2023 北京工大附中高二 10 月月考

数　　学

（考试时间 90 分钟，总分 150 分）

一、单选题（本大题共 11 小题，每小题 5 分，共 55 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的）

1. 直线l经过点$A(0,-1)$，$B(1,1)$，则直线l的斜率是（　）

A. 2　　B. -2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

2. 直线$x+\sqrt{3}y+5=0$的倾斜角为（　）

A. $30°$　　B. $60°$　　C. $120°$　　D. $150°$

3. 在空间直角坐标系$O-xyz$中，$A(-1,-1,-1)$，$B(1,1,1)$，那么$|AB|$等于（　）

A. 2　　B. $\sqrt{6}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

4. 设直线l的方向向量为$\vec{a}$，平面α的法向量为$\vec{b}$，若$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则（　）

A. $l//\alpha$　　B. $l\subset\alpha$　　C. $l\perp\alpha$　　D. $l\subset\alpha$或$l//\alpha$

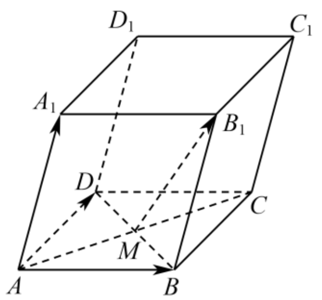
5. 已知$\vec{a}=(2,-1,3)$，$\vec{b}=(-4,1,t)$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则实数t的值为（　）

A. -3　　B. 3　　C. 4　　D. 6

6. 已知直线$Ax+By+C=0$不经过第一象限，且A，B，C均不为零，则有（　）.

A. $C<0$　　B. $C>0$　　C. $BC>0$　　D. $BC<0$

7. 如图，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M为AC和BD的交点，若$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则下列式子中与$\overrightarrow{MB_1}$相等的是（　）



A. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　B. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$　　C. $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　　D. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

8. 已知直线l_1：$2x+(1-a)y+4=0$，l_2：$ax-3y-4=0$，则“$a=3$”是“$l_1 // l_2$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知两点$A(2,-3)$，$B(-3,2)$，直线l过点$P(1,1)$且与线段AB相交，则直线l的斜率k的取值范围是

（　）

A. $-4\le k\le -\frac{1}{4}$　　B. $k\le -4$或$k\ge -\frac{1}{4}$　　C. $-4\le k\le \frac{3}{4}$　　D. $-\frac{3}{4}\le k\le 4$

10. 若直线 l：$y=kx-\sqrt{3}$ 与直线 $2x+3y-6=0$ 的交点位于第一象限，则直线 l 的倾斜角的取值范围是（　）

A. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

11. 已知点 $P(x,\ y)$ 在直线 $x-y-1=0$ 上的运动，则 $(x-2)^2+(y-2)^2$ 的最小值是（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

二、多选题（本大题共 1 小题，每小题 5 分，共 5 分.在每小题给出的四个选项中，请选出所有符合题意的选项，如有错选不得分）

12. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，EF 是棱 AB 上的一条线段，且 $EF=1$，点 Q 是棱 A_1D_1 的中点，点 P 是棱 C_1D_1 上的动点，则下面结论中正确的是（　）

A. PQ 与 EF 一定不垂直

B. 平面 PEF 与平面 EFQ 夹角的正弦值是 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. 三角形 PEF 的面积是 $2\sqrt{2}$

D. 点 P 到平面 QEF 的距离是定值

三、填空题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

13. 已知点 $A(1,1)$，$B(-1,5)$，则线段 AB 中点 C 的坐标为______.

14. 若 $\vec{a}=\left(x,\frac{1}{2},0\right)$（$x>0$）是单位向量，则 x=__________.

15. 已知向量 $\vec{a}=(-2,-3,1)$，$\vec{b}=(2,0,3)$，$\vec{c}=(0,0,2)$，则 $\vec{a}+6\vec{b}-\vec{c}$ 的坐标为______.

