绝密★启用前

安徽省普通高中高三春季阶段性检测

数　学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x|x^2-4>0\}$ 和 $N=\{x|-3<x<1\}$，则 $(\complement_R M)\cap N=$

A. $(-3,-2)$　　B. $(-2,1)$

C. $[-2,1)$　　D. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

2. 复数 $z=\dfrac{5i}{1-2i}$ 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知非零向量 a,b 满足 $a\perp b$，设甲：$|a|=|b|$，乙：$|2a-b|=|2b+a|$，则

A. 甲是乙的充要条件

B. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

C. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

4. 某研究机构通过统计分析发现，教师的工作效率 E 与工作年数 $r(r>0)$、劳累程度 $T(0<T<1)$ 有关，并建立了数学模型 $E=10-10T\cdot 2^{-0.14r}$，已知李老师工作了20年，根据上述公式，与工作10年时相比，如果他的工作效率不变，则他现在的劳累程度是工作10年时劳累程度的

A. $2^{-2.8}$倍　　B. $2^{1.4}$倍　　C. $2^{2.8}$倍　　D. $2^{5.6}$倍

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{15}=3$，且当 $n>2$ 时，$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$，则 $a_2=$

A. -4　　B. -3　　C. 3　　D. 4

6. 设$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$b=\sqrt{13}c$,D为边BC上一点,$CD=2BD=2$,$AD=\sqrt{3}$,则$\triangle ABC$的面积为

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

7. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$,过C的焦点F且倾斜角为$\frac{\pi}{3}$的直线交C于A,B两点,线段AB的中点为W,$|FW|=\frac{4}{3}$,则$p=$

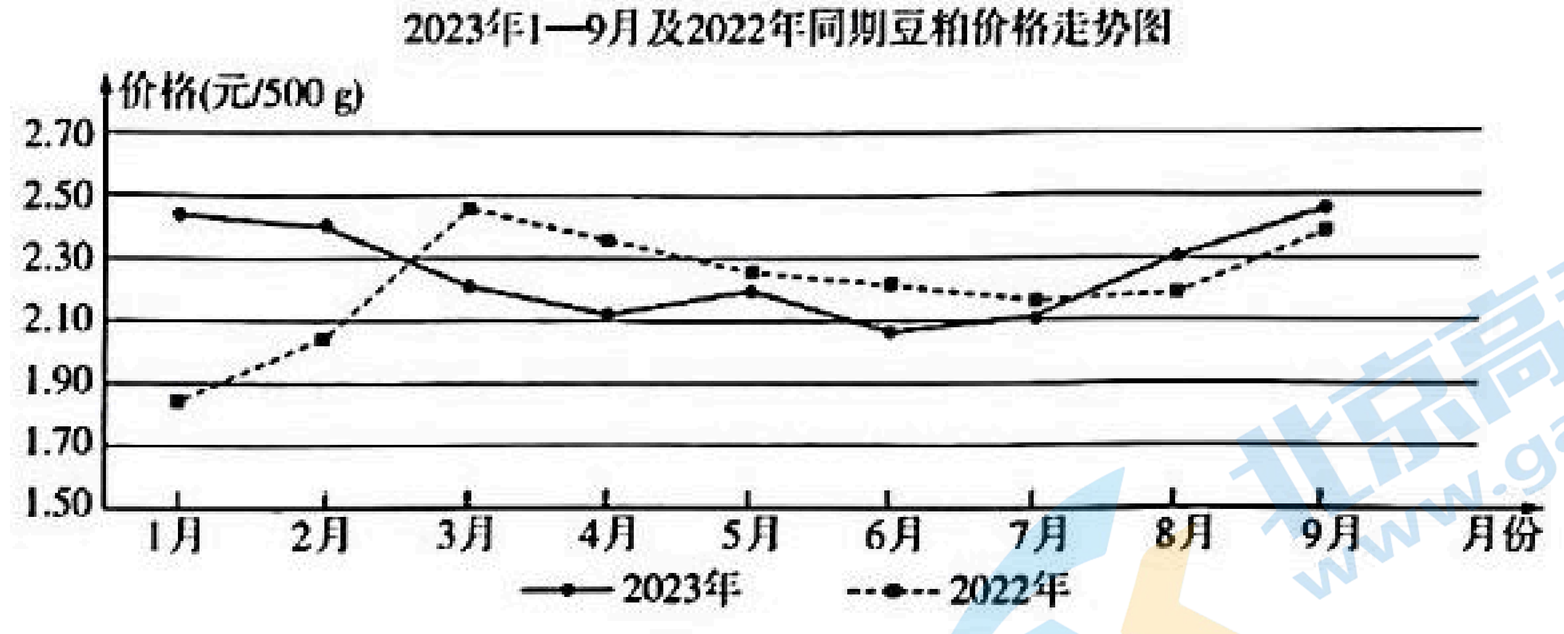
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 设$a=\ln 1.01$,$b=\frac{1}{101}$,$c=\tan 0.01$,则

