

2016 年普通高等学校招生全国统一考试

数学（文）（北京卷）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

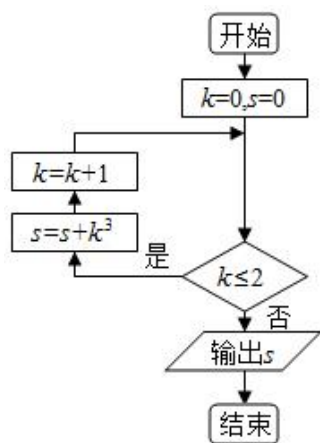
1. （5 分）已知集合 $A = \{x | 2 < x < 4\}$, $B = \{x | x < 3 \text{ 或 } x > 5\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | 2 < x < 5\}$ B. $\{x | x < 4 \text{ 或 } x > 5\}$ C. $\{x | 2 < x < 3\}$ D. $\{x | x < 2 \text{ 或 } x > 5\}$

2. （5 分）复数 $\frac{1+2i}{2-i} =$ ()

- A. i B. $1+i$ C. $-i$ D. $1-i$

3. （5 分）执行如图所示的程序框图，输出 s 的值为 ()



- A. 8 B. 9 C. 27 D. 36

4. （5 分）下列函数中，在区间 $(-1, 1)$ 上为减函数的是 ()

- A. $y = \frac{1}{1-x}$ B. $y = \cos x$ C. $y = \ln(x+1)$ D. $y = 2^{-x}$

5. （5 分）圆 $(x+1)^2 + y^2 = 2$ 的圆心到直线 $y = x+3$ 的距离为 ()

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

6. （5 分）从甲、乙等 5 名学生中随机选出 2 人，则甲被选中的概率为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{8}{25}$ D. $\frac{9}{25}$

7. （5 分）已知 $A(2, 5)$, $B(4, 1)$. 若点 $P(x, y)$ 在线段 AB 上，则 $2x - y$ 的最大值为 ()

A. -1 B. 3 C. 7 D. 8

8. (5分) 某学校运动会的立定跳远和30秒跳绳两个单项比赛分成预赛和决赛两个阶段, 表中为10名学生的预赛成绩, 其中有三个数据模糊.

学生序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
立定跳远(单位: 米)	1.96	1.92	1.82	1.80	1.78	1.76	1.74	1.72	1.68	1.60
30秒跳绳(单位: 次)	63	a	75	60	63	72	70	$a-1$	b	65

在这10名学生中, 进入立定跳远决赛的有8人, 同时进入立定跳远决赛和30秒跳绳决赛的有6人, 则 ()

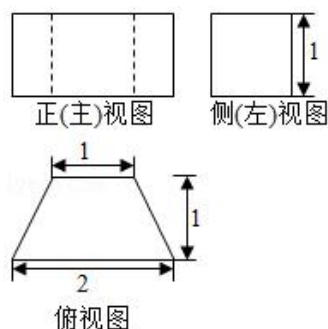
- A. 2号学生进入30秒跳绳决赛
B. 5号学生进入30秒跳绳决赛
C. 8号学生进入30秒跳绳决赛
D. 9号学生进入30秒跳绳决赛

二、填空题(共6小题, 每小题5分, 满分30分)

9. (5分) 已知向量 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 夹角的大小为_____.

10. (5分) 函数 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ($x \geq 2$) 的最大值为_____.

11. (5分) 某四棱柱的三视图如图所示, 则该四棱柱的体积为_____.



12. (5分) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线为 $2x + y = 0$, 一个焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$, 则 a = _____, b = _____.

13. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{2\pi}{3}$, $a = \sqrt{3}c$, 则 $\frac{b}{c}$ = _____.

14. (5分) 某网店统计了连续三天售出商品的种类情况：第一天售出 19 种商品，第二天售出 13 种商品，第三天售出 18 种商品；前两天都售出的商品有 3 种，后两天都售出的商品有 4 种，则该网店

①第一天售出但第二天未售出的商品有_____种；

②这三天售出的商品最少有_____种.

