

九年级数学

2024.01

考生须知

1. 本试卷共 8 页,共三道大题,28 道小题。满分 100 分。考试时间 120 分钟。
2. 在试卷和答题卡上认真填写学校名称、姓名和考号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上,选择题用 2B 铅笔作答,其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题(共 16 分,每题 2 分)

第 1-8 题均有四个选项,符合题意的选项只有一个。

1. 2023 年 5 月 30 日神舟十六号载人飞船发射取得圆满成功,此次任务是我国载人航天工程进入空间站应用与发展阶段的首次载人飞行任务。下列有关航天的 4 个图标图案中是中心对称图形的是



A



B



C



D

2. 抛物线 $y = (x-1)^2 - 2$ 的顶点坐标是

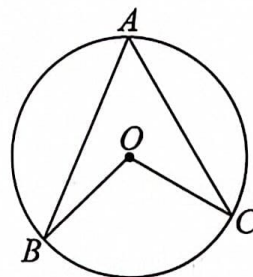
A. (1, 2)

B. (1, -2)

C. (-1, 2)

D. (-1, -2)

3. 如图,点 A, B, C 在 $\odot O$ 上, $\angle BAC = 54^\circ$, 则 $\angle BOC$ 的度数为

A. 108° B. 116° C. 126° D. 128° 

4. 下列事件中,为必然事件的是

A. 明年农历“大雪”节气那天下雪

B. 经过有交通信号灯的路口,遇到红灯

C. 不在同一条直线上的三个点确定一个圆

D. 掷一枚正方体骰子,向上一面的点数是 7

5. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 有两个相等的实数根,则 m 的值为

A. 2

B. ± 2

C. 4

D. ± 4

6. 做随机抛掷一枚纪念币的试验,得到的结果如下表所示:

抛掷次数 n	100	200	500	1000	2000	3000	4000	5000
“正面向上” 的次数 m	38	96	260	620	1236	1857	2472	3090
“正面向上” 的频率 $\frac{m}{n}$	0.380	0.480	0.520	0.620	0.618	0.619	0.618	0.618

下面有 3 个推断:

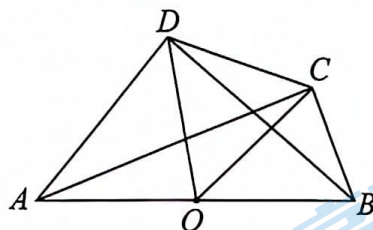
- ①当投掷次数是 1000 时,“正面向上”的频率是 0.620,所以“正面向上”的概率是 0.620;
- ②随着投掷次数的增加,“正面向上”的频率总在 0.618 附近摆动,显示出一定的稳定性,可以估计“正面向上”的概率是 0.618;
- ③当抛掷次数为 10000 时,估计出现“正面向上”的次数约为 6180 次.

其中合理的是

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ②

7. 如图,点 O 为线段 AB 的中点, $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, 连接 OC, OD . 则下面结论不一定成立的是

- A. $OC = OD$ B. $\angle BDC = \angle BAC$
C. $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$ D. AC 平分 $\angle BAD$



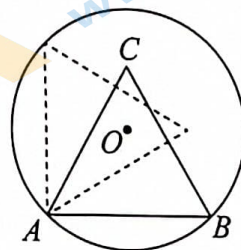
8. 如图,等边三角形 ABC 的边长为 2,点 A, B 在 $\odot O$ 上,点 C 在 $\odot O$ 内, $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{2}$.

将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转,在旋转过程中得到两个结论:

- ①当点 C 第一次落在 $\odot O$ 上时,旋转角为 30° ;
- ②当 AC 第一次与 $\odot O$ 相切时,旋转角为 60° .

则结论正确的是

- A. ① B. ②
C. ①② D. 均不正确



二、填空题(共 16 分,每小题 2 分)

9. 方程 $x^2 - x = 0$ 的解是_____.

10. 一个扇形的半径是 6,其圆心角是 150° ,则圆心角所对的弧长为_____.