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<c<a$　　D. $b<a<c$

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 某专业饲料市场研究机构统计得到 2023 年 1—9 月和 2022 年同期的豆粕价格走势图如图所示,则



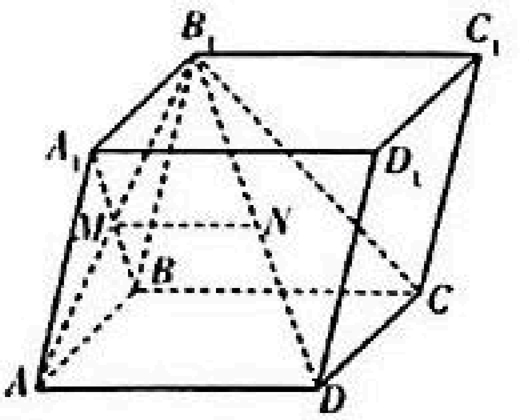
A. 2023 年 1—9 月的豆粕价格仅有 4 个月低于 2022 年同期

B. 从极差来看,2022 年 1—9 月的豆粕价格比 2023 年同期波动范围更大

C. 2023 年 1—9 月的豆粕价格的中位数为 2.30

D. 2022 年 1—9 月的豆粕价格的平均数低于 2.30

10. 如图,在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,底面$ABCD$为正方形,平面$ABCD\perp$平面ABB_1A_1,$\triangle A_1AB$是边长为 2 的等边三角形,M,N分别是线段A_1B,DB_1的中点,则



A. $A_1B\perp B_1D$

B. MN∥平面$ABCD$

C. B_1C与A_1B所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$

D. B_1D与平面$ABCD$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$

11. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，左、右顶点分别为 A,B，上顶点为 D，P 是 E 上异于 A,B 的一个动点，若 $\frac{|AF_1|}{|BF_1|}=7-4\sqrt{3}$，则

A. E 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 直线 PA 与 PB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$

C. 满足 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$ 的点 P 有 4 个

D. $|PD|<2\sqrt{2}b$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 若 $f(x)=x^3+(a-1)\cos x+a\sin x$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为__________.

13. 某商场搞抽奖活动，将 30 副甲品牌耳机和 20 副乙品牌耳机放入抽奖箱中，让顾客从中随机抽 1 副，两个品牌的耳机外包装相同，耳机的颜色都只有黑色和白色，记事件 $A=$“抽到白色耳机”，$B=$“抽到乙品牌耳机”，若 $P(A|B)=\frac{3}{4}$，$P(B|A)=\frac{3}{7}$，则抽奖箱中甲品牌的黑色耳机有__________副.

14. 若正四面体 $ABCD$ 的顶点都在一个表面积为 6π 的球面上，过点 C 且与 BD 平行的平面 α 分别与棱 AB,AD 交于点 E,F，则空间四边形 $BCFE$ 的四条边长之和的最小值为__________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

某大棚种植户通过长期观察统计，发现去年本地市场中黄瓜每天的收购价格 X(元/kg)服从正态分布 $N(4,1)$，规定收购价格在 $(3,6)$ 内的为“合理价格”.