16. 已知直线 $l_1: ax+y+1=0$，$l_2: x+ay+1=0$.若 $l_1\perp l_2$，则实数 $a=$__________.

17. 直线 l:$y=kx-k+1$ 过定点为______.

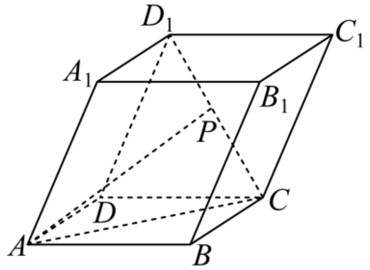
18. 设 $\vec{v_1}=(1,2,-2),\vec{v_2}=(-2,3,2)$ 分别是空间两直线 l_1,l_2 的方向向量，则直线 l_1，l_2 所成角的大小为

__________.

19. 两个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，定义 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$. 若 $\vec{a}=(1,0,1)$，$\vec{b}=(0,2,2)$，则 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=$

__________.

20. 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AA_1=2$，$AD=1$，$\angle BAD=\angle BAA_1=\angle DAA_1=60°$，动点 P 在直线 CD 上运动，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最小值为________.



四、解答题（本大题共 3 个小题，共 50 分解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

21. 分别求满足下列条件的直线方程：

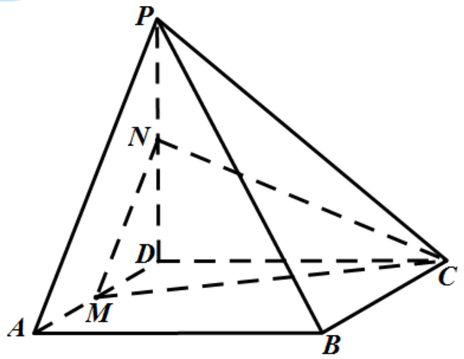
（1）过点 $(3,1)$ 且与直线 $y=3x-1$ 垂直的直线方程；

（2）过点 $(1,2)$ 且与直线 $2x+y-10=0$ 平行的直线方程；

（3）求过点 $A(0,-2)$，斜率是直线 $y=-6x-1$ 的斜率的 $\dfrac{1}{4}$ 的直线方程；

（4）求过点 $A(-1,3)$，且在 x 轴上的截距等于在 y 轴上截距的直线方程.

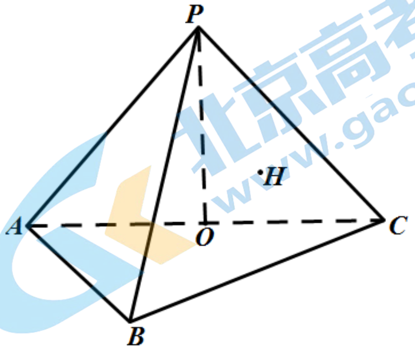
22. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD=2AD=4$，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为正方形，M，N 分别为 AD，PD 的中点.



（1）求证：$PA//$ 平面 MNC；

（2）求直线 PB 与平面 MNC 所成角的正弦值.

23. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形，$AC=8$，$PA=PC=5$，O 为 AC 中点，H 为 PBC 内的动点（含边界）.



（1）求证：$PO\perp$平面ABC；

（2）求平面PAB与平面PBC夹角的余弦值；

（3）若$OH//$平面PAB，求直线PH与平面ABC所成角的正弦值的取值范围.

参考答案

一、单选题（本大题共 11 小题，每小题 5 分，共 55 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的）

1.【答案】A

【分析】运用斜率公式计算即可.

【详解】由题意知，$k=\dfrac{1-(-1)}{1-0}=2$，即直线l的斜率为 2.

故选：A.

2.【答案】D

【分析】求出直线的斜率，然后根据斜率的定义即可求得倾斜角.

【详解】直线$x+\sqrt{3}y+5=0$可化为$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$，

则斜率$k=\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，又倾斜角$\alpha$，满足$0\le\alpha<180°$，

所以倾斜角为$150°$.

故选：D

3.【答案】D

【分析】根据空间中两点之间的距离公式即可求解.

