人大附中 2023~2024 学年度第一学期高二年级数学期中练习

2023 年 11 月 3 日

制卷人：吴文庆　　审卷人：梁丽平 杨良庆

说明：本试卷共六道大题，共 7 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟；

第 I 卷（共 18 题，满分 100 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.）

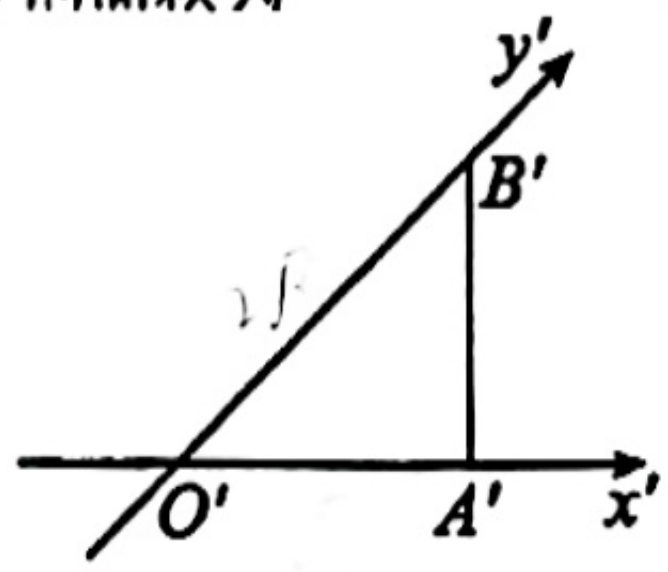
1. 已知平面 α // 平面 β，直线 $a\subset\alpha$，直线 $b\subset\beta$，则 a 与 b 的位置关系是　（　）

A. 平行　　B. 平行或异面　　C. 异面　　D. 异面或相交

2. 空间中点 A 的坐标是 $(3,-1,0)$，若向量 $\overrightarrow{AB}=(2,5,-3)$，则点 B 的坐标是　（　）

A. $(1,-6,3)$　　B. $(-1,6,-3)$　　C. $(5,4,-3)$　　D. $(2,5,-3)$

3. 一个水平放置的平面图形 $\triangle OAB$ 用斜二测画法作出的直观图是如图所示的等腰直角 $\triangle O'A'B'$，其中 $A'B'=\sqrt{10}$，则平面图形 $\triangle OAB$ 的面积为　（　）



A. $5\sqrt{2}$　　B. $10\sqrt{2}$

C. $10\sqrt{5}$　　D. $5\sqrt{5}$

4. 已知 $\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{1}{3}$，则下列说法错误的是　（　）

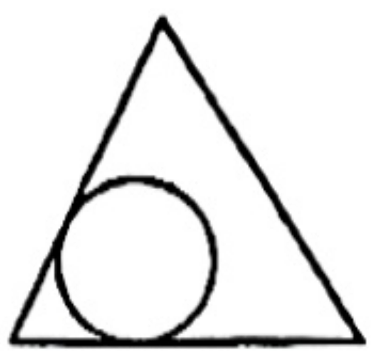
A. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别是直线 l_1,l_2 的方向向量，则 l_1,l_2 所成角余弦值是 $\frac{1}{3}$

B. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别是直线 l 的方向向量与平面 α 的法向量，则 l 与 α 所成角正弦值是 $\frac{1}{3}$

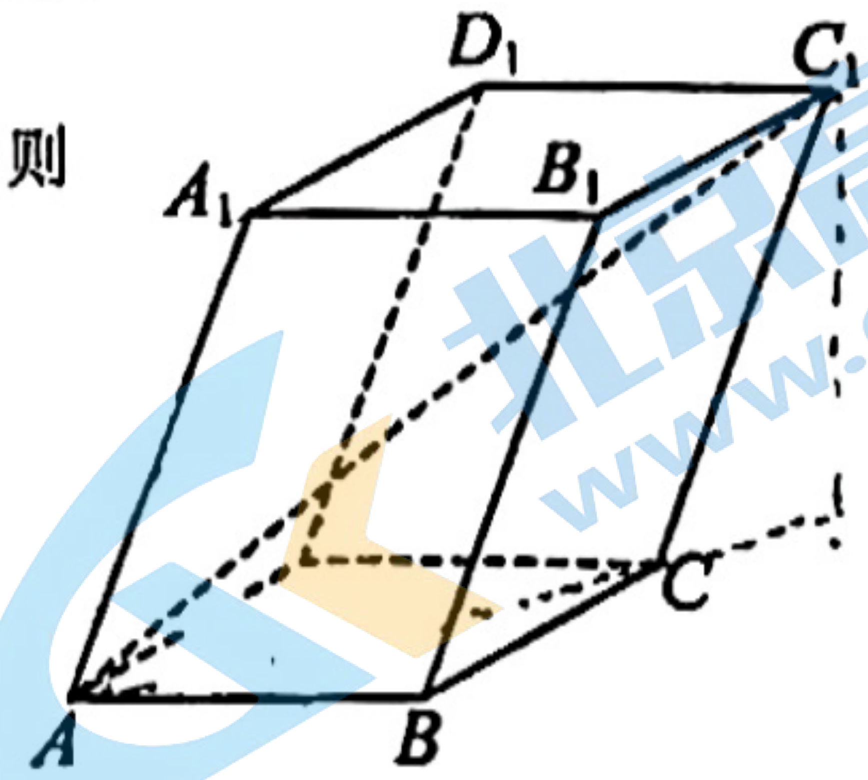
C. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别是平面 ABC，平面 BCD 的法向量，则二面角 $A-BC-D$ 的余弦值是 $\frac{1}{3}$

D. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别是直线 l 的方向向量与平面 α 的法向量，则 l 与 α 所成角余弦值是 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5. 一个三棱锥的各棱长均相等，其内部有一个内切球，即球与三棱锥的各面均相切，过一条侧棱和其对边的中点作三棱锥的截面，所得截面图形是　（　）

A. 　B. 　C. 　D. 

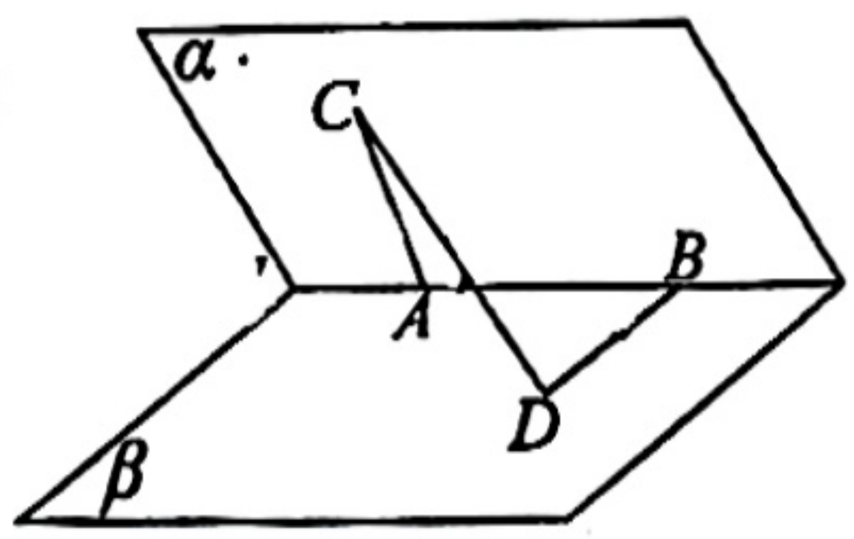
6. 如图，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是矩形，其中 $AB=2$，$AD=4$，$AA_1=3$，且 $\angle A_1AD=\angle A_1AB=60^\circ$，则线段 AC_1 的长为 （ ）



A. 9　　B. $\sqrt{29}$

C. $\sqrt{47}$　　D. $4\sqrt{3}$

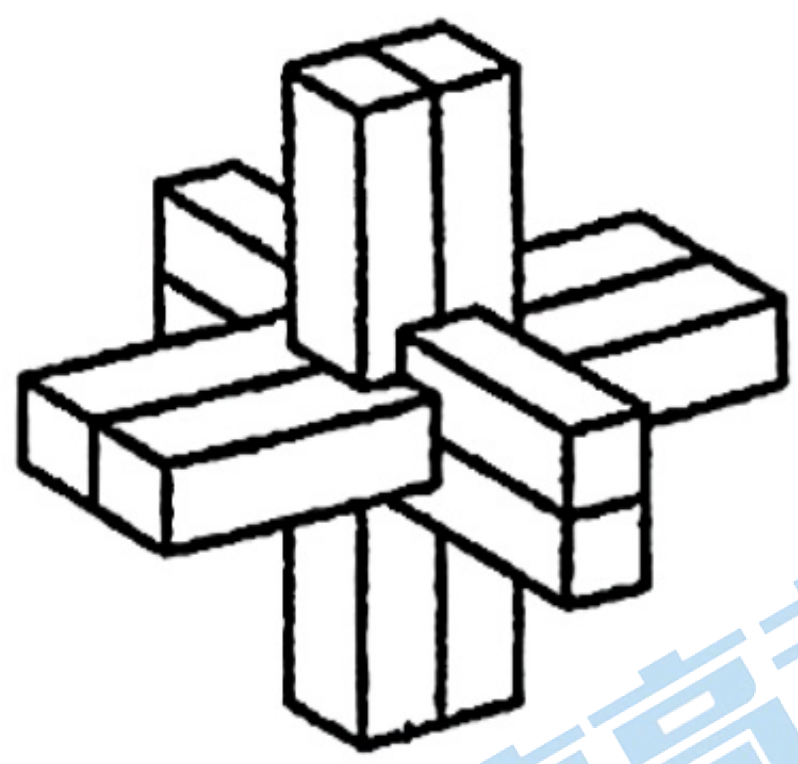
7. 如图，已知大小为 60° 的二面角 $\alpha-l-\beta$ 棱上有两点 A,B，$AC\subset\alpha$，$AC\perp l$，$BD\subset\beta$，$BD\perp l$，若 $AC=3$，$BD=3$，$CD=7$，则 AB 的



A. 22　　B. 40

C. $2\sqrt{10}$　　D. $\sqrt{22}$

8. 鲁班锁是中国传统的智力玩具，起源于中国古代建筑中首创的榫卯结构，它的外观是如图所示的十字立方体，其上下、左右、前后完全对称，六根完全一样的正四棱柱体分成三组，经 90° 榫卯拼接起来. 若正四棱柱的高为 6，底面正方形的边长为 1，现将该鲁班锁放进一个球形容器（容器壁厚度忽略不计），则该球形容器表面积的最小值为 （ ）