11. 为了加快数字化城市建设,某市计划新建一批智能充电桩,第一个月新建了 301 个充电桩,第三个月新建了 500 个充电桩. 设该市新建智能充电桩个数的月平均增长率为 x ,根据题意,列出方程是_____.

12. 正六边形的外接圆半径为 2 cm, 则此正六边形的边心距为 _____ cm.

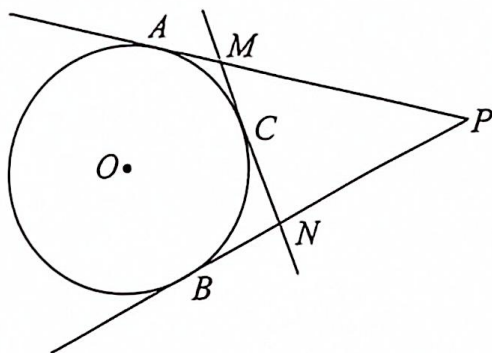
13. 已知二次函数 $y = x^2 + bx$, 当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而增大. 写出一个满足题意的 b 的值为 _____.

14. 在关于 x 的二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 中, 自变量 x 可以取任意实数, 下表是自变量 x 与函数 y 的几组对应值:

x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	-1.15	-2.45	-2.75	-2.05	-0.35	2.35	6.05	...

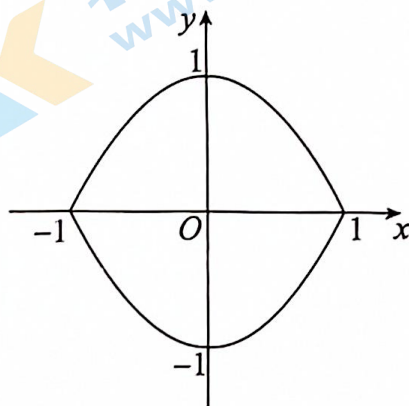
根据以上信息, 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个实数根中, 其中的一个根约等于 _____ (结果保留小数点后一位小数).

15. 如图, PA, PB 分别与 $\odot O$ 相切于点 A, B , 点 C 为劣弧 $\widehat{AB}$ 上的点, 过点 C 的切线分别交 PA, PB 于点 M, N . 若 $PA = 8$, 则 $\triangle PMN$ 的周长为 _____.



16. 平面直角坐标系 xOy 中, 将抛物线 $y = x^2 - 1$ 在 x 轴和 x 轴下方的部分记作 G_1 , 将 G_1 沿 x 轴翻折记作 G_2 , G_1 和 G_2 构成的图形记作 G . 关于图形 G , 如图所示, 以下三个结论中, 正确的序号是 _____.

- ① 图形 G 关于原点对称;
- ② 图形 G 关于直线 $y = x$ 对称;
- ③ 图形 G 的面积为 S , 满足 $2 < S < \pi$.



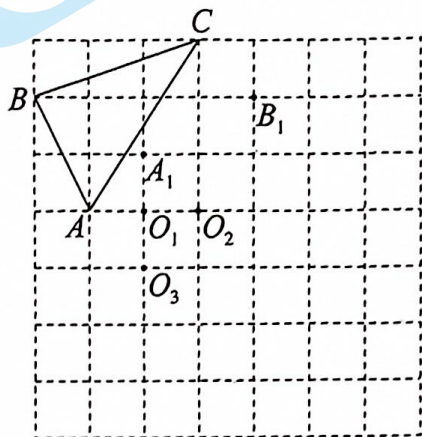
三、解答题(共 68 分,第 17-22 题,每题 5 分,第 23-26 题,每题 6 分,第 27-28 题,每题 7 分)

17. 解方程: $x^2 - 4x - 1 = 0$.

18. 如图, $\triangle ABC$ 绕某点按一定方向旋转一定角度后得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 点 A, B, C 分别对应点 A_1, B_1, C_1 .

(1) 在图中画出 $\triangle A_1B_1C_1$;

(2) $\triangle A_1B_1C_1$ 是以点 (填“ O_1 ”, “ O_2 ” 或 “ O_3 ”) 为旋转中心, 将 $\triangle ABC$ 时针旋转 度得到的.