【详解】根据空间中两点之间的距离公式可得$|AB|=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-1)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{3}$，

故选:D

4.【答案】D

【分析】依题意可得$\vec{a}\perp\vec{b}$，即可判断.

【详解】∵直线l的方向向量为$\vec{a}$，平面α的法向量为$\vec{b}$且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即$\vec{a}\perp\vec{b}$，

$\therefore l\subset\alpha$ 或$l//\alpha$.

故选：D

5.【答案】B

【分析】运用空间向量垂直的坐标公式计算即可.

【详解】因为$\vec{a}\perp\vec{b}$，所以$2\times(-4)-1\times1+3t=0$，解得$t=3$.

故选：B.

6.【答案】C

【分析】根据给定条件，求出直线的斜率、纵截距，再列不等式求解作答.

【详解】依题意，直线$Ax+By+C=0$的斜率为$-\dfrac{A}{B}$，纵截距为$-\dfrac{C}{B}$，又该直线不经过第一象限，

因此 $-\frac{A}{B}<0$，且 $-\frac{C}{B}<0$，即 $AB>0$，$BC>0$，选项 A，B 不一定正确，D 不正确，C 正确.

故选：C.

7.【答案】A

【分析】根据空间向量的加减运算，表示出向量 $\overrightarrow{MB_1}$，即得答案.

【详解】$\overrightarrow{MB_1}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AA_1}$

$=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$，

故选;A

8.【答案】C

【分析】利用充要条件的定义判断.

【详解】解：当 $a=3$ 时，直线 l_1：$x-y+2=0$，l_2：$3x-3y-4=0$，则 $l_1 \parallel l_2$，

当 $l_1 \parallel l_2$ 时，$\begin{cases}2\times(-3)-(1-a)\times a=0\\2\times(-4)-4a\neq 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}a^2-a-6=0\\a+2\neq 0\end{cases}$，

解得 $a=3$，

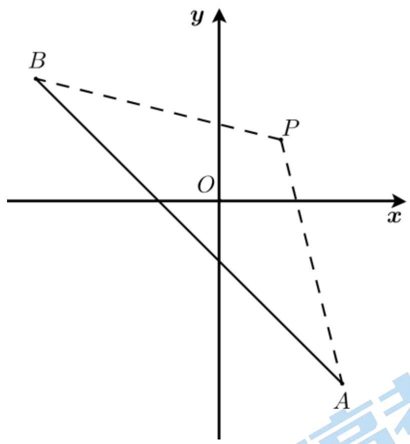
故“$a=3$”是“$l_1 \parallel l_2$”的充要条件，

故选：C

9.【答案】B

【分析】数形结合法，讨论直线 l 过 A、B 时对应的斜率，进而判断率 k 的范围.

【详解】如下图示，



当直线 l 过 A 时，$k=\frac{-3-1}{2-1}=-4$，

当直线 l 过 B 时，$k=\frac{2-1}{-3-1}=-\frac{1}{4}$，

由图知：$k\le -4$ 或 $k\ge -\frac{1}{4}$.

故选：B

10.【答案】B

【分析】联立两直线方程得到交点坐标，然后根据交点位于第一象限得到$\begin{cases}\dfrac{6+3\sqrt{3}}{2+3k}>0\\ \dfrac{6k-2\sqrt{3}}{2+3k}>0\end{cases}$，解方程得到$k>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，最后根据斜率与倾斜角的关系得到倾斜角的范围.

【详解】联立$\begin{cases}y=kx-\sqrt{3}\\ 2x+3y-6=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=\dfrac{6+3\sqrt{3}}{2+3k}\\ y=\dfrac{6k-2\sqrt{3}}{2+3k}\end{cases}$，所以$\begin{cases}\dfrac{6+3\sqrt{3}}{2+3k}>0\\ \dfrac{6k-2\sqrt{3}}{2+3k}>0\end{cases}$，解得$k>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以直线l的倾斜角的范围为$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

故选：B.

