数学试题（文科）

注意事项：

1.答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合 $A=\{x\mid -1<x\leq 3\}$，$B=\{x\mid x>0\}$，则 $A\cap B=$

A．$(-1,0]$　　B．$(-1,0)$　　C．$(0,3]$　　D．$(0,3)$

2．复数 $z=\sqrt{2}-i$，则 $|z|=$

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{5}$

3．命题“$\forall x>0$，$x^2+x>1$”的否定是

A．“$\exists x_0>0$，$x_0^2+x_0\leq 1$”　　B．“$\forall x\leq 0$，$x^2+x>1$”

C．“$\exists x_0>0$，$x_0^2+x_0<1$”　　D．“$\forall x\leq 0$，$x^2+x\leq 1$”

4．已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的部分图象如图 1，则图 2 可能是下列哪个函数的部分图象

A．$y=f(g(x))$

B．$y=f(x)g(x)$

C．$y=g(f(x))$

D．$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

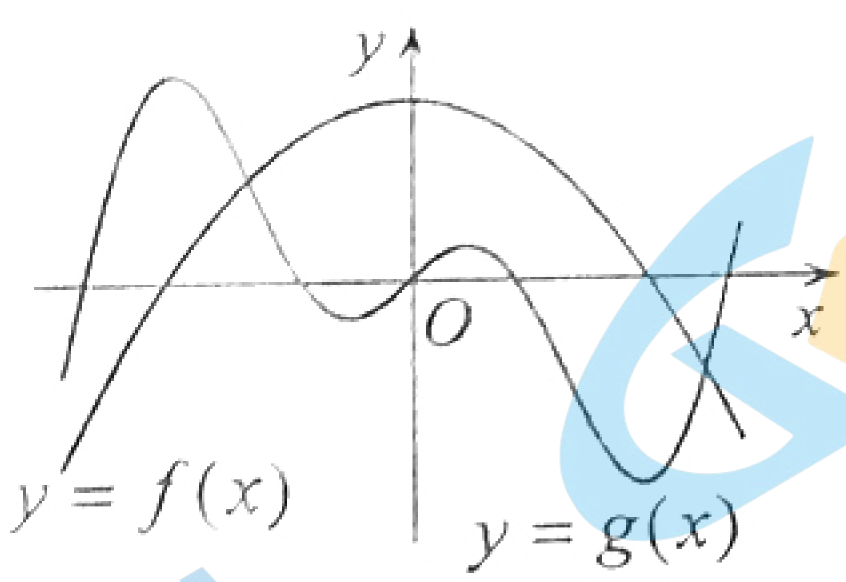


图 1

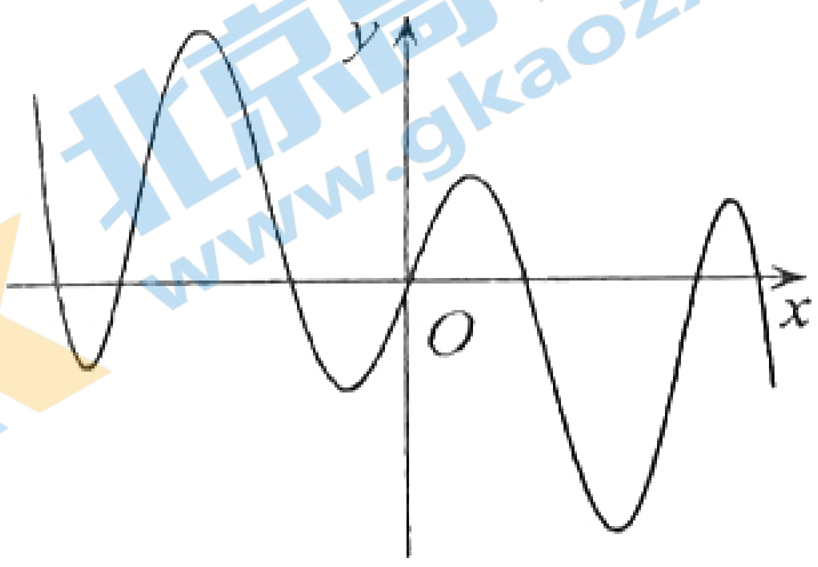


图 2

5．已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足，$f(1-x)+2f(x)=x^2+1$，则 $f(1)=$