(Ⅰ) 从去年随机抽取 10 天，记这 10 天中黄瓜的收购价格是“合理价格”的天数为 Y，求 $E(Y)$；

(Ⅱ) 该大棚种植户为家乡的农产品做了 5 次直播带货，成交额 y(万元)如下表所示：

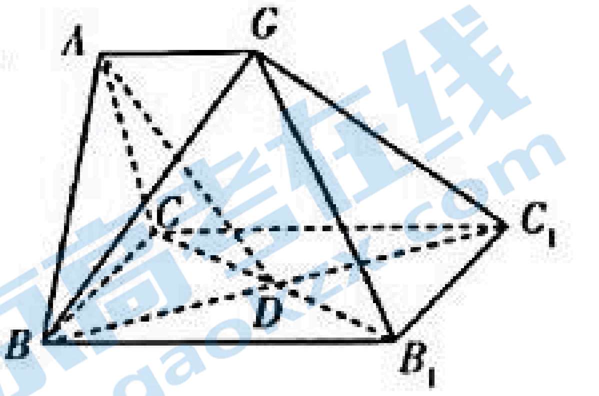
第 x 次直播带货	1	2	3	4	5
成交额 y(万元)	9	12	17	21	27

若用最小二乘法得到的 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+3.7$，预计该大棚种植户第 7 次直播带货的成交额为多少万元.

附：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6827$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9545$.

16. (15 分)

如图,等边三角形 ABC 与正方形 BCC_1B_1 所在平面垂直,且 $AB=2$, $AG/\!/BB_1$, CB_1 与 BC_1 的交点为 D, $AD/\!/$平面 GB_1C_1.



(Ⅰ)求线段 AG 的长度;

(Ⅱ)求平面 BC_1G 与平面 GB_1C_1 夹角的余弦值.

17. (15 分)

已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n, $a_n\neq 0$, $a_na_{n+1}=2S_n$, $\{b_n\}$是各项均为正数的等比数列, $b_7+b_8=8(b_4+b_5)$,且 $b_1=2$.

(Ⅰ)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)设 $c_n=\begin{cases}\dfrac{1}{a_na_{n+2}}, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{a_n}{b_n}, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 T_n,证明: $T_{2n}<\dfrac{25}{18}$.

18. (17 分)

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左顶点为 $A(-2,0)$,过点 $H(4,0)$的动直线 l 交 C 于 P,Q 两点(均不与 A 重合),当 l 与 x 轴垂直时, $|PQ|=6$.

(Ⅰ)求 C 的方程;

(Ⅱ)若直线 AP 和 AQ 分别与直线 $x=-4$ 交于点 M 和 N,证明: $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{NH}$为定值.

19. (17 分)

已知函数 $f(x)=(x+a)e^x+x-a$.

(Ⅰ)若 $a=1$,分析 $f(x)$的单调性;

(Ⅱ)若 $a<-2$,证明: $f(x)$在$(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$内各恰有一个零点,并且这两个零点互为相反数.

天一大联考

安徽省普通高中高三春季阶段性检测

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　C

命题意图　本题考查集合的表示与运算.

解析　$\because M=\{x|x^2-4>0\}=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$,$\therefore \complement_{\mathbf{R}}M=[-2,2]$,$\therefore (\complement_{\mathbf{R}}M)\cap N=[-2,1)$.

2. 答案　B

命题意图　本题考查复数的几何意义.

解析　因为 $z=\frac{5i}{1-2i}=\frac{5i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{5(-2+i)}{5}=-2+i$,所以 z 在复平面内对应的点为 $(-2,1)$,位于第二象限.

3. 答案　A

命题意图　本题考查向量的运算性质、充分条件与必要条件的判断.

解析　乙:$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}|$ 等价于 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})^2$,即 $4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}^2$,因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以乙又等价于 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$,即 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,所以甲、乙互为充要条件.

4. 答案　B

命题意图　本题考查指数的运算性质.