三、解答题（共 6 小题，满分 80 分）

15. (13 分) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $b_2=3$ ， $b_3=9$ ， $a_1=b_1$ ， $a_{14}=b_4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

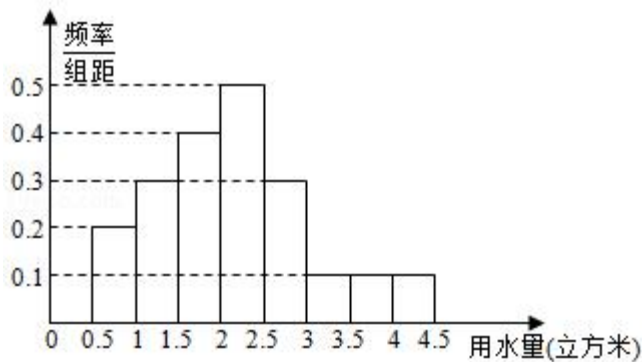
(2) 设 $c_n=a_n+b_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

16. (13 分) 已知函数 $f(x)=2\sin \omega x \cos \omega x + \cos 2\omega x$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

(1) 求 ω 的值；

(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

17. (13 分) 某市居民用水拟实行阶梯水价，每人月用水量中不超过 w 立方米的部分按 4 元/立方米收费，超出 w 立方米的部分按 10 元/立方米收费，从该市随机调查了 10000 位居民，获得了他们某月的用水量数据，整理得到如图频率分布直方图：



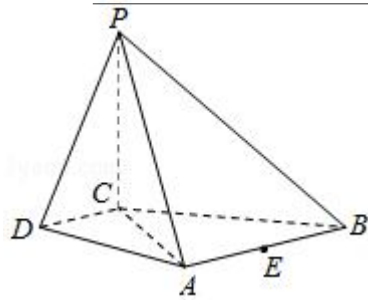
(1) 如果 w 为整数，那么根据此次调查，为使 80% 以上居民在该月的用水价格为 4 元/立方米， w 至少定为多少？

(2) 假设同组中的每个数据用该组区间的右端点值代替，当 $w=3$ 时，估计该市居民该月的人均水费.

18. (14 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PC \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB \parallel DC$ ， $DC \perp AC$.

(1) 求证： $DC \perp$ 平面 PAC ； (2) 求证：平面 $PAB \perp$ 平面 PAC ；

(3) 设点 E 为 AB 的中点，在棱 PB 上是否存在点 F ，使得 $PA \parallel$ 平面 CEF ？说明理由.



19. (14 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 $A(2, 0)$, $B(0, 1)$ 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程及离心率;

(2) 设 P 为第三象限内一点且在椭圆 C 上, 直线 PA 与 y 轴交于点 M , 直线 PB 与 x 轴交于点 N , 求证: 四边形 $ABNM$ 的面积为定值.

20. (13 分) 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 设 $a = b = 4$, 若函数 $f(x)$ 有三个不同零点, 求 c 的取值范围;

(3) 求证: $a^2 - 3b > 0$ 是 $f(x)$ 有三个不同零点的必要而不充分条件.

数学试题答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1. 【分析】由已知条件利用交集的定义能求出 $A \cap B$.

【解答】解：∵集合 $A = \{x | 2 < x < 4\}$, $B = \{x | x < 3 \text{ 或 } x > 5\}$,

$$\therefore A \cap B = \{x | 2 < x < 3\}.$$

故选：C.

【点评】本题考查交集的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意交集的定义的合理运用.

2. 【分析】将分子分线同乘 $2+i$ ，整理可得答案.

$$\text{【解答】解：} \frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{5i}{5} = i,$$

故选：A.

【点评】本题考查的知识点是复数代数形式的加减运算，共轭复数的定义，难度不大，属于基础题.

3. 【分析】根据已知的程序框图可得，该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 S 的值，模拟程序的运行过程，可得答案.

【解答】解：当 $k=0$ 时，满足进行循环的条件，故 $S=0$, $k=1$,

当 $k=1$ 时，满足进行循环的条件，故 $S=1$, $k=2$,

当 $k=2$ 时，满足进行循环的条件，故 $S=9$, $k=3$,

当 $k=3$ 时，不满足进行循环的条件，

故输出的 S 值为 9，

故选：B.