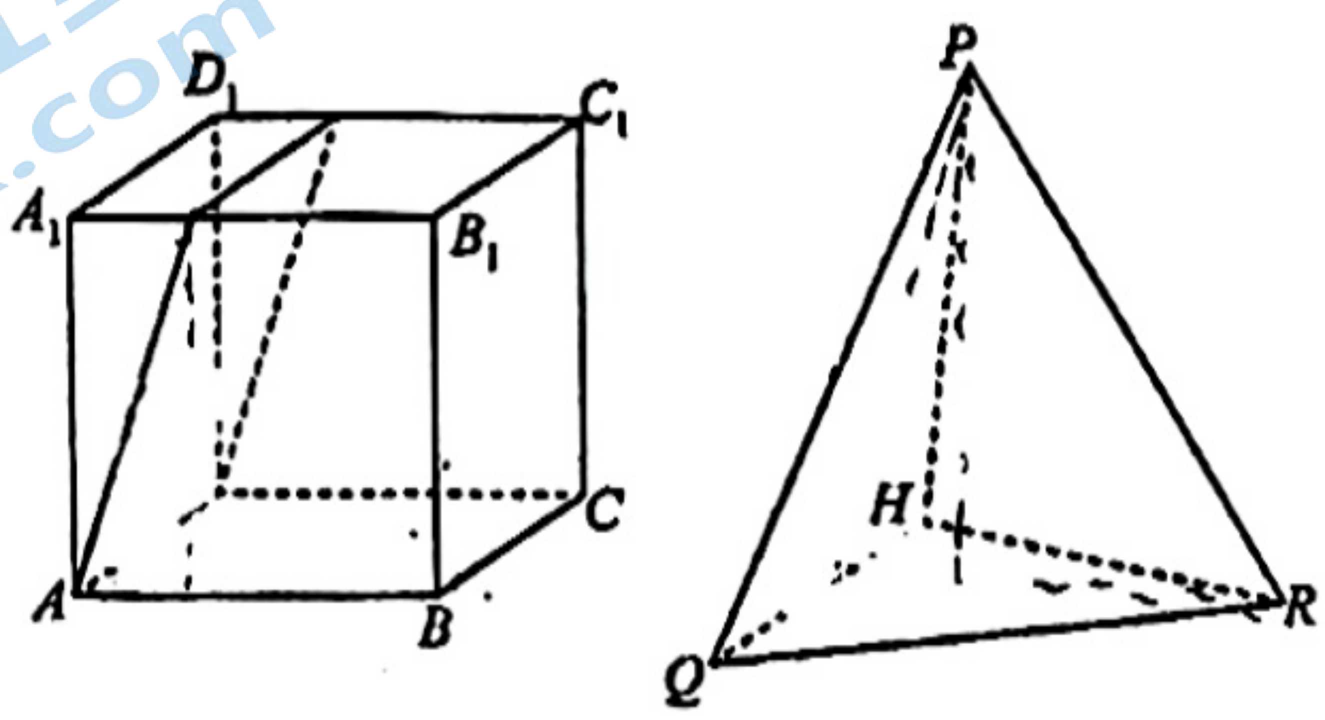


A. 41π　　B. 42π　　C. 43π　　D. 44π

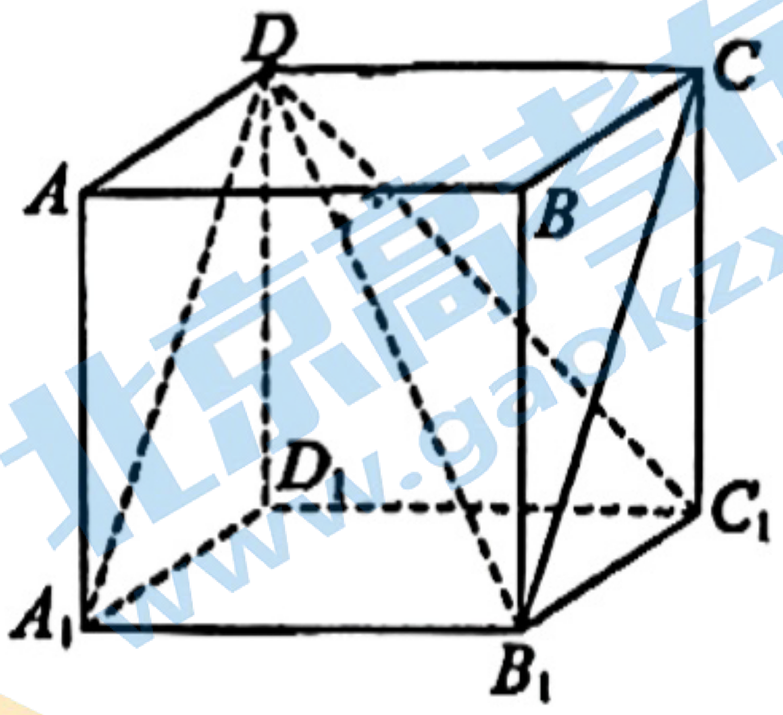
9. 如图，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 4 的正方体，$P-QRH$ 是棱长为 4 的正四面体，底面 $ABCD$ 与底面 QRH 在同一个平面内，且 $BC\,/\!/\,QH$，则正方体中过 AD 且与平面 PHQ 平行的截面面积是 （ ）