解析　设李老师现在的劳累程度为 T_1,工作 10 年时的劳累程度为 T_2,根据题意得 $10-10T_1\cdot 2^{-0.14\times 20}=10-10T_2\cdot 2^{-0.14\times 10}$,所以 $\frac{T_1}{T_2}=2^{-0.14\times 10+0.14\times 20}=2^{0.14\times 10}=2^{1.4}$

5. 答案　D

命题意图　本题考查递推数列的应用.

解析　设 $a_2=x$,由题意可得 $a_3=x-1$,$a_4=-1$,$a_5=-x$,$a_6=1-x$,$a_7=1$,$a_8=x$,$\cdots$,则 $\{a_n\}$ 是周期数列且周期为 6,所以 $a_{15}=a_3=x-1=3$,所以 $a_2=x=4$.

6. 答案　C

命题意图　本题考查余弦定理的应用.

解析　设 $\angle ADB=\theta$,在 $\triangle ACD$ 中,$b^2=4+3+2\times 2\times\sqrt{3}\cos\theta=7+4\sqrt{3}\cos\theta$,在 $\triangle ABD$ 中,$c^2=1+3-2\times\sqrt{3}\cos\theta=4-2\sqrt{3}\cos\theta$,所以 $\frac{b^2}{c^2}=\frac{7+4\sqrt{3}\cos\theta}{4-2\sqrt{3}\cos\theta}=13$,解得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\sin\theta=\frac{1}{2}$,所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

7. 答案　B

命题意图　本题考查抛物线与直线的位置关系.

解析 设 $W(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}y_1^2=2px_1,\\y_2^2=2px_2,\end{cases}$ 两式相减，可得 $(y_1+y_2)(y_1-y_2)=2p(x_1-x_2)$，所以 $2\sqrt{3}y_0=2p$，所以 $y_0=\dfrac{\sqrt{3}p}{3}$，代入直线 $AB: y=\sqrt{3}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$，得 $x_0=\dfrac{5p}{6}$，所以 $W\left(\dfrac{5p}{6},\dfrac{\sqrt{3}p}{3}\right)$，所以 $|FW|=\sqrt{\left(\dfrac{5p}{6}-\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{p^2}{3}}=\dfrac{2p}{3}=\dfrac{4}{3}$，解得 $p=2$.

8. **答案** D

命题意图 本题考查利用函数性质比较大小.

解析 设 $f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，则当 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2\times\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $f(1.01)>f(1)=0$，所以 $\ln 1.01>\dfrac{0.02}{2.01}=\dfrac{2}{201}>\dfrac{1}{101}$，即 $a>b$. 易知当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\tan x>x$，所以 $\tan 0.01>0.01$，又当 $x>1$ 时，$x-1>\ln x$，所以 $0.01>\ln 1.01$，所以 $\tan 0.01>\ln 1.01$，即 $c>a$. 故 $c>a>b$.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 每小题全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. **答案** BD

命题意图 本题考查统计图表的应用.

解析 对于 A，2023 年 3 月、4 月、5 月、6 月、7 月的豆粕价格低于 2022 年同期，故 A 错误；

对于 B，2022 年的极差约为 0.6，2023 年的极差约为 0.4，故 B 正确；

对于 C，2023 年的中位数是 3 月的数据，小于 2.30，故 C 错误；

对于 D，2022 年 3 月、4 月、9 月的豆粕价格高于 2.30，且与 2.30 的差都不大于 0.2，而其余月份均低于 2.30，且 1 月、2 月的豆粕价格与 2.30 的差分别大于 0.4，0.2，故 2022 年 1—9 月的豆粕价格的平均数低于 2.30，故 D 正确.

10. **答案** ABD

命题意图 本题考查空间位置关系的判断以及空间角的计算.

