东城区2022—2023学年度第一学期期末统一检测

高 二 数 学

2023.1

本试卷共6页,满分100分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题 共36分)

一、选择题共12小题,每小题3分,共36分。在每个小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(8,-2,1)$,$\boldsymbol{b}=(-4,1,k)$,且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,那么实数 k 的值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. 2

2. 直线 l:$x-y-\sqrt{3}=0$ 的倾斜角是

A. $45°$　　B. $135°$　　C. $60°$　　D. $90°$

3. 抛物线 $y^2=-2x$ 的准线方程是

A. $y=\frac{1}{2}$　　B. $y=-1$　　C. $x=\frac{1}{2}$　　D. $x=1$

4. 2021年9月17日,北京2022年冬奥会和冬残奥会主题口号正式对外发布——"一起向未来"(英文为:"Together for a Shared Future"),这是中国向世界发出的诚挚邀约,传递出14亿中国人民的美好期待."一起向未来"的英文表达是:"Together for a Shared Future",其字母出现频数统计如下表:

字母	t	o	g	e	h	r	f	a	s	d	u
频数	3	2	1	4	2	4	2	2	1	1	2

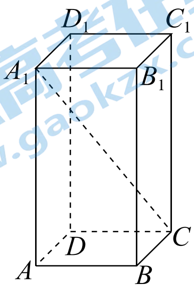
合计频数为24,那么字母"e"出现的频率是

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{1}{4}$

5. 设 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,已知 $a_1=3$,$S_{n+1}=S_n+2^n$,那么 $a_3=$

A. 4　　B. 5　　C. 7　　D. 9

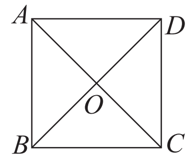
6. 已知在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=1$，$AA_1=2$，那么直线 A_1C 与平面 AA_1D_1D 所成角的正弦值为



A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{35}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

7. 如图，点 O 是正方形 $ABCD$ 两条对角线的交点. 从这个正方形的四个顶点中随机选取两个，那么这两个点关于点 O 对称的概率为



A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{4}$

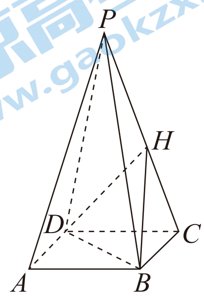
C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

8. 圆心为 $(-1,2)$，半径为 3 的圆的标准方程是

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=9$　　B. $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

C. $(x-1)^2+(y+2)^2=3$　　D. $(x+1)^2+(y-2)^2=3$

9. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 4，棱 AB 的长为 2，点 H 为侧棱 PC 上一动点，那么 $\triangle HBD$ 面积的最小值为



A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

10. 抛掷一枚质地均匀的骰子两次，将第一次得到的点数记为 x，第二次得到的点数记为 y，那么事件“$2^{x+y}\leqslant 16$”的概率为

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{5}{36}$

C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{3}$

11. 地震预警是指在破坏性地震发生以后，在某些区域可以利用“电磁波”抢在“地震波”之前发出避险警报信息，以减小相关预警区域的灾害损失. 根据 Rydelek 和 Pujol 提出的双台子台阵方法，在一次地震发生后，通过两个地震台站的位置和其接收到的信息，可以把震中的位置限制在双曲线的一支上，这两个地震台站的位置就是该双曲线的两个焦点. 在一次地震预警中，两地震台 A 站和 B 站相距 10 km. 根据它们收到的信息，可知震中到 B 站与震中到 A 站的距离之差为 6 km. 据此可以判断，震中到地震台 B 站的距离至少为

A. 8 km　　B. 6 km　　C. 4 km　　D. 2 km

12. 对于数列 $\{a_n\}$，若存在正数 M，使得对一切正整数 n，都有 $|a_n|\leqslant M$，则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的. 若这样的正数 M 不存在，则称数列 $\{a_n\}$ 是无界的. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，下列结论正确的是

A. 若 $a_n=\frac{1}{n}$，则数列 $\{a_n\}$ 是无界的　　B. 若 $a_n=n\sin n$，则数列 $\{a_n\}$ 是有界的

C. 若 $a_n=(-1)^n$，则数列 $\{S_n\}$ 是有界的　　D. 若 $a_n=2+\frac{1}{n^2}$，则数列 $\{S_n\}$ 是有界的

第二部分（非选择题　共 64 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分。

13. 空间向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1,0)$，$\boldsymbol{b}=(m,1,-1)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数 $m=$________.

14. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_4=a_2+6$，则 $a_n=$________.

15. 两条直线 $l_1:3x-4y-2=0$ 与 $l_2:3x-4y+8=0$ 之间的距离是________.

16. 某单位组织知识竞赛，按照比赛规则，每位参赛者从 5 道备选题中随机抽取 3 道题作答. 假设在 5 道备选题中，甲答对每道题的概率都是 $\frac{2}{3}$，且每道题答对与否互不影响，则甲恰好答对其中两道题的概率为________；若乙能答对其中 3 道题且另外两道题不能答对，则乙恰好答对两道题的概率为________.

17. 写出一个中心为坐标原点，焦点在坐标轴上，渐近线方程为 $y=\pm 2x$ 的双曲线的标准方程________.

18. 已知点 P 是曲线 $ax^2+by^2=1$(其中 a,b 为常数)上的一点,设 M,N 是直线 $y=x$ 上任意两个不同的点,且 $|MN|=t$. 则下列结论正确的是________.

①当 $ab>0$ 时,方程 $ax^2+by^2=1$ 表示椭圆;

②当 $ab<0$ 时,方程 $ax^2+by^2=1$ 表示双曲线;

③当 $a=\frac{1}{24}$,$b=\frac{1}{8}$,且 $t=4$ 时,使得△MNP 是等腰直角三角形的点 P 有 6 个;

④当 $a=\frac{1}{24}$,$b=\frac{1}{8}$,且 $0<t<4$ 时,使得△MNP 是等腰直角三角形的点 P 有 8 个.

三、解答题共 5 小题,共 46 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

19. (本小题 8 分)

某超市有 A,B,C 三个收银台,顾客甲、乙两人结账时,选择不同收银台的概率如下表所示,且两人选择哪个收银台相互独立.

收银台 / 顾客	A 收银台	B 收银台	C 收银台
甲	a	0.2	0.4
乙	0.3	b	0.3

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求甲、乙两人在结账时都选择 C 收银台的概率;

(Ⅲ)求甲、乙两人在结账时至少一人选择 C 收银台的概率.

20.（本小题 10 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，Q 为棱 PD 的中点，$PA\perp AD$，$PA=AB=2$，再从下列两个条件中任选一个作为已知，求解下列问题.

条件①：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

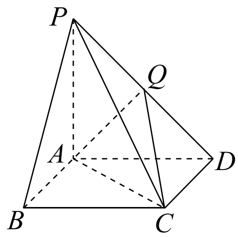
条件②：$PA\perp AB$.

（Ⅰ）求证：$PA\perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）求平面 ACQ 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值；

（Ⅲ）求点 B 到平面 ACQ 的距离.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.



21.（本小题 10 分）

已知圆 C：$x^2+y^2-2x+4y-4=0$，圆 C_1：$(x-3)^2+(y-1)^2=4$ 及点 $P(3,1)$.

（Ⅰ）判断圆 C 和圆 C_1 的位置关系；

（Ⅱ）求经过点 P 且与圆 C 相切的直线方程.

22.(本小题 10 分)

已知椭圆 E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,一个顶点为 $A(0,1)$.

(Ⅰ)求椭圆 E 的方程;

(Ⅱ)若过点 A 的直线 l 与椭圆 E 的另一个交点为 B,且$|AB|=\frac{4}{3}\sqrt{2}$,求点 B 的坐标.

23.(本小题 8 分)

已知无穷数列$\{y_n\}$满足公式 $y_{n+1}=\begin{cases}2y_n, 0\leqslant y_n<\frac{1}{2},\\ 2-2y_n, \frac{1}{2}\leqslant y_n\leqslant 1.\end{cases}$ 设 $y_1=a(0\leqslant a\leqslant 1)$.

(Ⅰ)若 $a=\frac{1}{4}$,求 y_3 的值;

(Ⅱ)若 $y_3=0$,求 a 的值;

(Ⅲ)给定整数 $M(M\geqslant 3)$,是否存在这样的实数 a,使数列$\{y_n\}$满足:

①数列$\{y_n\}$的前 M 项都不为零;

②数列$\{y_n\}$中从第 $M+1$ 项起,每一项都是零.

若存在,请将所有这样的实数 a 从小到大排列形成数列$\{a_n\}$,并写出数列$\{a_n\}$的通项公式;若不存在,请说明理由.