【点评】本题考查的知识点是程序框图，当循环次数不多，或有规律可循时，可采用模拟程序法进行解答.

4. 【分析】根据函数单调性的定义，余弦函数单调性，以及指数函数的单调性便可判断每个选项函数在 $(-1, 1)$ 上的单调性，从而找出正确选项.

【解答】解：A. x 增大时， $-x$ 减小， $1-x$ 减小， $\therefore \frac{1}{1-x}$ 增大；

\therefore 函数 $y = \frac{1}{1-x}$ 在 $(-1, 1)$ 上为增函数，即该选项错误；

B. $y=\cos x$ 在 $(-1, 1)$ 上没有单调性, \therefore 该选项错误;

C. x 增大时, $x+1$ 增大, $\ln(x+1)$ 增大, $\therefore y=\ln(x+1)$ 在 $(-1, 1)$ 上为增函数, 即该选项错误;

$$D. y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x;$$

\therefore 根据指数函数单调性知, 该函数在 $(-1, 1)$ 上为减函数, \therefore 该选项正确.

故选: D.

【点评】 考查根据单调性定义判断函数在一区间上的单调性的方法, 以及余弦函数和指数函数的单调性, 指数式的运算.

5. **【分析】** 先求出圆 $(x+1)^2+y^2=2$ 的圆心, 再利用点到直线的距离公式求解.

【解答】 解: \because 圆 $(x+1)^2+y^2=2$ 的圆心为 $(-1, 0)$,

\therefore 圆 $(x+1)^2+y^2=2$ 的圆心到直线 $y=x+3$ 的距离为:

$$d=\frac{|-1+3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

故选: C.

【点评】 本题考查圆心到直线的距离的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意点到直线的距离公式和圆的性质的合理运用.

6. **【分析】** 从甲、乙等 5 名学生中随机选出 2 人, 先求出基本事件总数, 再求出甲被选中包含的基本事件的个数, 同此能求出甲被选中的概率.

【解答】 解: 从甲、乙等 5 名学生中随机选出 2 人,

$$\text{基本事件总数 } n=C_5^2=10,$$

$$\text{甲被选中包含的基本事件的个数 } m=C_1^1 C_4^1=4,$$

$$\therefore \text{甲被选中的概率 } p=\frac{m}{n}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

故选: B.

【点评】 本题考查概率的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意等可能事件概率计算公式的合理运用.

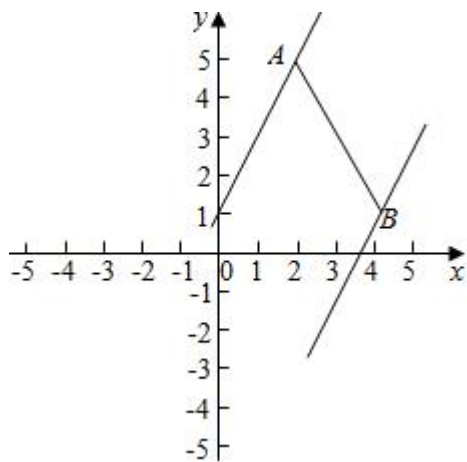
7. **【分析】** 平行直线 $z=2x-y$, 判断取得最值的位置, 求解即可.

【解答】 解: 如图 $A(2, 5)$, $B(4, 1)$. 若点 $P(x, y)$ 在线段 AB 上,

令 $z=2x-y$ ，则平行 $y=2x-z$ 当直线经过 B 时截距最小， z 取得最大值，

可得 $2x-y$ 的最大值为： $2 \times 4 - 1 = 7$ 。

故选：C。



【点评】本题考查线性规划的简单应用，判断目标函数经过的点，是解题的关键。

8. 【分析】根据已知中这 10 名学生中，进入立定跳远决赛的有 8 人，同时进入立定跳远决赛和 30 秒跳绳决赛的有 6 人，逐一分析四个答案的正误，可得结论。