A．-1　　B．1　　C．$-\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{1}{3}$

6．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=-5$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．3

7. [illegible]

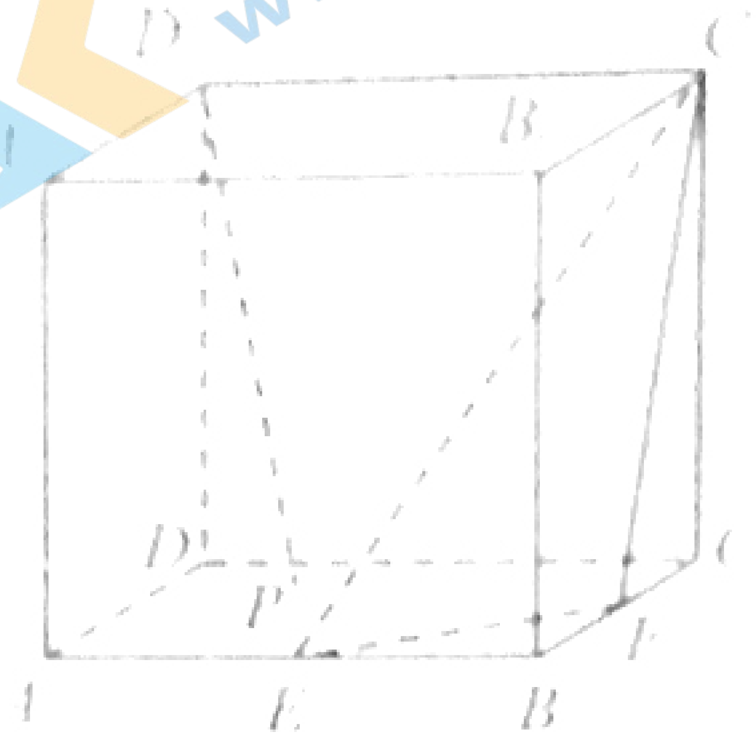
A. [illegible]　　　　B. [illegible]$\cos B$

C. [illegible]　　　　D. [illegible]$\sin B$

8. [illegible] $ABCD$ [illegible] P [illegible] $ABCD$ [illegible]

[illegible] AB, BC [illegible]

[illegible]



A. [illegible]

B. [illegible]

C. [illegible]

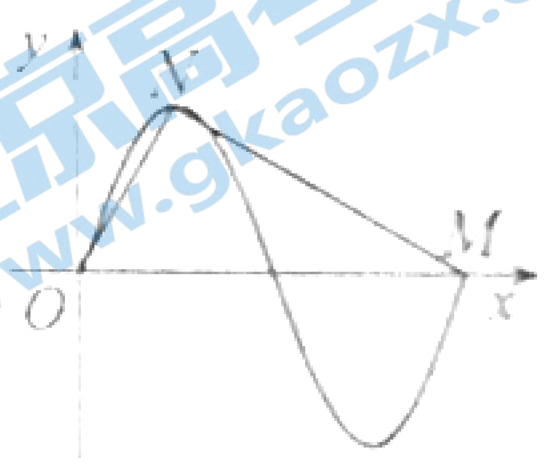
D. [illegible]

9. [illegible]是圆 $x^2+y^2=1$ 上的点，下列结论正确的是

A. [illegible]$\frac{1}{2}$　　　　B. 2^a+2^b 最大值是 $2\sqrt{2}$

C. $2^{[illegible]} \geqslant 3^{[illegible]}$　　　　D. $2\lg|a| \geqslant \lg(1+b)$

10. 函数 $f(x)=A\sin\omega x(A>0,\omega>0)$ 的部分图象如图，O 为坐标原点，M 点是该图象与 x 轴的一个交点，N 点是该图象的一个最高点，且 $ON\perp MN$，$|ON|=\sqrt{3}$，则 A 与 ω 分别等于