19. 如图 1 所示, 圆形拱门屏风是中国古代家庭中常见的装饰隔断, 既美观又实用, 彰显出中国元素的韵味. 图 2 是一款拱门的示意图, 其中拱门最下端 $AB = 18$ 分米, C 为 AB 中点, D 为拱门最高点, 圆心 O 在线段 CD 上, $CD = 27$ 分米, 求拱门所在圆半径的长.

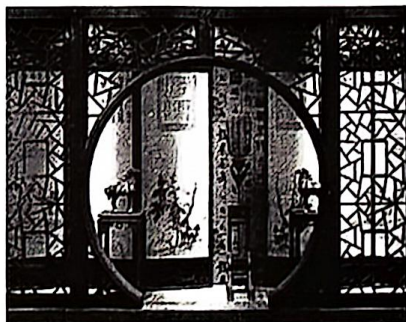


图 1

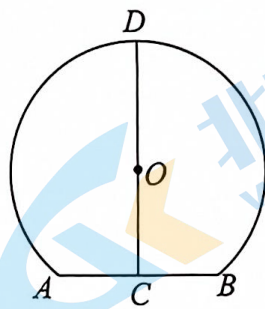


图 2

20. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图象上部分点的横坐标 x , 纵坐标 y 的对应值如下表所示:

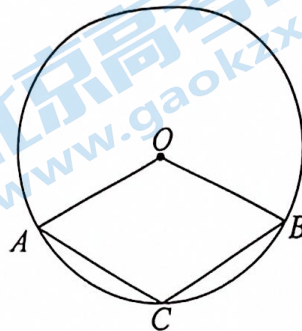
x	...	-1	0	1	2	4	...
y	...	8	3	0	-1	3	...

(1) 求二次函数的解析式及顶点坐标;

(2) 直接写出当 $y > 0$ 时, x 的取值范围.

21. 如图, A, B 是 $\odot O$ 上的两点, $\angle AOB = 120^\circ$, 点 C 是 $\widehat{AB}$ 的中点.

求证: 四边形 $OACB$ 是菱形.



22. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + mx + m - 1 = 0$.

(1) 求证: 方程总有两个实数根;

(2) 若该方程两个实数根的和为 3, 求 m 的值.

23. 第 19 届亚运会于 2023 年 9 月在杭州举办, 此届亚运会的吉祥物是由如图所示的三个可爱的机器人“宸宸”、“琮琤”、“莲莲”组成的. 现有三张分别印有三个吉祥物的不透明卡片, 三张卡片除正面图案不同外, 其余均相同.

(1) 从这三张卡片中随机抽取一张, 图案恰好是“宸宸”的概率为 _____;

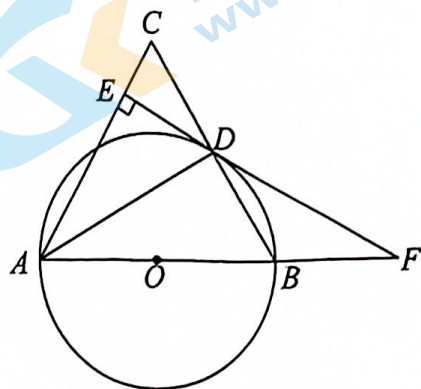
(2) 从这三张卡片中随机抽取一张, 记住卡片图案后将卡片放回, 背面朝上洗匀, 然后再从三张卡片中随机抽取一张. 用列表或画树状图的方法, 求两次抽到的卡片图案相同的概率(印有“宸宸”、“琮琤”、“莲莲”的三张卡片依次记为 A, B, C).



24. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 以 AB 为直径作 $\odot O$ 交 BC 于点 D , 作 $DE \perp AC$ 交 AC 于点 E , 延长 ED 交 AB 的延长线于点 F .

(1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为等边三角形, $AE = 3$, 求 $\odot O$ 半径的长.