解析 对于 A，因为四边形 $ABCD$ 是正方形，平面 $ABCD\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以 $AD\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以 $AD\perp A_1B$，易知侧面 ABB_1A_1 为菱形，所以 $A_1B\perp AB_1$，又 $AD\cap AB_1=A$，所以 $A_1B\perp$ 平面 AB_1D，所以 $A_1B\perp B_1D$，故 A 正确；

对于 B，由题意知 MN 为 $\triangle AB_1D$ 的中位线，所以 $MN/\!/AD$，又 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，$MN\not\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $MN/\!/$ 平面 $ABCD$，故 B 正确；

对于 C，连接 AC，取 AC 的中点 O，连接 OM，OB，则 $OM/\!/B_1C$，则 $\angle BMO$（或其补角）为 B_1C 与 A_1B 所成的角，由已知可得 $OM=\sqrt{2}$，$OB=\sqrt{2}$，$BM=1$，所以 $\cos\angle BMO=\dfrac{1+2-2}{2\times1\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故 C 错误；

对于 D，因为平面 $ABCD\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以过 B_1 向 AB 作垂线，垂足为 H，则 $B_1H\perp$ 平面 $ABCD$，故 $\angle B_1DH$ 为 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角，因为 $B_1H=AB_1\sin 30^\circ=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}$，$B_1D=\sqrt{AB_1^2+AD^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$.

所以 $\sin\angle B_1DH=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，故 D 正确.

11. **答案** ACD

命题意图 本题考查椭圆的方程与性质.

解析 对于 A，设椭圆 E 的半焦距为 $c(c>0)$，离心率为 e. 因为 $\dfrac{|AF_1|}{|BF_1|}=7-4\sqrt{3}$，所以 $\dfrac{a-c}{a+c}=7-4\sqrt{3}$，左边分子分母同时除以 a，得 $\dfrac{1-e}{1+e}=7-4\sqrt{3}$，解得 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 A 正确；

对于 B，设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm a)$，$A(-a,0)$，$B(a,0)$，因为 $e=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $a=2b$，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{4}$，故 B 错误；

对于 C，因为 $b<c$，所以 E 的上、下顶点在以 F_1F_2 为直径的圆内，作图容易看出，该圆与 E 有 4 个交点，因此，满足 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$ 的点 P 有 4 个，故 C 正确；

对于 D，E 的方程可写为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=b^2$，设 $P(2b\cos\theta,b\sin\theta)(\theta\in[0,2\pi))$，$D(0,b)$，则 $|PD|=\sqrt{(2b\cos\theta)^2+(b\sin\theta-b)^2}=b\sqrt{-3\sin^2\theta-2\sin\theta+5}=b\sqrt{-3\left(\sin\theta+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{16}{3}}\leqslant\dfrac{4}{\sqrt{3}}b$，当 $\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$ 时取等号，则 $|PD|\leqslant\dfrac{4}{\sqrt{3}}b<2\sqrt{2}b$，故 D 正确.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. **答案** $y=x$

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $a=1$，$f(x)=x^3+\sin x$，$f'(x)=3x^2+\cos x$，则 $f'(0)=1$，又 $f(0)=0$，所以所求的切线方程为 $y=x$.

13. **答案** 10

命题意图 本题考查条件概率的概念和计算.

解析 因为 $P(A|B)=\dfrac{3}{4}$，所以乙品牌中白色耳机有 15 副，黑色耳机有 5 副，因为 $P(B|A)=\dfrac{3}{7}$，所以白色耳机中乙品牌占 $\dfrac{3}{7}$，所以白色耳机一共 35 副，列表如下，可知甲品牌的黑色耳机有 10 副.

	白色	黑色
甲品牌	20	10
乙品牌	15	5

14. **答案** $4+\sqrt{3}$

命题意图 本题考查立体几何中的综合问题.

解析 设正四面体 $ABCD$ 的棱长为 a，则其外接球的半径 $r=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$，则 $4\pi r^2=\dfrac{3}{2}a^2\pi=6\pi$，所以 $a=2$. 由题意知

$BD/\!/EF$，由于$\triangle ABD$为正三角形，所以$\triangle AEF$也是正三角形，故$EF=AE$，故空间四边形$BCFE$的边长之和为$BC+BE+EF+CF=2+(BE+AE)+CF=4+CF$，当$F$为$AD$的中点，即$CF\perp AD$时，$CF$有最小值$\sqrt{3}$，即空间四边形$BCFE$的四条边长之和的最小值为$4+\sqrt{3}$.