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$，π　　　　B. $\frac{3}{2}$，π

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{2\pi}{3}$　　　　D. $\frac{3}{2}$，$\frac{2\pi}{3}$

11. 已知圆锥的底面圆周和顶点都在一半径为1的球的球面上，当圆锥体积为球体积的 $\frac{1}{4}$ 时，圆锥的高为

A. $\frac{2-\sqrt{5}}{2}$　　B. 1　　C. 1或 $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$　　D. 1或 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

12. 已知 $F(-c,0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，直线 $y=x+c$ 与该椭圆相交于 M，N 两点，O 是坐标原点，P 是线段 OF 的中点，线段 MN 的中垂线与 x 轴的交点在线段 PF 上，该椭圆离心率的取值范围是

A. $[\frac{\sqrt{[illegible]}}{3},1)$　　B. $[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$　　C. $(0,\frac{\sqrt{6}}{3}]$　　D. $[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．二元一次不等式组 $\begin{cases} x-y\leqslant -2, \\ x+y\leqslant 2, \\ x\geqslant -1. \end{cases}$ 表示的平面区域的面积是________.

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+1,\ x\leqslant 0, \\ x^2,\ x>0. \end{cases}$ 若 $g(x)=f(x)-a$ 仅有两个不同零点，则实数 a 的取值范围是________.

15．若 A，B 为双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 的左，右焦点，C 为该双曲线上一点，且 $\cos\angle ACB=\dfrac{3}{5}$，则 $\triangle ABC$ 的周长为________.

16．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-2^{n-1}+3$，若该数列中有且仅有三项满足 $\lambda\leqslant a_n$，则实数 λ 的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分．

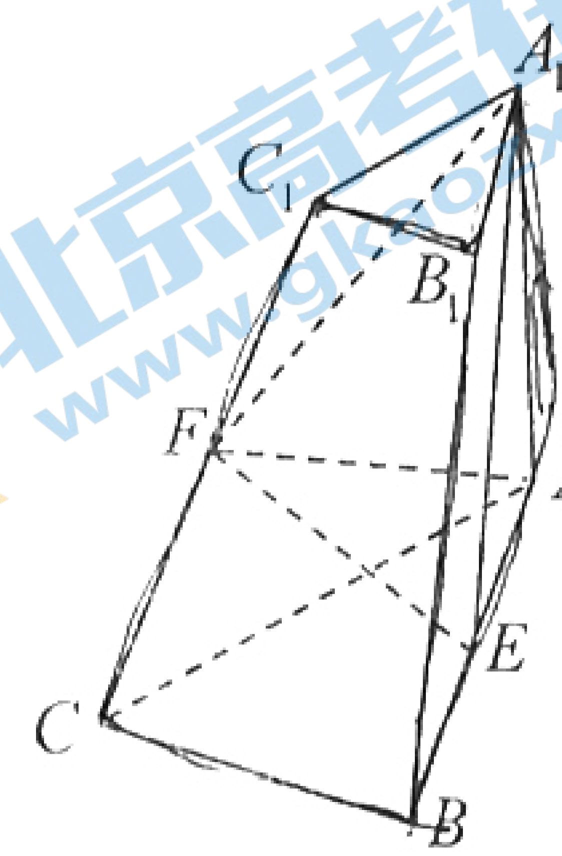
17．(12 分)

设 $\triangle ABC$ 中角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$A=\dfrac{\pi}{3}$.

(1)若 $c=2$，$a=2\sqrt{3}$，求 b；

(2)求 $\sin B+\sin C$ 的取值范围.

18．(12 分)



如图的三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$A_1B_1\perp B_1C_1$，$AA_1=AB=2A_1B_1=2BC=2$.

(1) 求证：平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 ABB_1A_1；

(2) 若 E,F 分别为 AB，CC_1 的中点，求三棱锥 A_1-AEF 的体积.

19．(12 分)

在能源和环保的压力下，新能源汽车将成为未来汽车的发展方向．我国大力发展新能源汽车的生产和销售．某市近 6 年的新能源汽车保有量数据如下表

年份代号 x	1	2	3	4	5	6
保有量 y（万辆）	1	1.8	2.7	4	5.9	9.2

(1)从这 6 年中任意抽取连续两年，求后一年比前一年的保有量增长率大于等于 50%的概率；

(2)用函数模型 $y=bx+a$ 对两个变量 x,y 的关系进行拟合，根据表中数据求出 y 关于 x 的回归方程.