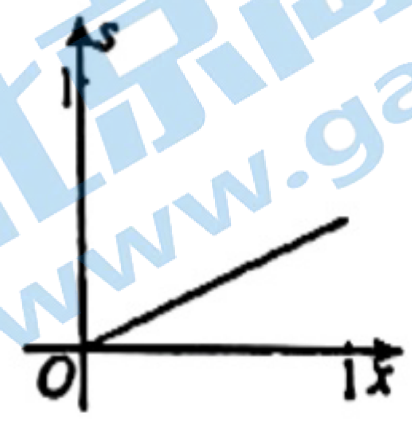
A. $4\sqrt{17}$　　B. $8\sqrt{5}$

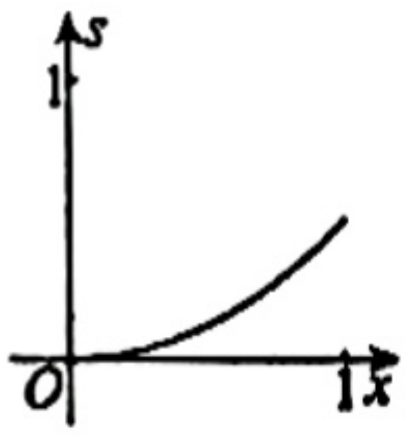
C. $12\sqrt{2}$　　D. $16\sqrt{2}$

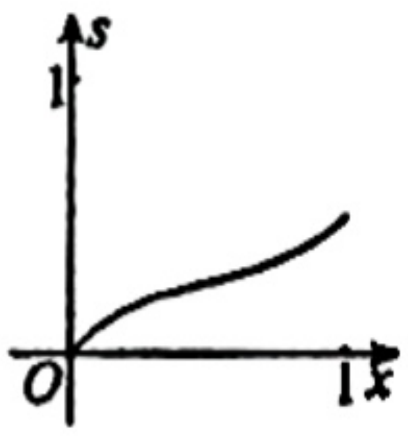


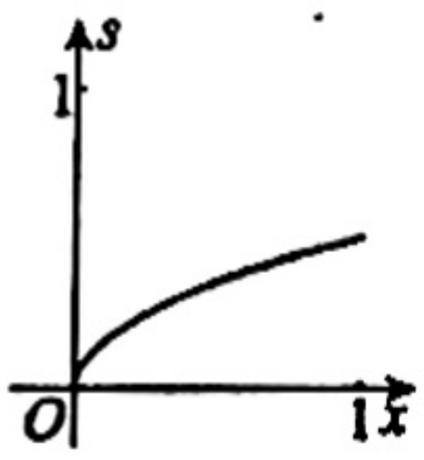
10.《九章算术·商功》中有这样一段话："斜解立方，得两堑堵. 斜解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑. 阳马居二，鳖臑居一，不易之率也."意思是：如图，沿正方体对角面 A_1B_1CD 截正方体可得两个堑堵，再沿平面 B_1C_1D 截堑堵可得一个阳马（四棱锥 $D-A_1B_1C_1D_1$），一个鳖臑（三棱锥 $D-B_1C_1C$）. 若 P 为线段 CD 上一动点，平面 α 过点 P，且 $CD\perp$ 平面 α，设正方体棱长为1，$PD=x$，α 与图中鳖臑截面面积为 S，则点 P 从点 D 移动到点 C 的过程中，S 关于 x 的函数图象大致是（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

二、填空题（本大题共5小题，每小题5分，共25分.请把结果填在答题纸上的相应位置.）

11. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为2，则 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=$________.

12. 已知某圆锥的轴截面是边长为2的等边三角形，则此圆锥的表面积为________.

13. 平面与平面垂直的判定定理符号语言为：________________________

14. 在移动通信中，总是有很多用户希望能够同享一个发射媒介，进行无线通信，这种通信方式称为多址通信. 多址通信的理论基础是若用户之间的信号可以做到正交，这些用户就可以同享一个发射媒介. 在 n 维空间中，正交的定义是两个 n 维向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，$\boldsymbol{b}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ 满足 $x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n=0$. 已知某通信方式中用户的信号是4维非零向量，有四个用户同享一个发射媒介，已知前三个用户的信号向量为 $(0,0,0,1)$，$(0,0,1,0)$，$(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$，写出一个满足条件的第四个用户的信号向量________.

15. 一个三棱锥的三个侧面中有一个是边长为2的正三角形，另两个是等腰直角三角形，则该三棱锥的体积可能为________.

三、解答题（本大题共 3 小题，共 35 分，解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.）

16.（本题 10 分）

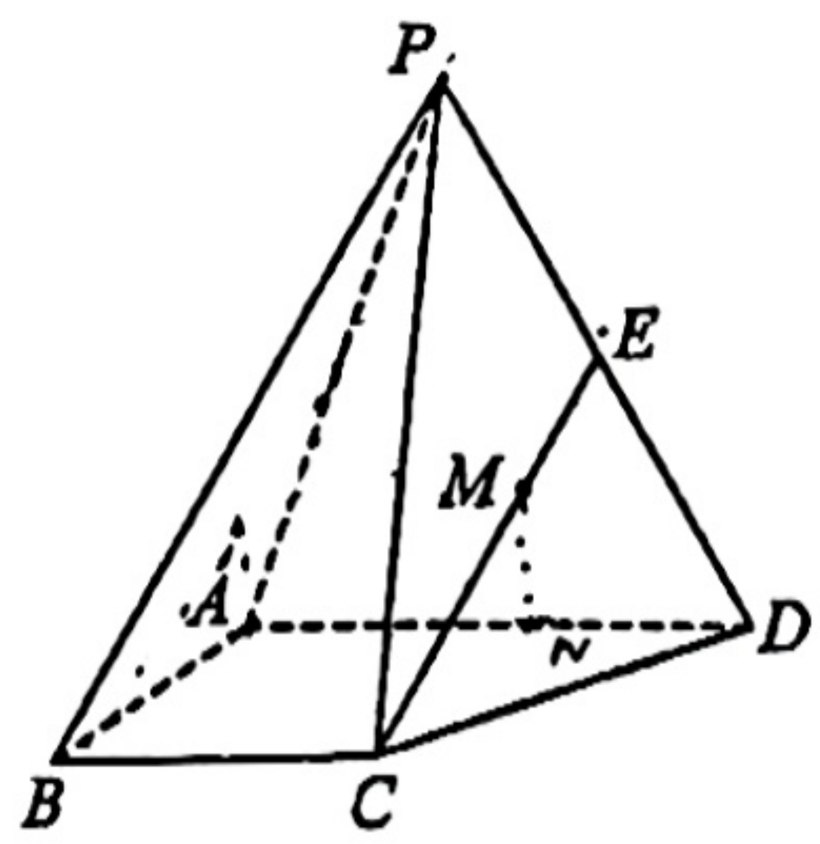
已知空间直角坐标系中四个点的坐标分别为：$A(1,1,1), B(1,2,3), C(4,5,6), D(7,8,x)$，

（I）求 $|\overrightarrow{AC}|$；

（II）若 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$，求 x 的值；

（III）若 D 点在平面 ABC 上，直接写出 x 的值.