【解答】解： \because 这 10 名学生中，进入立定跳远决赛的有 8 人，

故编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 的学生进入立定跳远决赛，

又由同时进入立定跳远决赛和 30 秒跳绳决赛的有 6 人，

则 3, 6, 7 号同学必进入 30 秒跳绳决赛，

剩下 1, 2, 4, 5, 8 号同学的成绩分别为：63, a , 60, 63, $a-1$ 有且只有 3 人进入 30 秒跳绳决赛，

故成绩为 63 的同学必进入 30 秒跳绳决赛，

故选：B。

【点评】本题考查的知识点是推理与证明，正确利用已知条件得到合理的逻辑推理过程，是解答的关键。

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

9. 【分析】根据已知中向量的坐标，代入向量夹角公式，可得答案。

【解答】解： \because 向量 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ， $\vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$ ，

$\therefore \vec{a}$ 与 \vec{b} 夹角 θ 满足：

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

又 $\because \theta \in [0, \pi]$,

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6},$$

故答案为: $\frac{\pi}{6}$.

【点评】本题考查的知识点是平面向量的夹角公式，熟练掌握平面向量的夹角公式，是解答的关键.

10. 【分析】分离常数便可得到 $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ ，根据反比例函数的单调性便可判断该函数在 $[2, +\infty)$ 上为减函数，从而 $x=2$ 时 $f(x)$ 取最大值，并可求出该最大值.

【解答】解: $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$;

$\therefore f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减;

$\therefore x=2$ 时, $f(x)$ 取最大值 2.

故答案为: 2.

【点评】考查函数最大值的概念及求法，分离常数法的运用，以及反比例函数的单调性，根据函数单调性求最值的方法.

11. 【分析】由已知中的三视图可得：该几何体上部是一个以俯视图为底面四棱柱，进而可得答案.

【解答】解：由已知中的三视图可得：该几何体上部是一个以俯视图为底面四棱柱，

棱柱的底面面积 $S = \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 = \frac{3}{2}$,

棱柱的高为 1,

故棱柱的体积 $V = \frac{3}{2}$,

故答案为: $\frac{3}{2}$

【点评】本题考查的知识点是由三视图，求体积和表面积，根据已知的三视图，判断几何体的形状是解答的关键.

12. 【分析】由双曲线的一条渐近线为 $2x+y=0$ ，一个焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$ ，列出方程组，由此能出 a, b .

【解答】解：∵双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线为 $2x + y = 0$ ，一个焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} \frac{b}{a} = 2 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5} \end{cases},$$

解得 $a = 1, b = 2$.

故答案为：1, 2.

【点评】本题考查双曲线中实数值的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意双曲线的性质的合理运用.

13. 【分析】利用正弦定理求出 C 的大小，然后求出 B ，然后判断三角形的形状，求解比值即可.

【解答】解：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \frac{2\pi}{3}$ ， $a = \sqrt{3}c$ ，

由正弦定理可得： $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ，

$$\frac{\sqrt{3}c}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{c}{\sin C}, \sin C = \frac{1}{2}, C = \frac{\pi}{6}, \text{ 则 } B = \pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

三角形是等腰三角形， $B = C$ ，则 $b = c$ ，

则 $\frac{b}{c} = 1$.

故答案为：1.

【点评】本题考查正弦定理的应用，三角形的判断，考查计算能力.

14. 【分析】①由题意画出图形得答案；②求出前两天所受商品的种数，由特殊情况得到三天售出的商品最少种数.

【解答】解：①设第一天售出商品的种类集为 A ，第二天售出商品的种类集为 B ，第三天售出商品的种类集为 C ，

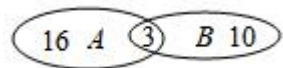
如图，

则第一天售出但第二天未售出的商品有 $19 - 3 = 16$ 种；

②由①知，前两天售出的商品种类为 $19 + 13 - 3 = 29$ 种，第三天售出但第二天未售出的商品有 $18 - 4 = 14$ 种，当这 14 种

商品第一天售出但第二天未售出的 16 种商品中时，即第三天没有售出前两天的商品时，这三天售出的商品种类最少为 29 种.

故答案为：①16；②29.



【点评】本题考查集合的包含关系及其应用，考查了集合中元素的个数判断，考查学生的逻辑思维能力，是中档题.