11.【答案】A

【分析】$(x-2)^2+(y-2)^2$表示点$P(x,\ y)$与$(2,2)$距离的平方，求出$(2,2)$到直线$x-y-1=0$的距离，即可得到答案.

【详解】$(x-2)^2+(y-2)^2$表示点$P(x,\ y)$与$(2,2)$距离的平方，

因为点$(2,2)$到直线$x-y-1=0$的距离$d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

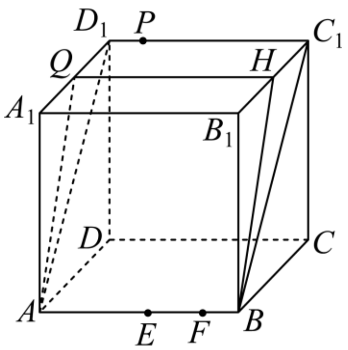
所以$(2,2)$的最小值为$d^2=\dfrac{1}{2}$.

故选：A

二、多选题（本大题共1小题，每小题5分，共5分.在每小题给出的四个选项中，请选出所有符合题意的选项，如有错选不得分）

12.【答案】BCD

【分析】根据点P和点D_1重合时，$PQ\perp EF$判断A选项；根据二面角平面角的定义得到$\angle QAD_1$为平面PEF与平面EFQ的夹角，然后求正弦值判断B选项；根据四边形ABC_1D_1为矩形得到P到EF的距离和AD_1相等，然后求三角形面积即可判断C选项；根据线面平行的判定定理得到D_1C_1 // 平面QEF，然后结合线面平行的性质得到点P到平面QEF的距离为定值即可判断D选项.

【详解】

当点 P 和点 D_1 重合时，$PQ \perp EF$，故 A 错；

取 B_1C_1 中点 H，连接 QH，AQ，AD_1，BH，BC_1，

因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，所以 $D_1C_1 // AB$，$QH // AB$，$AB \perp$ 平面 AA_1D_1D，

所以平面 PEF 即平面 ABC_1D_1，平面 EFQ 即平面 $ABHQ$，

因为 $AQ, AD_1 \subset$ 平面 AA_1D_1D，所以 $AB \perp AQ$，$AB \perp AD_1$，

因为平面 $ABC_1D_1 \cap$ 平面 $ABHQ = AB$，所以 $\angle QAD_1$ 为平面 PEF 与平面 EFQ 的夹角，

由题意得，$AQ = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$，$AD_1 = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$，$QD = 2$，

所以 $\cos\angle QAD_1 = \dfrac{QA^2 + AD_1^2 - QD_1^2}{2 \cdot QA \cdot AD_1} = \dfrac{20+32-4}{16\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

因为 $\angle QAD_1 \in (0,\pi)$，所以 $\sin\angle QAD_1 = \sqrt{1-\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$，故 B 正确；

由题意得四边形 ABC_1D_1 为矩形，所以 P 到 EF 的距离和 AD_1 相等，

所以 $S_{\triangle EFP} = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$，故 C 正确；

因为 $D_1C_1 // AB$，即 $D_1C_1 // EF$，$D_1C_1 \not\subset$ 平面 QEF，$EF \subset$ 平面 QEF，

所以 $D_1C_1 //$ 平面 QEF，

又 $P \in D_1C_1$，所以点 P 到平面 QEF 的距离为定值，故 D 正确.

故选：BCD.

三、填空题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

13.【答案】$(0,3)$

【分析】利用中点坐标公式直接求解作答.

【详解】点 $A(1,1)$，$B(-1,5)$，所以线段 AB 中点 C 的坐标为 $(0,3)$.

故答案为：$(0,3)$

14.【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ## $\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$

【分析】运用单位向量的定义及空间向量模长公式计算即可.

【详解】由题意知，$|\vec{a}|=1$，所以 $\sqrt{x^2+(\frac{1}{2})^2+0^2}=1$，解得 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又因为 $x>0$，所以 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15.【答案】$(10,-3,17)$

【分析】直接利用向量的运算法则计算即可.