17.（本题 12 分）



如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$BC\,/\!/$ 平面 PAD，

$BC=\dfrac{1}{2}AD$，E 是 PD 的中点.

（I）求证：$BC\,/\!/\,AD$；

（II）求证：$CE\,/\!/$ 平面 PAB；

（III）若 M 是线段 CE 上一动点，则线段 AD 上是否存在点 N，使 $MN\,/\!/$ 平面 PAB？并说明理由.

18.（本题 13 分）

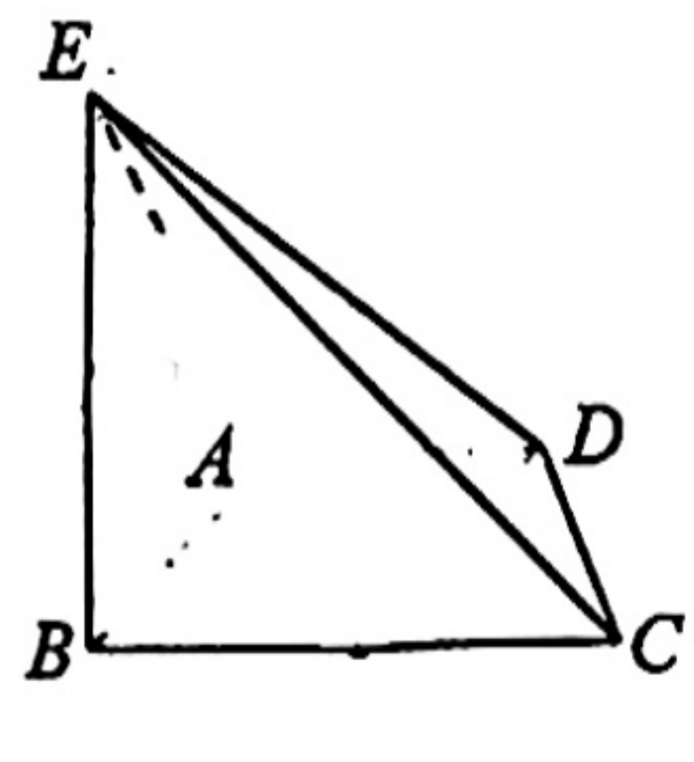
如图所示，已知四棱锥 $E-ABCD$ 中，$ABCD$ 是直角梯形，$\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$，

平面 $EAB\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=BC=BE=6, AD=3, AE=6\sqrt{2}$

（I）证明：$EB\perp$ 平面 $ABCD$；

（II）求 B 到平面 ADE 的距离；

（III）求二面角 $A-DE-C$ 的余弦值.



第 II 卷（共 8 道题，满分 50 分）

一、选择题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.）

19. 关于空间中的角，下列说法中正确的个数是（ ）

①空间中两条直线所成角的取值范围是$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

②空间中直线与平面所成角的取值范围是$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

③空间中二面角的平面角的取值范围是$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

④空间中平面与平面所成角的取值范围是$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

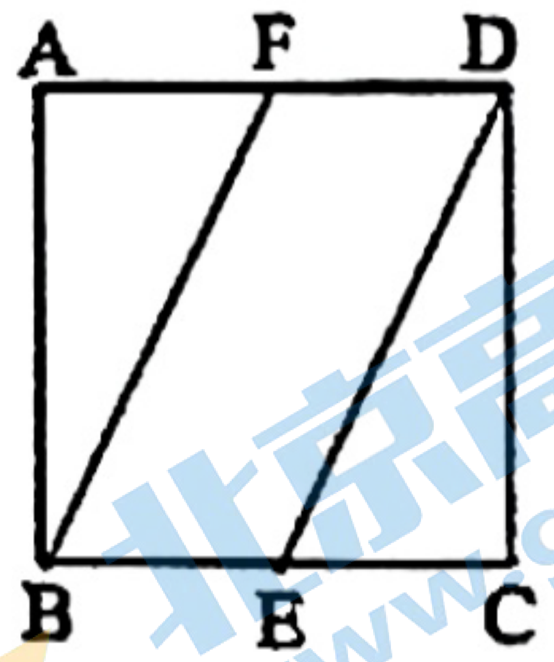
20. 如图，在正方形$ABCD$中，点E，F分别为边BC，AD的中点，将$\triangle ABF$沿BF所在直线进行翻折，将$\triangle CDE$沿DE所在直线进行翻折，在翻折的过程中，下列说法正确的是（ ）