四、解答题：本题共5小题，共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. **命题意图** 本题考查正态分布、二项分布以及回归方程的应用.

解析 （Ⅰ）因为$X\sim N(4,1^2)$，所以$\mu=4,\sigma=1$，……（1分）

所以收购价格是"合理价格"的概率$P(3<X<6)=P(3<X<4)+P(4<X<6)=P(\mu-\sigma<X<\mu)+P(\mu<X<\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}\times 0.682\ 7+\frac{1}{2}\times 0.954\ 5=0.818\ 6.$ ……（4分）

由题意知$Y\sim B(10,0.818\ 6)$，……（5分）

所以$E(Y)=10\times 0.818\ 6=8.186.$ ……（7分）

（Ⅱ）由已知可得$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{9+12+17+21+27}{5}=17.2$，……（9分）

将$(3,17.2)$代入回归方程，可得$17.2=3\hat{b}+3.7$，

所以$\hat{b}=4.5.$ ……（10分）

所以线性回归方程为$\hat{y}=4.5x+3.7.$ ……（11分）

当$x=7$时，$\hat{y}=4.5\times 7+3.7=35.2$，

所以预计该大棚种植户第7次直播带货的成交额为35.2万元. ……（13分）

16. **命题意图** 本题考查空间位置关系的判断以及利用空间向量计算面面角.

解析 （Ⅰ）取线段B_1C_1的中点H，连接DH,GH，

则$DH/\!/BB_1$，又$AG/\!/BB_1$，所以$AG/\!/DH$. ……（1分）

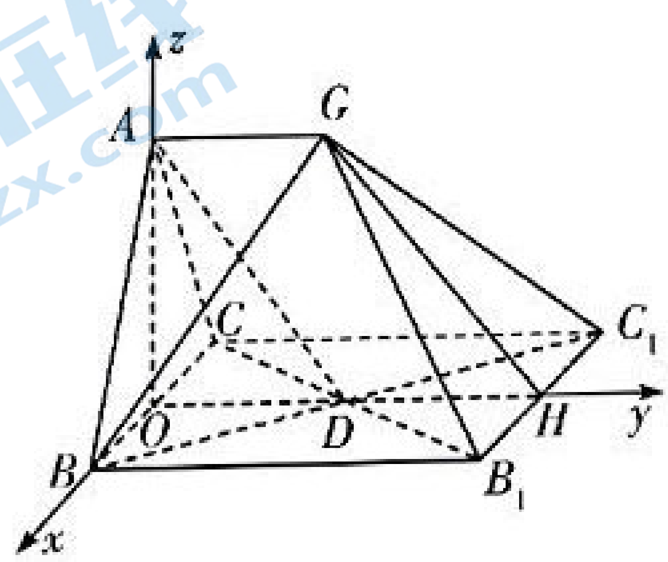
所以A,G,D,H四点共面. ……（3分）

由平面$ADHG\cap$平面$GB_1C_1=GH$，$AD/\!/$平面GB_1C_1，可得$AD/\!/GH$，

所以四边形$ADHG$为平行四边形，……（5分）

故$AG=DH=\frac{1}{2}BB_1=1.$ ……（6分）

（Ⅱ）以BC的中点O为原点，OB,OH,OA所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系，



……（7分）

则$B(1,0,0)$，$B_1(1,2,0)$，$C_1(-1,2,0)$，$G(0,1,\sqrt{3})$，

所以$\overrightarrow{B_1G}=(-1,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{B_1C_1}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{BG}=(-1,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC_1}=(-2,2,0)$，

设平面 GB_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1G}=-x-y+\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=-2x=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=\left(0,1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. ……………………………… (10 分)

设平面 BC_1G 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BG}=-a+b+\sqrt{3}c=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC_1}=-2a+2b=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{m}=(1,1,0)$. ……………………………… (12 分)

设平面 BC_1G 与平面 GB_1C_1 的夹角为 θ，

所以 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

故平面 BC_1G 与平面 GB_1C_1 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$. ……………………………… (15 分)

17. **命题意图** 本题考查等差数列与等比数列的性质，数列求和.

