, \dots, a_2^{k-1} - a_2^{k-2}$, 即可求得 a ;

(3) 由题意知 $a_1 a_k = a, a_2 a_{k-1} = a, \dots, a_i a_{k+1-i} = a, \dots$, $(1 \leq i \leq k)$, 从而可得

$$A = \frac{a^2}{a_{k-1} a_k} + \frac{a^2}{a_{k-2} a_{k-1}} + \dots + \frac{a^2}{a_1 a_2}, \text{ 采用放缩法以及裂项求和的方法, 即可证明结论.}$$

【小问 1 详解】

当 $k = 4$ 时正整数 a 的 4 个正约数构成等比数列,

比如 1, 2, 4, 8 为 8 的所有正约数, 即 $a = 8$.

【小问 2 详解】

由题意可知 $a_1=1$, $a_k=a$, $a_{k-1}=\frac{a}{a_2}$, $a_{k-2}=\frac{a}{a_3}$,

因为 $k \geq 4$, 依题意可知 $\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1} = \frac{a_k-a_{k-1}}{a_{k-1}-a_{k-2}}$, 所以 $\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1} = \frac{a-\frac{a}{a_2}}{\frac{a}{a_2}-\frac{a}{a_3}}$,

化简可得 $(a_3-a_2)^2 = (a_2-1)^2 a_3$, 所以 $a_3 = \left(\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1}\right)^2$,

因为 $a_3 \in \mathbb{N}^*$, 所以 $\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1} \in \mathbb{N}^*$,

因此可知 a_3 是完全平方数.

由于 a_2 是整数 a 的最小非 1 因子, a_3 是 a 的因子, 且 $a_3 > a_2$, 所以 $a_3 = a_2^2$,

所以 $a_2-a_1, a_3-a_2, \dots, a_k-a_{k-1}$ 为 $a_2-1, a_2^2-a_2, \dots, a_2^{k-1}-a_2^{k-2}$,

所以 $a = a_2^{k-1}, (k \geq 4)$.

【小问 3 详解】

证明: 由题意知 $a_1 a_k = a, a_2 a_{k-1} = a, \dots, a_i a_{k+1-i} = a, \dots, (1 \leq i \leq k)$,

所以 $A = \frac{a^2}{a_{k-1} a_k} + \frac{a^2}{a_{k-2} a_{k-1}} + \dots + \frac{a^2}{a_1 a_2}$,

因为 $\frac{1}{a_1 a_2} \leq \frac{a_2-a_1}{a_1 a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_{k-1} a_k} \leq \frac{a_k-a_{k-1}}{a_{k-1} a_k} = \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$,

所以 $A = \frac{a^2}{a_{k-1} a_k} + \frac{a^2}{a_{k-2} a_{k-1}} + \dots + \frac{a^2}{a_1 a_2} = a^2 \left(\frac{1}{a_{k-1} a_k} + \frac{1}{a_{k-2} a_{k-1}} + \dots + \frac{1}{a_1 a_2} \right)$

$\leq a^2 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} \right) = a^2 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_k} \right)$,

因为 $a_1=1$, $a_k=a$, 所以 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_k} < 1$,

所以 $A \leq a^2 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_k} \right) < a^2$,

即 $A < a^2$.

【点睛】关键点点睛: 在第二问的解答中, 在得到 $a_3 = \left(\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1}\right)^2$ 后, 要能根据 $a_3 \in \mathbb{N}^*$, 推得

$\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1} \in \mathbb{N}^*$, 继而得出 $a_3 = a_2^2$, 这是解决问题的关键. 第三问的证明中, 难点在于要能注意到

$a_1a_k = a, a_2a_{k-1} = a, \dots, a_ia_{k+1-i} = a, \dots, (1 \leq i \leq k)$, 从而可得 $A = \frac{a^2}{a_{k-1}a_k} + \frac{a^2}{a_{k-2}a_{k-1}} + \dots + \frac{a^2}{a_1a_2}$, 然后

采用裂项求和的方法进行化简进而证明结论.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！



微信搜一搜



京考一点通