A. 点A与点C在某一位置可能重合

B. 点A与点C的最大距离为$\sqrt{3}AB$

C. 直线AB与直线DE可能垂直

D. 直线AF与直线CE可能垂直



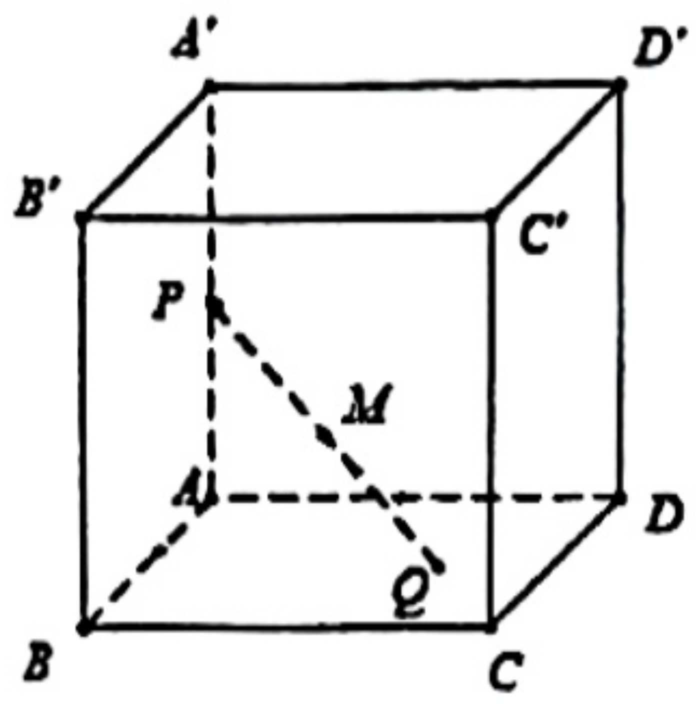
21. 在正方体$ABCD-A'B'C'D'$中，P为棱AA'上一动点，Q为底面$ABCD$上一动点，M是线段PQ的中点，若点P,Q都运动时，点M构成的点集是一个空间几何体，则这个几何体是（ ）

A. 棱柱

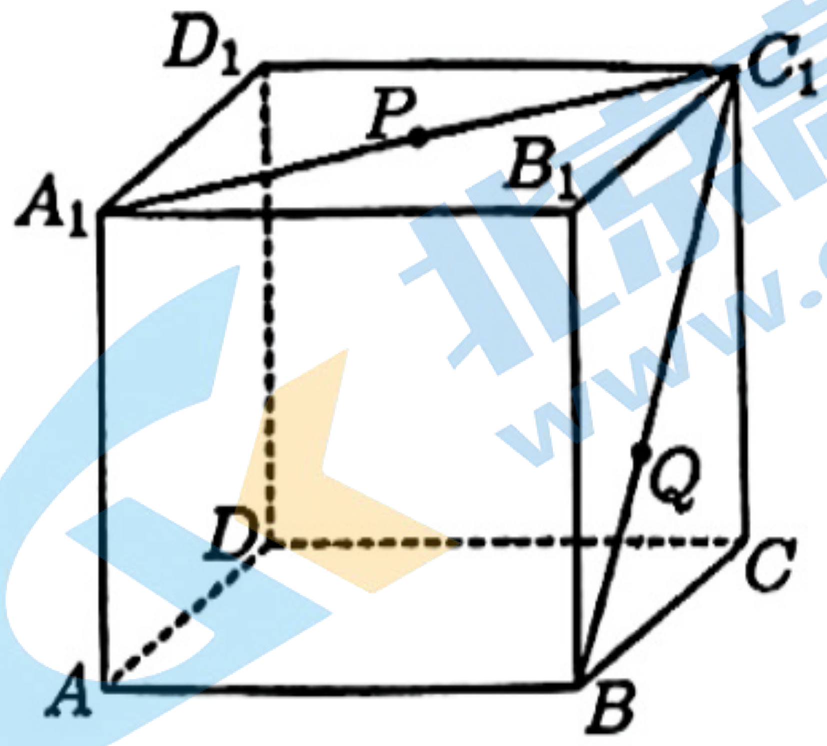
B. 棱台

C. 棱锥

D. 球的一部分



22．如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P为线段A_1C_1的中点，Q为线段BC_1上的动点，则下列结论正确的是（　）



A．存在点Q，使得$PQ \parallel BD$

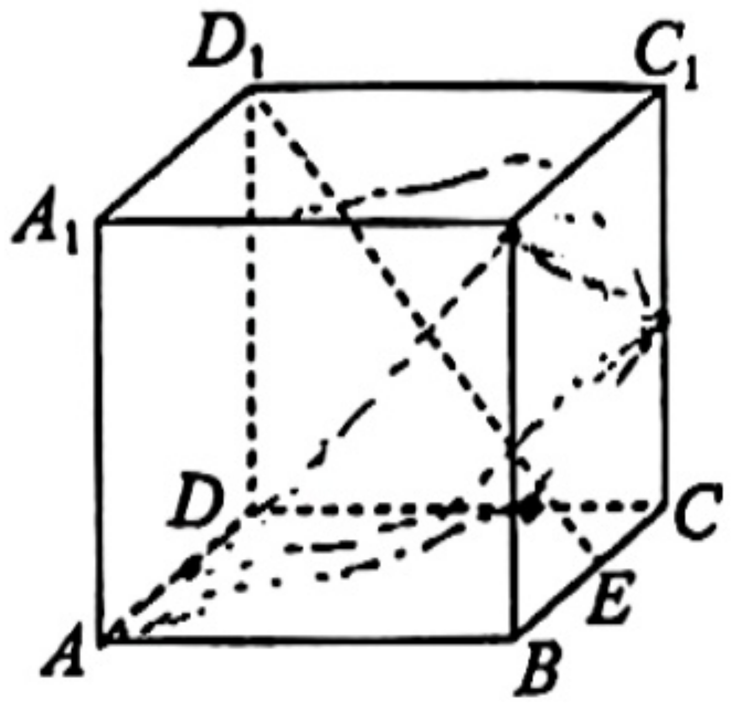
B．存在点Q，使得PQ与AD所成的角为$\frac{\pi}{6}$

C．三棱锥$Q-APD$的体积是定值

D．存在点Q，使得$PQ\perp$平面DB_1C_1

二、填空题（共3小题，每小题5分，共15分，把答案填在答题纸上的相应位置.）

23．如图，在边长为2正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为BC的中点，点P在正方体表面上移动，且满足$B_1P\perp D_1E$，则点B_1和满足条件的所有点P构成的图形的周长是________.