解析 （Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

因为 $a_na_{n+1}=2S_n$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n-1}a_n=2S_{n-1}$，

两式相减，得 $a_n(a_{n+1}-a_{n-1})=2(S_n-S_{n-1})=2a_n$， ……………………………… (2 分)

因为 $a_n\neq 0$，所以 $a_{n+1}-a_{n-1}=2d=2$，所以 $d=1$， ……………………………… (3 分)

又 $a_1a_2=2S_1$，得 $a_2=2$，所以 $a_n=n$. ……………………………… (4 分)

设 $\{b_n\}$ 的公比为 q，由条件知 $\frac{b_7+b_8}{b_4+b_5}=q^3=8$，得 $q=2$， ……………………………… (5 分)

又 $b_1=2$，所以 $b_n=2^n$. ……………………………… (7 分)

（Ⅱ）根据题意 $c_n=\begin{cases}\frac{1}{n(n+2)},n\text{ 为奇数},\\ \frac{n}{2^n},n\text{ 为偶数},\end{cases}$ ……………………………… (8 分)

在前 $2n$ 项中，奇数项之和 $A_n=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}<\frac{1}{2}$， …… (10 分)

偶数项之和 $B_n=\frac{2}{2^2}+\frac{4}{2^4}+\frac{6}{2^6}+\cdots+\frac{2n-2}{2^{2n-2}}+\frac{2n}{2^{2n}}$，

$\frac{1}{4}B_n=\frac{2}{2^4}+\frac{4}{2^6}+\frac{6}{2^8}+\cdots+\frac{2n-2}{2^{2n}}+\frac{2n}{2^{2n+2}}$， ……………………………… (12 分)

所以 $\frac{3}{4}B_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}-\frac{2n}{2^{2n+2}}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)-\frac{2n}{4^{n+1}}=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}+\frac{n}{2}\right)\times\frac{1}{4^n}$，

所以 $B_n=\frac{8}{9}-\frac{6n+8}{9}\times\frac{1}{4^n}<\frac{8}{9}$， ……………………………… (14 分)

故 $T_{2n}=A_n+B_n<\frac{1}{2}+\frac{8}{9}=\frac{25}{18}$. ……………………………… (15 分)

18. **命题意图** 本题考查双曲线的方程与性质，双曲线与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）因为 C 的左顶点为 $A(-2,0)$，所以 $a=2$. ······ （2分）

当 l 与 x 轴垂直时，将 $x=4$ 代入 C 的方程，得 $\frac{16}{2^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，解得 $y=\pm\sqrt{3}b$， ······ （3分）

此时 $|PQ|=2\sqrt{3}b=6$，所以 $b=\sqrt{3}$. ······ （5分）

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$. ······ （6分）

（Ⅱ）由题可设直线 PQ 的方程为 $x=my+4$， ······ （7分）

联立方程 $\begin{cases}x=my+4,\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 可得 $(3m^2-4)y^2+24my+36=0$. ······ （8分）

设点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则 $3m^2-4\neq0$，且 $y_1+y_2=\frac{-24m}{3m^2-4}$，$y_1y_2=\frac{36}{3m^2-4}$. ······ （9分）

直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 AQ 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2+2}(x+2)$， ······ （10分）

将 $x=-4$ 代入，得 $M\left(-4,\frac{-2y_1}{x_1+2}\right)$，$N\left(-4,\frac{-2y_2}{x_2+2}\right)$， ······ （11分）

所以 $\overrightarrow{MH}=\left(8,\frac{2y_1}{x_1+2}\right)$，$\overrightarrow{NH}=\left(8,\frac{2y_2}{x_2+2}\right)$， ······ （12分）