参考数据：$\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=113.4$，$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=91$

参考公式：回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2},\quad \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

20．(12 分)

已知点 $F(\frac{1}{6},0)$，直线 $l:x=-\frac{1}{6}$，动点 P 到点 F 与到直线 l 的距离相等.

(1)求动点 P 的轨迹 C 的方程；

(2)过 C 上一点 $M(3,\sqrt{2})$ 作圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的两条切线分别与轨迹 C 交于异于 M 点的 A，B 两点，求 $|AB|$.

21．(12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+ax+\cos x$.

(1)若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，求实数 a 的取值范围；

(2)设 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$，若 $g(x)$ 存在两条相互垂直的切线，求函数 $F(x)=\frac{\sin x-g(x)+1}{x}$ 在区间 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上的最小值.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程](10 分)

直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t-1.\end{cases}$ (t 为参数)，以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2(1+2\sin^2\theta)=3$.

(1)求 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

(2)点 A，B 为 C_1 与 C_2 的交点，C 为曲线 C_2 上一点，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

23．[选修 4-5：不等式选讲](10 分)

已知 $f(x)=|x-1|-a|x+1|$.

(1)若 $a=1$，解不等式 $f(x)\leqslant 1$；

(2)若不等式 $f(x)\leqslant 1$ 无解，求实数 a 的取值范围.

达州市普通高中2021届第二次诊断性测试

文科数学参考答案

一、选择题：

1. C　2. C　3.A　4.B　5.B　6.D　7.D　8. B　9. C　10. A　11.D　12.A

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13．1　　14．(0, 1]　　15．24　　16．(1, 3]

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．解：(1) $\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$\therefore 12=b^2+4-2\times2\times b\times\frac{1}{2}$.

$\therefore b^2-2b-8=0$　$\therefore b=4$.

(2) $\because A=\frac{\pi}{3}$，　$\therefore B+C=\frac{2\pi}{3}$，$C=\frac{2\pi}{3}-B$.

$\therefore \sin B+\sin C=\sin B+\sin(\frac{2\pi}{3}-B)=\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{6})$，

又$\because 0<B<\frac{2\pi}{3}$，$\frac{1}{2}<\sin(B+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$.

$\therefore \sin B+\sin C$的取值范围是$(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}]$.

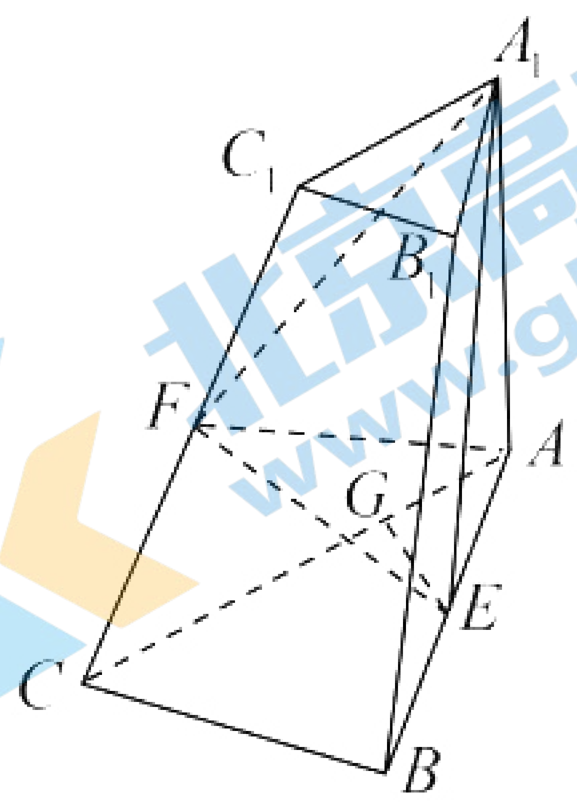
18．解：(1) $\because$三棱台$ABC-A_1B_1C_1$，　$A_1B_1\perp B_1C_1$，　$\therefore AB\perp BC$.