25. 如图 1, 灌溉车为公路绿化带草坪浇水, 图 2 是灌溉车浇水操作时的截面图. 现将灌溉车喷出水的上、下边缘线近似地看作平面直角坐标系 xOy 中两条抛物线的部分图象. 已知喷水口 H 离地竖直高度 OH 为 1.2 m , 草坪水平宽度 $DE = 3\text{ m}$, 竖直高度忽略不计. 上边缘抛物线最高点 A 离喷水口的水平距离为 2 m , 高出喷水口 0.4 m , 下边缘抛物线是由上边缘抛物线向左平移 4 m 得到的, 设灌溉车到草坪的距离 OD 为 d (单位: m).

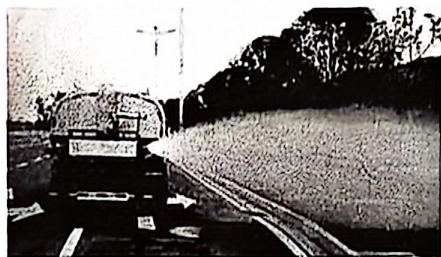


图 1

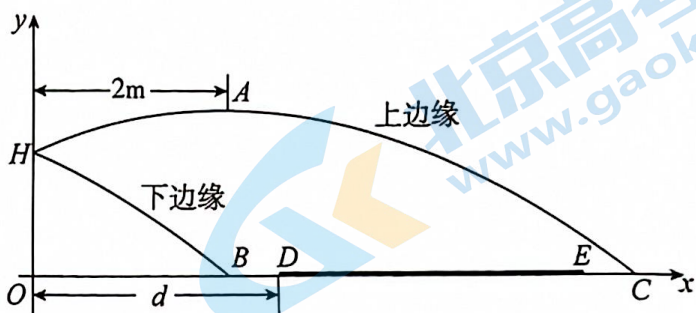


图 2

(1) 求上边缘抛物线的函数解析式, 并求喷出水的最大射程 OC 的长;

(2) 下边缘抛物线落地点 B 的坐标为 _____;

(3) 要使灌溉车行驶时喷出的水能浇灌到整个草坪, d 的取值范围为 _____.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $(m+2, y_1)$, $(6, y_2)$ 为抛物线 $y = x^2 - 2mx + n$ 上两个不同的点.

(1) 求抛物线的对称轴(用含 m 的式子表示);

(2) 若 $y_1 < n < y_2$, 求 m 的取值范围.

27. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $0^\circ < \angle BAC < 90^\circ$, 将线段 AC 绕点 A 逆时针旋转 α 得到线段 AD , 连接 BD , CD .

(1) 如图 1, 当 $\angle BAC = \alpha$ 时, 则 $\angle ABD =$ _____ (用含有 α 的式子表示);

(2) 如图 2, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 作 $\angle BAD$ 的角平分线交 BC 的延长线于点 F , 交 BD 于点 E , 连接 DF .

①依题意在图 2 中补全图形, 并求 $\angle DBC$ 的度数;

②用等式表示线段 AF , CF , DF 之间的数量关系, 并证明.