故 $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{NH}=64+\frac{4y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=64+\frac{4y_1y_2}{(my_1+6)(my_2+6)}=64+\frac{4y_1y_2}{m^2y_1y_2+6m(y_1+y_2)+36}$ ······ （15分）

$$=64+\frac{4\times\frac{36}{3m^2-4}}{m^2\times\frac{36}{3m^2-4}+6m\times\frac{-24m}{3m^2-4}+36}=64+\frac{4\times36}{36m^2-24\times6m^2+36(3m^2-4)}=63,$$

即 $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{NH}$ 是定值 63. ······ （17分）

19. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 （Ⅰ）若 $a=1$，则 $f(x)=(x+1)e^x+x-1$，$f'(x)=xe^x+2e^x+1$. ······ （1分）

设 $g(x)=xe^x+2e^x+1$，则 $g'(x)=(x+3)e^x$，令 $g'(x)=0$，得 $x=-3$， ······ （3分）

当 $x<-3$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上单调递减，

当 $x>-3$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(-3,+\infty)$ 上单调递增， ······ （5分）

所以 $g(x)\geqslant g(-3)=-3e^{-3}+2e^{-3}+1=-e^{-3}+1>0$， ······ （6分）

所以 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. ······ （7分）

（Ⅱ）$f'(x)=(x+a+1)e^x+1$.

设 $\varphi(x)=f'(x)$，则 $\varphi'(x)=(x+a+2)e^x$，

令 $\varphi'(x)>0$，解得 $x>-a-2$，令 $\varphi'(x)<0$，解得 $x<-a-2$，

则 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,-a-2)$ 上单调递减，在 $(-a-2,+\infty)$ 上单调递增. ······

若 $a<-2$，即 $-a-2>0$，则 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(-a-2)=-e^{-a-2}+1<0$，

又 $\varphi(0)=a+2<0$，当 $x\to-\infty$ 时，$\varphi(x)\to1$，当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，

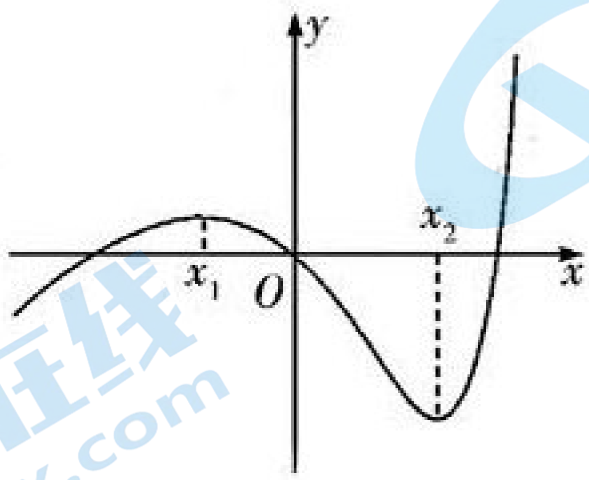
所以 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内各恰有一个零点，设为 x_1,x_2 $(x_1<0<-a-2<x_2)$. ……………… (11 分)

当 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时，$\varphi(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x_1<x<x_2$ 时，$\varphi(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

由于 $f(0)=0$，所以 $f(x_1)>f(0)=0$，$f(x_2)<f(0)=0$，…………………………………………………………… (13 分)

又当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

$f(x)$ 的大致图象如下：



所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内各恰有一个零点. …………………………………………………………………… (15 分)

设 x_0 为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点，下面证明 $-x_0$ 也是 $f(x)$ 的零点，即 $f(-x_0)=0$.

因为 $f(x_0)=(x_0+a)e^{x_0}+x_0-a=0$，

所以 $f(-x_0)=(-x_0+a)e^{-x_0}-x_0-a=\dfrac{-x_0+a-(x_0+a)e^{x_0}}{e^{x_0}}=-\dfrac{(x_0+a)e^{x_0}+x_0-a}{e^{x_0}}=0$.

综上，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内各恰有一个零点，并且这两个零点互为相反数. …………………… (17 分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！