三、解答题（共6小题，满分80分）

15. 【分析】（1）设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列， $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，运用通项公式可得 $q=3$ ， $d=2$ ，进而得到所求通项公式；

（2）求得 $c_n = a_n + b_n = 2n - 1 + 3^{n-1}$ ，再由数列的求和方法：分组求和，运用等差数列和等比数列的求和公式，计算即可得到所求和.

【解答】解：（1）设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，

$\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，

由 $b_2=3$ ， $b_3=9$ ，可得 $q = \frac{b_3}{b_2} = 3$ ，

$$b_n = b_2 q^{n-2} = 3 \cdot 3^{n-2} = 3^{n-1};$$

即有 $a_1 = b_1 = 1$ ， $a_4 = b_4 = 27$ ，

$$\text{则 } d = \frac{a_4 - a_1}{3} = 2,$$

则 $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n-1$;

（2） $c_n = a_n + b_n = 2n - 1 + 3^{n-1}$ ，

则数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为

$$\begin{aligned} (1+3+\cdots+(2n-1)) + (1+3+9+\cdots+3^{n-1}) &= \frac{1}{2}n \cdot 2n + \frac{1-3^n}{1-3} \\ &= n^2 + \frac{3^n-1}{2}. \end{aligned}$$

【点评】本题考查等差数列和等比数列的通项公式和求和公式的运用，同时考查数列的求和方法：分组求和，考查运算能力，属于基础题.

16. 【分析】（1）直接利用函数的关系式的恒等变换，把函数的关系式变形成正弦型函数，进一步利用周期公式求出 ω 的值.

(2) 直接利用整体思想求出函数的单调递增区间.

【解答】解: $f(x) = 2\sin \omega x \cos \omega x + \cos 2\omega x$,

$$= \sin 2\omega x + \cos 2\omega x,$$

$$= \sqrt{2} \sin(2\omega x + \frac{\pi}{4}),$$

由于函数的最小正周期为 π ,

$$\text{则: } T = \frac{2\pi}{2\omega} = \pi,$$

解得: $\omega = 1$.

$$(2) \text{ 由 (1) 得: 函数 } f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}),$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{解得: } -\frac{3\pi}{8} + k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{所以函数的单调递增区间为: } [-\frac{3\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi] \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

【点评】 本题考查的知识要点: 三角函数关系式的恒等变换, 正弦型函数单调性的应用和周期性的应用.

17. **【分析】** (1) 由频率分布直方图得: 用水量在 $[0.5, 1)$ 的频率为 0.1, 用水量在 $[1, 1.5)$ 的频率为 0.15, 用水量在 $[1.5, 2)$ 的频率为 0.2, 用水量在 $[2, 2.5)$ 的频率为 0.25, 用水量在 $[2.5, 3)$ 的频率为 0.15, 用水量在 $[3, 3.5)$ 的频率为 0.05, 用水量在 $[3.5, 4)$ 的频率为 0.05, 用水量在 $[4, 4.5)$ 的频率为 0.05, 由此能求出为使 80% 以上居民在该用的用水价为 4 元/立方米, w 至少定为 3 立方米.

(2) 当 $w=3$ 时, 利用频率分布直方图能求出该市居民的人均水费.

【解答】解: (1) 由频率分布直方图得:

用水量在 $[0.5, 1)$ 的频率为 0.1,

用水量在 $[1, 1.5)$ 的频率为 0.15,

用水量在 $[1.5, 2)$ 的频率为 0.2,

用水量在 $[2, 2.5)$ 的频率为 0.25,

用水量在 $[2.5, 3)$ 的频率为 0.15,

用水量在 $[3, 3.5)$ 的频率为0.05,

用水量在 $[3.5, 4)$ 的频率为0.05,

用水量在 $[4, 4.5)$ 的频率为0.05,

\therefore 用水量小于等于3立方米的频率为85%,

\therefore 为使80%以上居民在该用的用水价为4元/立方米,

$\therefore w$ 至少定为3立方米.