24．已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的所有侧棱长及底面边长都为2，D是侧棱CC_1的中点，则直线AD与平面A_1BD所成角的正弦值为________.

25．点O是正四面体$A_1A_2A_3A_4$的外接球球心，$|OA_i|=1(i=1,2,3,4)$.

若$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA_1}+\lambda_2\overrightarrow{OA_2}+\lambda_3\overrightarrow{OA_3}+\lambda_4\overrightarrow{OA_4}$，其中$0\le\lambda_i\le1(i=1,2,3,4)$，则动点$P$扫过的区域的体积为________.

三、解答题（本小题 15 分，解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.）

26. 已知自然数集 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}(n\in N^*)$，非空集合 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}\subseteq A(m\in N^*)$，

若集合 E 满足：

对任意 $a\in A$，存在 e_i，$e_j\in E(1\le i\le j\le m)$，使得 $a=xe_i+ye_j$，$x,y\in\{-1,0,1\}$，

称集合 E 为集合 A 的一组 m 元基底.

（I）分别判断下列集合 E 是否为集合 A 的一组二元基底，并说明理由；

①$E=\{1,2\}$，$A=\{1,2,3,4,5\}$；

②$E=\{2,3\}$，$A=\{1,2,3,4,5,6\}$.

（II）若集合 E 是集合 A 的一组 m 元基底，证明：$n\le m(m+1)$；

（III）若集合 E 为集合 $A=\{1,2,3,\cdots,19\}$ 的一组 m 元基底，求 m 的最小值.

人大附中 2023~2024 学年度第一学期高二年级数学期中练习

数学参考答案及评分标准

I卷

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B	（2）C	（3）B	（4）C	（5）B
（6）C	（7）C	（8）A	（9）C	（10）B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$2\sqrt{5}$　　（12）3π

（13）若 $l\perp\alpha, l\subset\beta$，则 $\beta\perp\alpha$　　（14）$(1,1,0,0)$（答案不唯一，$(a,a,0,0)$ 即可）

（15）$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 或 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ 或 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$（仅看正确答案，答出 1 个 2 分，2 个 3 分，答案全对 5 分）

三、解答题（共 3 小题，共 35 分）

（16）（共 10 分）

解（I）$\overrightarrow{AC}=(3,4,5)$，……1 分

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$……3 分

（II）$\overrightarrow{AB}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{CD}=(3,3,x-6)$，……5 分

因为 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，……6 分

即 $3+2(x-6)=0$，解得 $x=\dfrac{9}{2}$．……7 分

（III）$x=9$．……10 分

（17）（共 12 分）

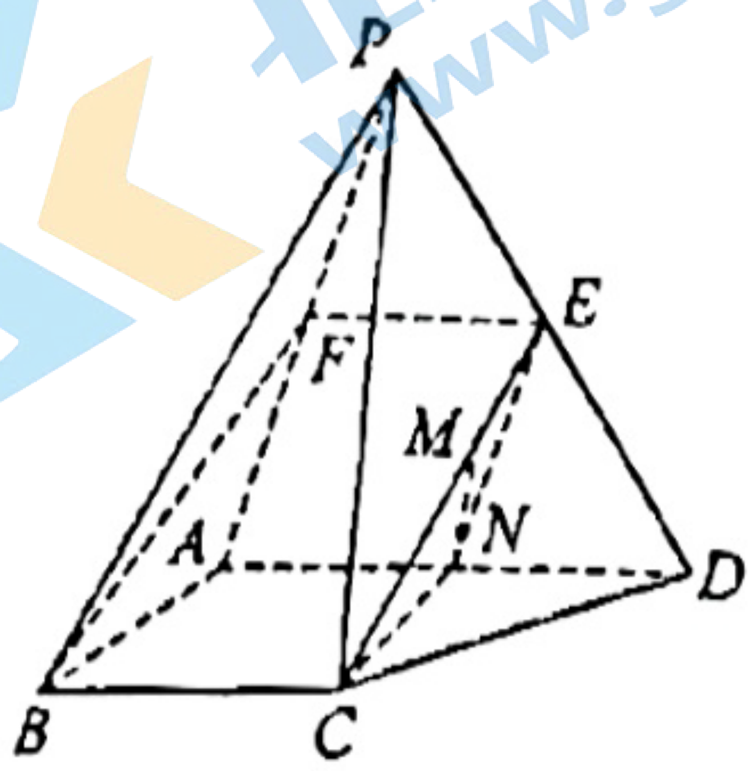
解：（I）因为 BC // 平面 PAD，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，……1 分