(考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效)

东城区2022—2023学年度第一学期期末统一检测

高二数学参考答案及评分标准

2023.1

一、选择题共12小题，每小题3分，共36分。

1.B	2.A	3.C	4.B	5.A	6.A
7.C	8.B	9.D	10.C	11.A	12.C

二、填空题共6小题，每小题3分，共18分。

13.1.　　14.$3n-1$.　　15.2.　　16.$\frac{4}{9}$;$\frac{3}{5}$.

17.答案不唯一，满足条件的双曲线方程一般形式为$\frac{x^2}{\lambda}-\frac{y^2}{4\lambda}=1(\lambda\neq 0)$，

如$x^2-\frac{y^2}{4}=1$，$\frac{y^2}{4}-x^2=1$.

18.②③④.(全部选对的得满分，部分选对的得部分分，有错误选项的得0分.)

注：两空给分2;1

三、解答题共5小题，共46分。

19.(本小题8分)

解：(Ⅰ)由表可知，甲选择A收银台的概率为$a=1-0.2-0.4=0.4$，

乙选择B收银台的概率为$b=1-0.3-0.3=0.4$. ………………………… 2分

(Ⅱ)设事件A为“甲选择C收银台”，事件B为“乙选择C收银台”，事件C为“甲，乙两人在结账时都选择C收银台”.

根据题意，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，事件A，B相互独立.

所以$P(C)=P(AB)=0.4\times 0.3=0.12$. ………………………… 5分

(Ⅲ)方法1：设事件D为“甲、乙两人在结账时至少一人选择C收银台”，

则$D=A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup AB$.

所以$P(D)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB)=0.4\times 0.7+0.6\times 0.3+0.4\times 0.3=0.58$. …… 8分

方法2：设事件D为“甲、乙两人在结账时至少一人选择C收银台”，

$P(D)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-0.6\times 0.7=0.58$. ………………………… 8分

20.(本小题10分)

条件①：平面$PAD\perp$平面$ABCD$.

(Ⅰ)证明：∵平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$PA\perp AD$，$PA\subset$平面PAD，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，

∴$PA\perp$平面$ABCD$. ………………………… 3分

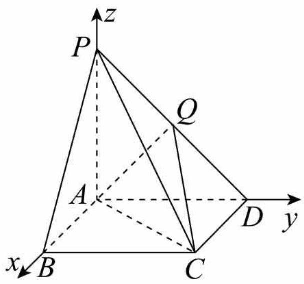
条件②：$PA\perp AB$.

（Ⅰ）证明：$\because PA\perp AB, PA\perp AD, AB, AD\subset$平面 $ABCD$，$AB\cap AD=A$，

$\therefore PA\perp$平面 $ABCD$. ………………………………………………………………… 3 分

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）知 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AB\perp AD$，AB, AD, AP 两两垂直.

$\therefore$以 A 为原点，AB, AD, AP 为 x, y, z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



由此得 $P(0,0,2)$，$A(0,0,0)$，$Q(0,1,1)$，$C(2,2,0)$，

$\therefore \overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AQ}=(0,1,1)$.

由（Ⅰ）知平面 $ABCD$ 的法向量为$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$，

设平面 ACQ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$\because \begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AC},\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AQ},\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}2x+2y=0,\\ y+z=0.\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x=-y,\\ z=-y.\end{cases}$

$\therefore \boldsymbol{n}=(-y,y,-y)$，

令 $y=1$，$\therefore \boldsymbol{n}=(-1,1,-1)$.

设平面 ACQ 与平面 $ABCD$ 的夹角为 θ，

$$\therefore \cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AP},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AP}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{-2}{2\times\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\therefore$平面 ACQ 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………… 8 分

（Ⅲ）解：由已知得 $B(2,0,0)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，

$\therefore$点 B 到平面 ACQ 的距离为$\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2|}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……………………………… 10 分

21.（本小题 10 分）

解：（Ⅰ）将圆 C 的一般方程化成标准方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=9$，

则圆 C 的圆心坐标为$(1,-2)$，半径为 3.

又圆 C_1 的圆心坐标为$(3,1)$，半径为 2，

所以$|CC_1|=\sqrt{(1-3)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{13}$.

因为 $3-2<\sqrt{13}<3+2$，所以圆 C 和圆 C_1 相交. ……………………………………… 6 分

(Ⅱ)直线经过点 P,由题意易知,斜率不存在时不相切.