(2) 当 $w=3$ 时, 该市居民的人均水费为:

$$(0.1 \times 1 + 0.15 \times 1.5 + 0.2 \times 2 + 0.25 \times 2.5 + 0.15 \times 3) \times 4 + 0.05 \times 3 \times 4 + 0.05 \times 0.5 \times 10 + 0.05 \times 3 \times 4 + 0.05 \times 1 \times 10 + 0.05 \times 3 \times 4 + 0.05 \times 1.5 \times 10 = 10.5,$$

\therefore 当 $w=3$ 时, 估计该市居民该月的人均水费为10.5元.

【点评】 本题考查频率分布直方图的应用, 考查当 $w=3$ 时, 该市居民该月的人均水费的估计的求法, 是中档题, 解题时要认真审题, 注意频率分布直方图的合理运用.

18. **【分析】** (1) 利用线面垂直的判定定理证明 $DC \perp$ 平面 PAC ;

(2) 利用线面垂直的判定定理证明 $AB \perp$ 平面 PAC , 即可证明平面 $PAB \perp$ 平面 PAC ;

(3) 在棱 PB 上存在中点 F , 使得 $PA \parallel$ 平面 CEF . 利用线面平行的判定定理证明.

【解答】 (1) 证明: $\because PC \perp$ 平面 $ABCD$, $DC \subset$ 平面 $ABCD$,

$$\therefore PC \perp DC,$$

$$\because DC \perp AC, PC \cap AC = C,$$

$$\therefore DC \perp \text{平面 } PAC;$$

(2) 证明: $\because AB \parallel DC, DC \perp AC$,

$$\therefore AB \perp AC,$$

$$\because PC \perp \text{平面 } ABCD, AB \subset \text{平面 } ABCD,$$

$$\therefore PC \perp AB,$$

$$\because PC \cap AC = C,$$

$$\therefore AB \perp \text{平面 } PAC,$$

$\because ABC \subset \text{平面 } PAB,$

$\therefore \text{平面 } PAB \perp \text{平面 } PAC;$

(3) 解: 在棱 PB 上存在中点 F , 使得 $PA \parallel \text{平面 } CEF$.

\because 点 E 为 AB 的中点,

$\therefore EF \parallel PA,$

$\because PA \not\subset \text{平面 } CEF, EF \subset \text{平面 } CEF,$

$\therefore PA \parallel \text{平面 } CEF.$

【点评】 本题考查线面平行与垂直的证明, 考查平面与平面垂直的证明, 考查学生分析解决问题的能力, 属于中档题.

19. **【分析】** (1) 由题意可得 $a=2, b=1$, 则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, 则椭圆 C 的方程可求, 离心率为 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) 设 $P(x_0, y_0)$, 求出 PA, PB 所在直线方程, 得到 M, N 的坐标, 求得 $|AN|, |BM|$. 由

$$S_{ABNM} = \frac{1}{2} \cdot |AN| \cdot |BM|, \text{ 结合 } P \text{ 在椭圆上求得四边形 } ABNM \text{ 的面积为定值 } 2.$$

【解答】 (1) 解: \because 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 $A(2, 0), B(0, 1)$ 两点,

$\therefore a=2, b=1$, 则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$,

\therefore 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 离心率为 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) 证明: 如图,

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $k_{PA} = \frac{y_0}{x_0-2}$, PA 所在直线方程为 $y = \frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$,

取 $x=0$, 得 $y_M = -\frac{2y_0}{x_0-2}$;

$k_{PB} = \frac{y_0-1}{x_0}$, PB 所在直线方程为 $y = \frac{y_0-1}{x_0}x+1$,

取 $y=0$, 得 $x_N = \frac{x_0}{1-y_0}$.

$$\therefore |AN| = 2 - x_N = 2 - \frac{x_0}{1-y_0} = \frac{2-2y_0-x_0}{1-y_0},$$