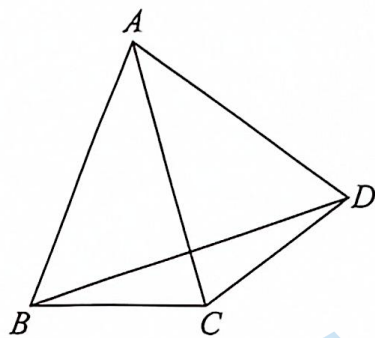


图 1

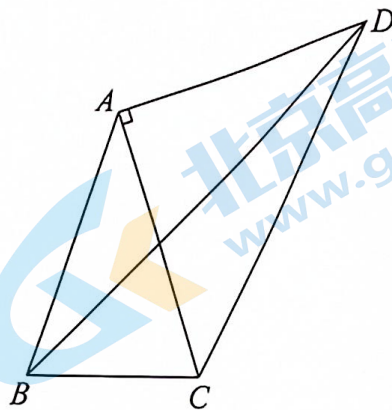


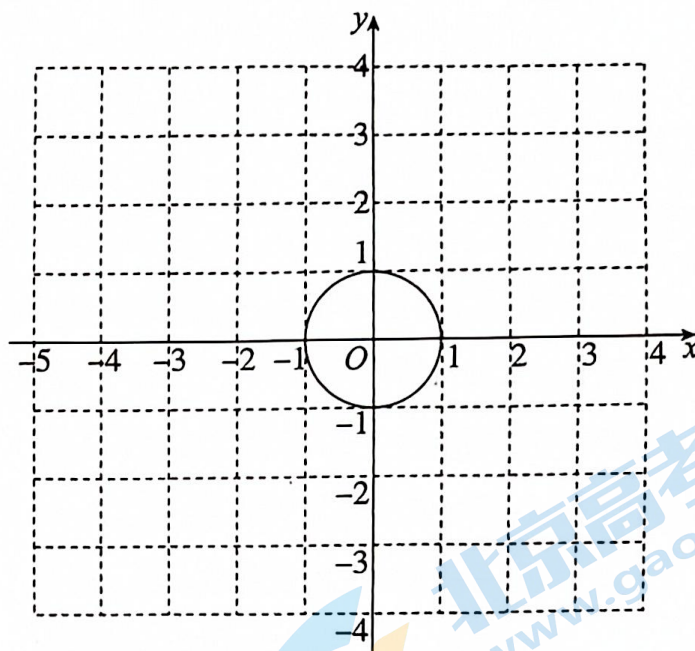
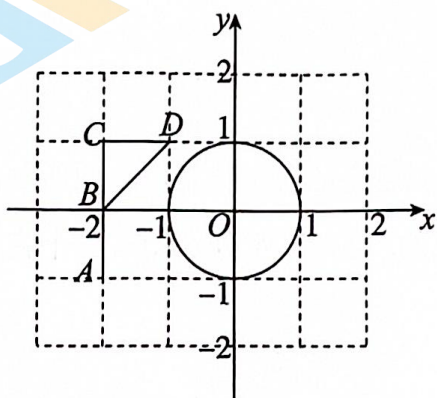
图 2

28. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为 1, 对于线段 AB 和 x 轴上的点 P , 给出如下定义: 若将线段 AB 绕点 P 旋转 180° 可以得到 $\odot O$ 的弦 $A'B'$ (A', B' 分别为 A, B 的对应点), 则称线段 AB 为 $\odot O$ 以点 P 为中心的“关联线段”.

(1) 如图, 已知点 $A(-2, -1), B(-2, 0), C(-2, 1), D(-1, 1)$, 在线段 AC, BD, CD 中, $\odot O$ 以点 P 为中心的“关联线段”是_____;

(2) 已知点 $E(-4, 1)$, 线段 EF 是 $\odot O$ 以点 P 为中心的“关联线段”, 求点 F 的横坐标 x_F 的取值范围;

(3) 已知点 $E(m, 1)$, 若直线 $y = -x + 2m$ 上存在点 F , 使得线段 EF 是 $\odot O$ 以点 P 为中心的“关联线段”, 直接写出 m 的取值范围.



备用图

一、选择题 (共 16 分, 每小题 2 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	C	B	C	D	A

二、填空题 (共 16 分, 每小题 2 分)

9. $x_1=0, x_2=1$

10. 5π

11. $301(1+x)^2=500$

12. $\sqrt{3}$

13. 答案不唯一, 如: $b=0$

14. 答案不唯一, 如 2.2

15. 16

16. ①③

三、解答题 (共 68 分, 第 17-22 题, 每题 5 分, 第 23-26 题, 每题 6 分, 第 27-28 题, 每题 7 分)

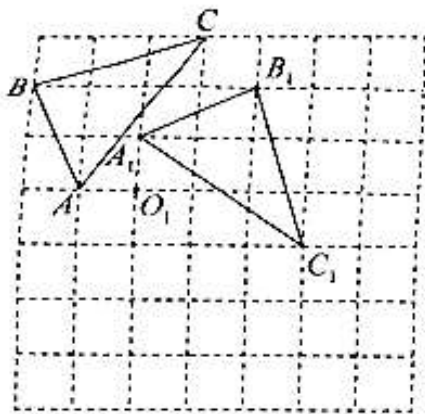
17. 解: $x^2 - 4x + 4 = 5$, 2 分

$(x-2)^2 = 5$,

$x-2 = \sqrt{5}$ 或 $x-2 = -\sqrt{5}$,

$\therefore x_1 = 2 + \sqrt{5}, x_2 = 2 - \sqrt{5}$ 5 分

18. (1) 2 分



(2) O_1 , 顺, 90° 5 分

19. 解: 连接 AO .