$BC\subset$ 平面 $ABCD$，……2 分

平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD$，……3 分

所以 BC // AD

（II）取 F 为 AP 中点，连接 EF,BF， ……………………………………………………………………4 分



因为 E、F 是 PD,PA 的中点，

所以 $EF \parallel AD$ 且 $EF=\frac{1}{2}AD$，

由（I）知 $BC \parallel AD$，又 $BC=\frac{1}{2}AD$，

所以四边形 $BCEF$ 为平行四边形. ………………5 分

所以 $CE \parallel BF$，

又 $BF \subset$ 平面 PAB， ……………………………………………………………………………6 分

$CE \not\subset$ 平面 PAB，

所以 $CE \parallel$ 平面 PAB ……………………………………………………………………………7 分

（若用面面平行证明则对应给分：辅助线 1 分；两个平行各 1 分，两条相交直线 1 分）

（III）线段 AD 存在点 N，使得 $MN \parallel$ 平面 PAB，理由如下： ……………………8 分

取 AD 中点 N，连接 CN，EN，

因为 E,N 分别为 PD，AD 的中点，所以 $EN \parallel PA$，

因为 $PA \subset$ 平面 PAB，

$EN \not\subset$ 平面 PAB，

所以 $EN \parallel$ 平面 PAB ……………………………………………………………………………10 分

由（II）知：$CE \parallel$ 平面 PAB，

又 $CE \cap EN = E$，$CE,EN \subset$ 平面 CEN，

所以平面 $CEN \parallel$ 平面 PAB，

又 M 是 CE 上的动点，$MN \subset$ 平面 CEN，

所以 $MN \parallel$ 平面 PAB，所以线段 AD 存在 N，使得 $MN \parallel$ 平面 PAB …………12 分

（18）（共 13 分）

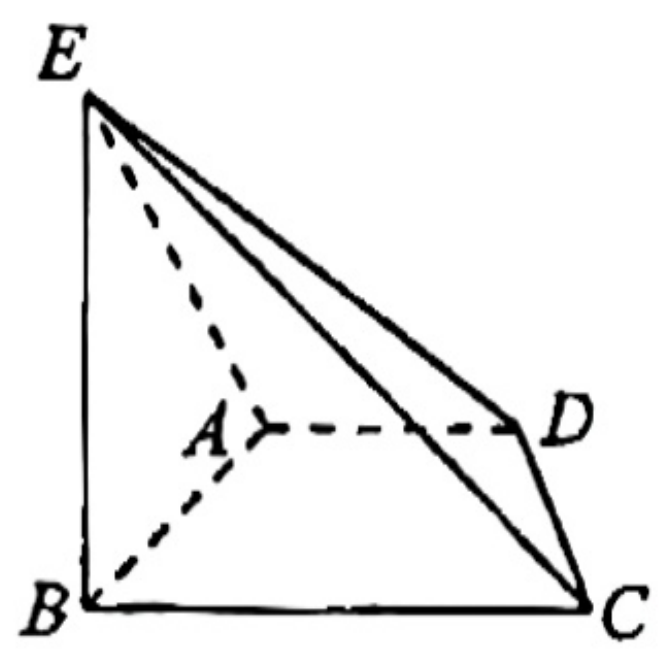
解：（I）在四棱锥$E-ABCD$中，

$AB=BE=6, AE=6\sqrt{2}$，

因为$AB^2+BE^2=AE^2$，由勾股定理逆定理得$EB\perp BA$ ……………………1 分

又因为平面$EAB\perp$平面$ABCD$，……………………2 分

平面$EAB\cap$平面$ABCD=AB$，…………………………3 分



$EB\subset$平面EAB，…………………………4 分

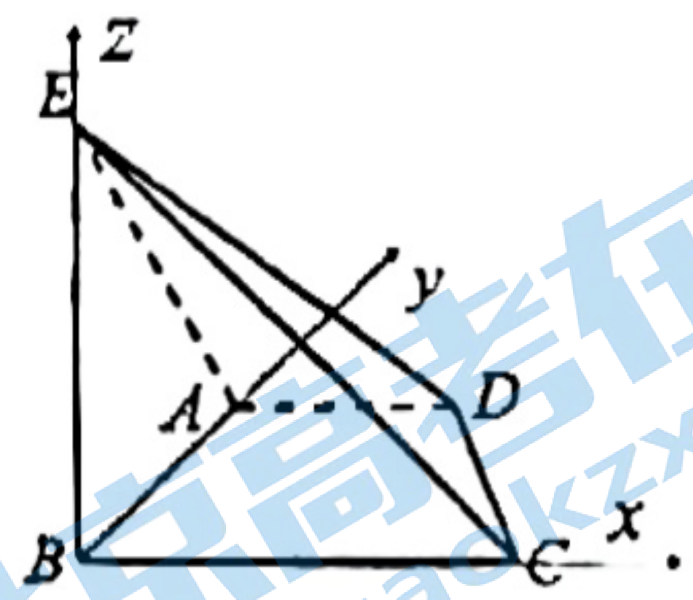
所以$EB\perp$平面$ABCD$；

（II）由（I）得$EB\perp$平面$ABCD$；

因为$BA,BC\subset$平面$ABCD$，

所以$EB\perp BA, EB\perp BC$，又$\angle ABC=90^\circ$，所以EB,BA,BC两两垂直，

以B为原点建立空间直角坐标系如图.



$A(0,6,0), D(3,6,0), E(0,0,6), C(6,0,0)$

$\overrightarrow{AD}=(3,0,0), \overrightarrow{AE}=(0,-6,6)$ ……………………5 分

设平面ADE的法向量$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AD}=3x_1=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AE}=-6y_1+6z_1=0\end{cases}$，令$y_1=1$，得$\overrightarrow{n_1}=(0,1,1)$ ………………………………6 分

设B到平面ADE距离为d，$\overrightarrow{BA}=(0,6,0)$，

则$d=\dfrac{|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{n_1}|}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ ……………………………………………………8 分

几何法过B作AE的垂线段，直接求出高，

证明是垂线段的过程线面垂直 2 分，答案 2 分；

等积法，体积 1 分，底面积 1 分，答案 2 分.

（Ⅲ）$\overrightarrow{CD}=(-3,6,0),\overrightarrow{CE}=(-6,0,6)$

设平面 DEC 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CD}=-3x_2+6y_2=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CE}=-6x_2+6z_2=0\end{cases}$，令 $y_2=1$，得 $\overrightarrow{n_2}=(2,1,2)$ ……………………10 分

$\cos<\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_2}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times 3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ……………………12 分

设二面角 $A-DE-C$ 为 θ，由图可知 θ 为钝角，

故 $\cos\theta=-\left|\cos<\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_2}>\right|=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………13 分

Ⅱ卷

一、选择题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

（19）C　（20）D　（21）A　（22）D

二、填空题（共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

（23）$3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$　（24）$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

（25）$\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！