$\because AA_1\perp$平面ABC，　$\therefore AA_1\perp BC$.

$\because AA_1\cap AB=A$且都在平面ABB_1A_1内，　$\therefore BC\perp$平面ABB_1A_1.

又$\because BC$在平面BCC_1B_1内，　$\therefore$平面$BCC_1B_1\perp$平面ABB_1A_1.

(2) 如图，过点E作$EG\perp AC$，　$EG\cap AC=G$.



$\because AA_1\perp$平面ABC，

$\therefore$平面$AA_1C_1C\perp$平面ABC.

又平面$AA_1C_1C\cap$平面$ABC=AC$

$\therefore EG\perp$平面AA_1C_1C，

$\therefore EG$为三棱锥$E-AA_1F$的高，

且$V_{A_1-AEF}=V_{E-AA_1F}=\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1F}\cdot GE$.

$\because S_{\triangle AA_1F}=\frac{3\sqrt{5}}{4}$，　$GE=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore V_{A_1-AEF}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{5}}{4}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{4}$.

19．解：(1) 连续两年一共5种情况，满足后一年比前一年增幅大于等于50%的有3种，

故所求概率为$\frac{3}{5}$.

(2) $\bar{x}=3.5$，　$\bar{y}=4.1$.

$$\therefore \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\frac{113.4-6\times3.5\times4.1}{91-6\times3.5^2}=1.56,$$

$\therefore \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=4.1-1.56\times3.5=-1.36$.

$\therefore y=1.56x-1.36$.

20. 解：(1) 设点 $P(x,y)$，根据题意得：$\sqrt{(x-\frac{1}{6})^2+y^2}=|x+\frac{1}{6}|$，

化简得动点 P 的轨迹方程为 $y^2=\frac{2}{3}x$.

(2) $\because M(3,\sqrt{2})$，$(x-2)^2+y^2=1$

$\therefore x=3$ 即圆的一条切线，$A(3,-\sqrt{2})$.

设过 M 的另一条切线斜率为 k，$\therefore$ 切线方程：$y-\sqrt{2}=k(x-3)$，设 $B(x_1,y_1)$

由方程组 $\begin{cases}y-\sqrt{2}=k(x-3),\\ y^2=\frac{2}{3}x.\end{cases}$ 得，$y^2-\frac{2}{3k}y+\frac{2\sqrt{2}}{3k}-2=0$，

$\therefore \sqrt{2}+y_1=\frac{2}{3k}$，$y_1=\frac{2}{3k}-\sqrt{2}$.

又 $\because$ 直线为 $y-\sqrt{2}=k(x-3)$，其与圆相切，

$\therefore \frac{|2k-0-3k+\sqrt{2}|}{\sqrt{k^2+1}}=1$ $\therefore k=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore y_1=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\because B$ 满足 $y^2=\frac{2}{3}x$，$\therefore B(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{3})$.

$\therefore \overrightarrow{AB}=(-\frac{8}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3})$，

$\therefore |AB|=|\overrightarrow{AB}|=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

21. 解：(1) $\because f'(x)=x+a-\sin x$，$f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的增函数，

$\therefore x\geqslant0$，$f'(x)=x+a-\sin x\geqslant0$，$\therefore a\geqslant\sin x-x$.

设 $g(x)=\sin x-x(x\geqslant0)$，$\because g'(x)=\cos x-1\leqslant0$，

$\therefore g(x)$ 为减函数，$g(x)\leqslant g(0)=0$.

所以，实数 a 的取值范围是 $[0,+\infty)$.

(2) $\because g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2=ax+\cos x$，$\therefore g'(x)=a-\sin x$.

设在 x_1,x_2 处切线相互垂直，$\therefore g'(x_1)g'(x_2)=-1$，

即 $(a-\sin x_1)(a-\sin x_2)=-1$，

$\therefore a^2-(\sin x_1+\sin x_2)a+\sin x_1\sin x_2+1=0$.