设直线斜率为 k,则直线方程为 $y-1=k(x-3)$,即 $kx-y-3k+1=0$.

由点到直线的距离公式得 $d=\dfrac{|k+2-3k+1|}{\sqrt{1+k^2}}=3$,

解得 $k=0$ 或 $k=-\dfrac{12}{5}$,

得到直线方程为 $y=1$ 或 $12x+5y-41=0$. ………………………………………………… 10 分

22.(本小题 10 分)

解:(Ⅰ)因为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,上顶点为 $A(0,1)$,

所以 $b=1$,$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,即 $c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

因为 $a^2=b^2+c^2$,解得 $a^2=2$,

所以椭圆 E 的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)方法 1:由题意易知,斜率不存在时不符合要求.

设直线 l 的斜率为 k,则直线 $l:y=kx+1$.

$\begin{cases}y=kx+1,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 整理得$(1+2k^2)x^2+4kx=0$,

则 $B(\dfrac{-4k}{2k^2+1},\dfrac{1-2k^2}{2k^2+1})$.

由$|AB|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$,得$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|\dfrac{-4k}{2k^2+1}|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

(或由$|AB|^2=(\dfrac{-4k}{2k^2+1})^2+(\dfrac{1-2k^2}{2k^2+1}-1)^2=(\dfrac{4\sqrt{2}}{3})^2$ 列式).

化简得 $k^4+k^2-2=0$,解得 $k^2=1$ 或 -2(舍).

所以点 B 的坐标为$(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3})$或$(\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3})$. ……………………………………… 10 分

方法 2:设点 B 的坐标为(x,y),则$\begin{cases}x^2+(y-1)^2=\dfrac{32}{9},\\\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$

则 $2(1-y^2)+(y-1)^2=\dfrac{32}{9}$.

化简得 $9y^2+18y+5=0$,

解得 $y=-\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{5}{3}$.

当 $y=-\frac{5}{3}$ 时，x 无解；当 $y=-\frac{1}{3}$ 时，$x=\pm\frac{4}{3}$.

所以点 B 的坐标为 $(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$ 或 $(\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$. …………………………………………………… 10 分

23.（本小题 8 分）

解：（Ⅰ）因为 $y_1=a=\frac{1}{4}$，所以 $y_2=2y_1=\frac{1}{2}$，$y_3=2-2y_2=1$. ………………………………… 2 分

（Ⅱ）因为 $y_3=0$，

(1) 当 $0\leqslant y_2<\frac{1}{2}$ 时，$y_3=2y_2$，所以 $y_2=0$.

此时，若 $0\leqslant y_1<\frac{1}{2}$，则 $y_2=2y_1$，$a=y_1=0$；

若 $\frac{1}{2}\leqslant y_1\leqslant 1$，则 $y_2=2-2y_1$，$a=y_1=1$.

(2) 当 $\frac{1}{2}\leqslant y_2\leqslant 1$ 时，$y_3=2-2y_2$，所以 $y_2=1$.

此时，若 $0\leqslant y_1<\frac{1}{2}$，则 $y_2=2y_1$，$a=y_1=\frac{1}{2}\notin[0,\frac{1}{2})$；

若 $\frac{1}{2}\leqslant y_1\leqslant 1$，则 $y_2=2-2y_1$，$a=y_1=\frac{1}{2}$.

综上所述，$a=0,1,\frac{1}{2}$. …………………………………………………………………………………… 6 分

（Ⅲ）存在这样的 a.

因为 $y_{M+1}=0$，$y_M\neq 0$，由（Ⅱ）可知 $y_M=1$，$y_{M-1}=\frac{1}{2}$.

(1) 当 $0\leqslant y_{M-2}<\frac{1}{2}$ 时，$y_{M-1}=2y_{M-2}$，所以 $y_{M-2}=\frac{1}{4}$.

(2) 当 $\frac{1}{2}\leqslant y_{M-2}\leqslant 1$ 时，$y_{M-1}=2-2y_{M-2}$，所以 $y_{M-2}=\frac{3}{4}$.

依次类推，$y_1=y_{M-(M-1)}=\frac{1}{2^{M-1}},\frac{3}{2^{M-1}},\frac{5}{2^{M-1}},\cdots,\frac{2^{M-1}-1}{2^{M-1}}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{2n-1}{2^{M-1}}$，$n=1,2,3,\cdots,2^{M-2}$. ………………………………… 8 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〃精益求精、专业严谨〃的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