$\because C$ 为 AB 中点, 圆心 O 在线段 CD 上, $AB=18$,

$\therefore CD \perp AB, AC=9$ 1 分

设 $\odot O$ 半径为 x , 则 $OA=OD=x$,

$\because CD=27$,

$\therefore OC=27-x$.

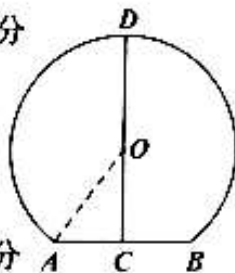
在 $Rt\triangle AOC$ 中

$\therefore OA^2 = AC^2 + OC^2$, 3 分

$\therefore x^2 = 9^2 + (27-x)^2$

解得 $x=15$.

$\therefore$ 拱门所在圆的半径为 15 分米. 5 分



20. 解: (1) 设二次函数解析式为 $y = a(x-h)^2 + k (a \neq 0)$.

$\because$ 二次函数图象的顶点为 $(2, -1)$, 1 分

$\therefore$ 二次函数解析式为 $y = a(x-2)^2 - 1$.

$\because$ 函数 $y = a(x-2)^2 - 1$ 的图象过点 $(1, 0)$,

$\therefore$ 代入得 $a = 1$.

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = x^2 - 4x + 3$, 3 分

(2) $x < 1$ 或 $x > 3$ 5 分

21. 证明: 连结 OC .

$\because$ 点 C 是 $\widehat{AB}$ 的中点, $\therefore \widehat{AC} = \widehat{BC}$.

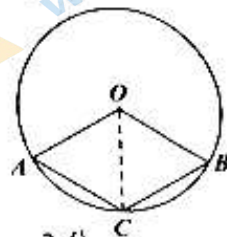
$\therefore AC = BC$, $\angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB$.

$\because \angle AOB = 120^\circ$, $\therefore \angle AOC = 60^\circ$.

$\because AO = CO$, $\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形. 3 分

$\therefore AO = AC = BC = BO$.

$\therefore$ 四边形 $OACB$ 是菱形. 5 分



22. (1) 证明: $\because a = 1, b = m, c = m - 1$,

$\therefore \Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2$.

$\because (m-2)^2 \geq 0$,

$\therefore \Delta \geq 0$

$\therefore$ 方程总有两个实数根. 3 分

(2) 解: $\because$ 方程 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 有两个实数根,

$\therefore$ 解为 $x_1 = -1, x_2 = 1 - m$.

$\because$ 方程两个实数根的和为 3,

$\therefore m = -3$ 5 分

23. 解: (1) $\frac{1}{3}$ 2 分

(2) 依题意列出表格

	A	B	C
A	(A, A)	(A, B)	(A, C)
B	(B, A)	(B, B)	(B, C)
C	(C, A)	(C, B)	(C, C)

..... 4 分

由表格可以看出, 可能出现的结果有 9 种, 且它们出现的可能性相等, 两次抽到的卡片图案相同的结果有 3 种,

$\therefore P(\text{图案相同}) = \frac{1}{3}$ 6 分

24. (1) 证明: 连接 OD

$\because AB$ 为 $\odot O$ 直径, $\therefore \angle ADB = 90^\circ$, 1 分

$\because AB = AC$, $\therefore \angle CAD = \angle BAD$.

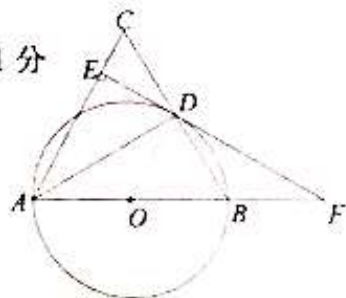
$\because OA = OD$, $\therefore \angle ODA = \angle BAD$.