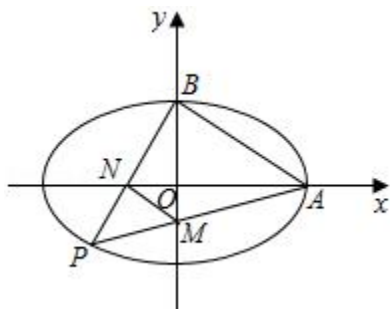
$$|BM| = 1 - x_M = 1 + \frac{2y_0}{x_0-2} = \frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2}.$$

$$\therefore S_{ABNM} = \frac{1}{2} \cdot |AN| \cdot |BM| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2-2y_0-x_0}{1-y_0} \cdot \frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{(x_0+2y_0-2)^2}{(1-y_0)(x_0-2)} = \frac{1}{2} \frac{(x_0+2y_0)^2 - 4(x_0+2y_0) + 4}{x_0y_0+2-x_0-2y_0} = \frac{1}{2} \frac{x_0^2+4x_0y_0+4y_0^2-4x_0-8y_0+4}{x_0y_0+2-x_0-2y_0}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{4(x_0y_0+2-x_0-2y_0)}{x_0y_0+2-x_0-2y_0} = \frac{1}{2} \times 4 = 2.$$

\therefore 四边形 $ABNM$ 的面积为定值 2.



【点评】 本题考查椭圆的标准方程，考查了椭圆的简单性质，考查计算能力与推理论证能力，是中档题.

20. **【分析】** (1) 求出 $f(x)$ 的导数，求得切线的斜率和切点，进而得到所求切线的方程；

(2) 由 $f(x) = 0$ ，可得 $-c = x^3 + 4x^2 + 4x$ ，由 $g(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$ ，求得导数，单调区间和极值，由 $-c$ 介于极值之间，解不等式即可得到所求范围；

(3) 先证若 $f(x)$ 有三个不同零点，令 $f(x) = 0$ ，可得单调区间有 3 个，求出导数，由导数的图象与 x 轴有两个不同的交点，运用判别式大于 0，可得 $a^2 - 3b > 0$ ；再由 $a = b = 4$ ， $c = 0$ ，可得若 $a^2 - 3b > 0$ ，不能推出 $f(x)$ 有 3 个零点.

【解答】 解：(1) 函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的导数为 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ ，

可得 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线斜率为 $k = f'(0) = b$ ，

切点为 $(0, c)$ ，可得切线的方程为 $y = bx + c$ ；

(2) 设 $a = b = 4$ ，即有 $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + c$ ，

由 $f(x) = 0$ ，可得 $-c = x^3 + 4x^2 + 4x$ ，

由 $g(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$ 的导数 $g'(x) = 3x^2 + 8x + 4 = (x+2)(3x+2)$,

当 $x > -\frac{2}{3}$ 或 $x < -2$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 递增;

当 $-2 < x < -\frac{2}{3}$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 递减.

即有 $g(x)$ 在 $x = -2$ 处取得极大值, 且为 0;

$g(x)$ 在 $x = -\frac{2}{3}$ 处取得极小值, 且为 $-\frac{32}{27}$.

由函数 $f(x)$ 有三个不同零点, 可得 $-\frac{32}{27} < -c < 0$,

解得 $0 < c < \frac{32}{27}$,

则 c 的取值范围是 $(0, \frac{32}{27})$;

(3) 证明: 若 $f(x)$ 有三个不同零点, 令 $f(x) = 0$,

可得 $f(x)$ 的图象与 x 轴有三个不同的交点.

即有 $f(x)$ 有 3 个单调区间,

即为导数 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 的图象与 x 轴有两个交点,

可得 $\Delta > 0$, 即 $4a^2 - 12b > 0$, 即为 $a^2 - 3b > 0$;

若 $a^2 - 3b > 0$, 即有导数 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 的图象与 x 轴有两个交点,

当 $c = 0$, $a = b = 4$ 时, 满足 $a^2 - 3b > 0$,

即有 $f(x) = x(x+2)^2$, 图象与 x 轴交于 $(0, 0)$, $(-2, 0)$, 则 $f(x)$ 的零点为 2 个.

故 $a^2 - 3b > 0$ 是 $f(x)$ 有三个不同零点的必要而不充分条件.

【点评】 本题考查导数的运用: 求切线的方程和单调区间、极值, 考查函数的零点的判断, 注意运用导数求得极值, 考查化简整理的能力, 属于中档题.