$\therefore \Delta=(\sin x_1+\sin x_2)^2-4(\sin x_1\sin x_2+1)=(\sin x_1-\sin x_2)^2-4\geqslant0$.

又 $\because (\sin x_1-\sin x_2)^2\leqslant4$ $\therefore (\sin x_1-\sin x_2)^2=4$，

即 $\sin x_1=1,\ \sin x_2=-1$，或 $\sin x_1=-1$，$\sin x_2=1$

当$\sin x_1=1$，$\sin x_2=-1$时，$a^2=0$，$\therefore a=0$．

当$\sin x_1=-1$，$\sin x_2=1$时，$a^2=0$，$\therefore a=0$．

综上，$a=0$．

$\therefore F(x)=\dfrac{\sin x-\cos x+1}{x}$，即 $F(x)=\dfrac{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})+1}{x}$．

函数$h(x)=\sin(x-\frac{\pi}{4})$在区间$[\frac{\pi}{2},\pi]$上关于$x=\frac{3\pi}{4}$对称，在区间$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$上单调递增，在区间$[\frac{3\pi}{4},\pi]$单调递减．$\therefore$对$\forall x_1\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$，$\exists x_2\in[\frac{3\pi}{4},\pi]$，使得$h(x_1)=h(x_2)$，即$F(x_1)=$

$$\frac{\sqrt{2}\sin(x_1-\frac{\pi}{4})+1}{x_1}=\frac{\sqrt{2}\sin(x_2-\frac{\pi}{4})+1}{x_1}>\frac{\sqrt{2}\sin(x_2-\frac{\pi}{4})+1}{x_2}=F(x_2).$$

$\because F(x)$是区间$[\frac{3\pi}{4},\pi]$的单调减函数，

所以，当$F(x)$在区间$[\frac{\pi}{2},\pi]$的最小值是$F(\pi)=\frac{2}{\pi}$．

22．解：(1) 消去参数方程$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t-1.\end{cases}$中的参数$t$，得到曲线$C_1$的普通方程为$y=x-1$．

分别将$\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta=y$代入$\rho^2(1+2\sin^2\theta)=3$即$\rho^2+2(\rho\sin\theta)^2=3$，并化简得曲线$C_2$的直角坐标方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$．

(2) $\because\begin{cases}y=x-1\\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=1\end{cases}$，$\therefore 4x^2-6x=0$，

$\therefore |AB|=\sqrt{1+1}\,|0-\frac{3}{2}|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$．

设$C(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$，点$C$到$AB$距离为$d$，

$\therefore d=\dfrac{|\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta-1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|2\cos(\theta+\frac{\pi}{6})-1|$，

$\therefore d_{\max}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore (S_{\triangle ABC})_{\max}=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{4}$．

23．解：(1) $\because a=1$，$\therefore$解不等式$f(x)\leqslant 1$就是解不等式$|x-1|-|x+1|\leqslant 1$．

当$x<-1$时，原不等式可化为$1-x+x+1\leqslant 1$，$\therefore x\in\varnothing$．

当$-1\leqslant x\leqslant 1$时，原不等式可化为$1-x-x-1\leqslant 1$，$\therefore -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$．

当$x>1$时，原不等式可化为$x-1-x-1\leqslant 1$，$\therefore x>1$．

所以，原不等式解集为$[-\frac{1}{2},+\infty)$．

(2) $f(x)=|x-1|-a|x+1|$,

$$\therefore f(x)=\begin{cases}(a-1)x+a+1, x<-1,\\(-a-1)x-a+1, -1\leqslant x\leqslant 1,\\(1-a)x-a-1, x>1.\end{cases}$$

当$a\leqslant -1$时，$f(x)_{\min}=f(-1)=2>1$，$\therefore$原不等式无解成立.

当$-1<a<1$时，$f(x)_{\min}=f(1)=-2a$，要原不等式无解，$\therefore -2a>1$，$a<-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore -1<a<-\dfrac{1}{2}$.

当$a\geqslant 1$时，$f(0)=1-a\leqslant 0$，$\therefore$原不等式一定有解.

综上，实数a的取值范围是$(-\infty,-\dfrac{1}{2})$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。