$\therefore \angle CAD = \angle ODA$.

$\therefore OD \parallel AC$.

$\because DE \perp AC$, $\therefore DE \perp OD$.

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线. 4 分



(2) 解: $\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle CAD = \angle BAD = 30^\circ.$$

$$\therefore AE = 3.$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore AB = 4.$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径长为 } 2. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

25. 解: (1) 设抛物线的解析式为 $y = a(x-h)^2 + k (a \neq 0)$,

$$\therefore \text{抛物线的顶点 } A \text{ 为 } (2, 1.6), \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore y = a(x-2)^2 + 1.6.$$

$$\therefore \text{抛物线过点 } H(0, 1.2),$$

$$\therefore a(0-2)^2 + 1.6 = 1.2. \text{ 解得, } a = -\frac{1}{10}.$$

$$\therefore y = -\frac{1}{10}(x-2)^2 + 1.6; \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(2) B(2, 0). \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(3) 2 \leq d \leq 3. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

26. 解: (1) $\because a=1, b=-2m,$

$$\therefore \text{抛物线对称轴为 } x=m. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

(2) $\because$ 抛物线 $y=x^2-2mx+n$ 开口向上且对称轴为 $x=m$,

又 $\because$ 点 $(m+2, y_1)$ 在抛物线上,

$$\therefore \text{点 } (m+2, y_1) \text{ 在对称轴右侧.} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{当 } x=0 \text{ 时, } y=n,$$

$$\therefore \text{点 } (0, n) \text{ 在抛物线上.} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

① 当 $m < 0$ 时

$$\therefore \text{点 } (m+2, y_1), (0, n), (6, y_2) \text{ 均在对称轴右侧,}$$

$$\text{且 } y_1 < n < y_2$$

$$\therefore \text{由二次函数性质, 有 } m+2 < 0 < 6.$$

$$\therefore m < -2. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

② 当 $0 \leq m \leq 6$ 时

$$\therefore \text{点 } (0, n) \text{ 在对称轴左侧,}$$

$$\therefore \text{点 } (0, n) \text{ 关于对称轴的对称点 } (2m, n) \text{ 在对称轴右侧.}$$

$$\therefore m \leq 6$$

$$\therefore \text{点 } (6, y_2) \text{ 在对称轴右侧.}$$

$$\therefore \text{点 } (m+2, y_1), (2m, n), (6, y_2) \text{ 均在对称轴右侧,}$$

$$\text{且 } y_1 < n < y_2$$

$$\therefore \text{由二次函数性质, 有 } m+2 < 2m < 6.$$

$$\therefore 2 < m < 3. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

③ 当 $m > 6$ 时

$$\text{点 } (0, n) \text{ 和 } (6, y_2) \text{ 在对称轴左侧, 由函数性质, 有 } n > y_2, \\ \text{不符题意.}$$

$$\therefore \text{由①②③可知, } m < -2 \text{ 或 } 2 < m < 3. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

27. (1) $\angle ABD = 90^\circ - \alpha$, 1分

(2) 解: 依题意补全图形, 2分

$\because AB = AC$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC.$$

$\because AD = AC$,

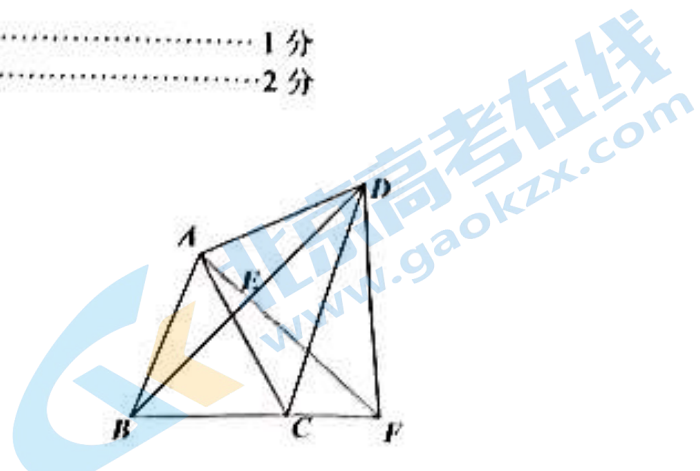
$\therefore AD = AB$.

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAD.$$

$$\therefore \angle DBC = \angle ABC - \angle ABD$$

$$= \frac{1}{2} (\angle BAD - \angle BAC)$$

$$= \frac{1}{2} \alpha = 45^\circ. \dots\dots\dots 3分$$



(3) 结论: $\sqrt{2}AF = DF + CF$, 4分

证明: 过点A作BD的平行线交FD的延长线于点G,

$\because AD = AB$, AF平分 $\angle BAD$,

$\therefore DB \perp AF$, $BE = DE$,

$\therefore BF = DF$,

$\therefore \angle BFA = \angle DFA$,

$\because \angle DBC = 45^\circ$,

$\therefore \angle BDF = \angle DBC = 45^\circ$,

$\therefore \angle BFD = 90^\circ$,

$\therefore \angle BFA = \angle DFA = 45^\circ$,

$\because AG \parallel BD$,

$\therefore \angle FAG = \angle DEF = 90^\circ$, $\angle G = \angle BDF = 45^\circ$,

$\therefore AG = AF$,

$\because \angle FAG = \angle CAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAF = \angle DAG$,

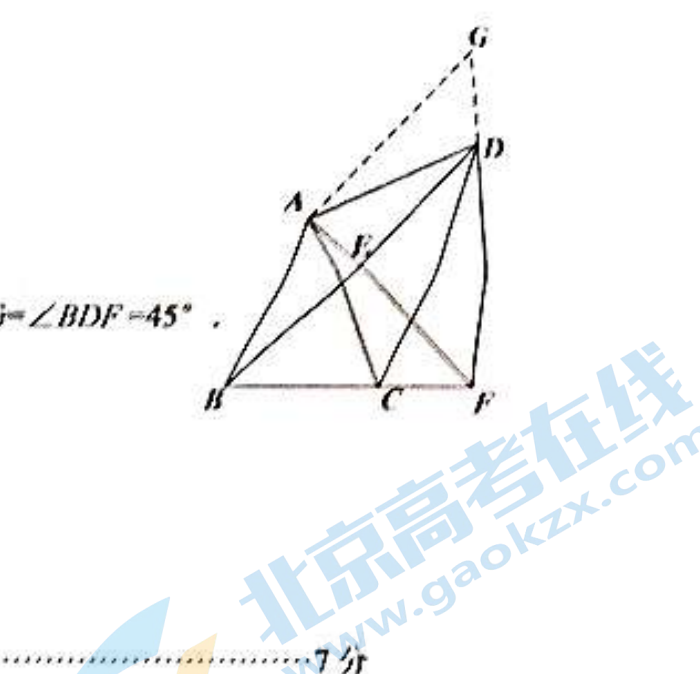
$\because AC = AD$,

$\therefore \triangle CAF \cong \triangle DAG$,

$\therefore DG = CF$,

$\therefore FG = \sqrt{2}AF$,

$\therefore \sqrt{2}AF = DF + CF$, 7分



28. 解: (1) 线段AC, 线段BD; 2分

(2) 解: $\because$ 点E纵坐标为1, 且点P在x轴上,

$\therefore$ 点E关于点P的对称点E'纵坐标必为-1,

$\because$ 点E', F'在 $\odot O$ 上,

$\therefore$ 点E'为(0, -1), 点F'的横坐标取值范围是 $-1 \leq x_{F'} \leq 1$,

$\therefore$ 点P的坐标为(-2, 0),

$\therefore$ 点F的横坐标取值范围是 $-5 \leq x_F \leq -3$ 5分

(3) $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$, 7分

其它解法请参照评分标准酌情给分.

北京初三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2024年1月北京初三期末试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！



微信搜一搜



京考一点通