【详解】向量 $\vec{a}=(-2,-3,1)$，$\vec{b}=(2,0,3)$，$\vec{c}=(0,0,2)$，则

$\vec{a}+6\vec{b}-\vec{c}=(-2,-3,1)+6(2,0,3)-(0,0,2)=(10,-3,17)$.

故答案为：$(10,-3,17)$.

16.【答案】0

【分析】利用两直线的位置关系求解.

【详解】因为直线 $l_1:ax+y+1=0$，$l_2:x+ay+1=0$，且 $l_1\perp l_2$，

所以 $a\times1+1\times a=0$，

解得 $a=0$，

故答案为：0

17.【答案】$(1,1)$

【分析】先把直线化为点斜式，从而可确定定点.

【详解】直线 l 可化为点斜式 $y-1=k(x-1)$，

所以直线 $l:y=kx-k+1$ 过定点 $(1,1)$.

故答案为：$(1,1)$.

18.【答案】$90°$ ## $\frac{\pi}{2}$

【分析】空间中直线与直线所成的角，与其对应的方向向量夹角相同，直接利用空间向量的夹角公式计算即可.

【详解】因为 $\cos\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\rangle=\frac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}|\cdot|\overrightarrow{v_2}|}=\frac{1\times(-2)+2\times3+(-2)\times2}{\sqrt{1+2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+3^2+2^2}}=0$，

所以 $\overrightarrow{v_1}$ 与 $\overrightarrow{v_2}$ 的夹角为 $90°$，即直线 l_1，l_2 所成角的大小为 $90°$.

故答案为：$90°$.

19.【答案】$2\sqrt{3}$

【分析】根据新定义及向量夹角公式计算即可.

【详解】因为$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},|\vec{b}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，

所以$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，

故$\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

故答案为：$2\sqrt{3}$

20.【答案】$-\dfrac{1}{4}$

【分析】设$\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{D_1C}$，然后根据空间向量的线性运算和数量积的运算律得到

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\left(2\lambda-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$，最后求最小值即可.

【详解】设$\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{D_1C}$，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{PC}$$

$$=\left(\lambda\overrightarrow{D_1C}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\lambda\overrightarrow{D_1C}$$

$$=\left(\lambda\overrightarrow{A_1B}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\lambda\overrightarrow{A_1B}$$

$$=\left(\lambda\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\lambda\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{AA_1}\right)$$

$$=\lambda(\lambda-1)\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\lambda^2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\lambda(\lambda-1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\lambda^2\left|\overrightarrow{AA_1}\right|^2+\lambda\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}$$

$$=\lambda(\lambda-1)\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\left(2\lambda^2-\lambda\right)\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\lambda^2\left|\overrightarrow{AA_1}\right|^2+\lambda\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}$$

$$=\lambda(\lambda-1)\times4-\left(2\lambda^2-\lambda\right)\times4\cos60^\circ-\lambda\times2\cos60^\circ+4\lambda^2+\lambda\cdot2\cos60^\circ$$

$$=4\lambda^2-2\lambda$$

$$=\left(2\lambda-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geq-\frac{1}{4},$$

当且仅当$\lambda=\dfrac{1}{4}$时等号成立，所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$的最小值为$-\dfrac{1}{4}$.

故答案为：$-\dfrac{1}{4}$.

四、解答题（本大题共 3 个小题，共 50 分解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

21. 【答案】（1） $x+3y-6=0$

（2） $2x+y-4=0$

（3） $3x+2y+4=0$

（4） $3x+y=0$ 或 $x+y-2=0$

【分析】（1）由两直线垂直可得所求直线的斜率，结合点斜式方程求解即可.

（2）由两直线平行可得所求直线的斜率，结合点斜式方程求解即可.

（3）由已知可得所求直线的斜率，结合点斜式方程求解即可.

（4）分别研究截距为 0 与截距不为 0 时直线方程即可.

【小问 1 详解】

因为 $y=3x-1$ 的斜率为 3，所以所求直线的斜率为 $k=-\frac{1}{3}$，

所以由点斜式方程可得 $y-1=-\frac{1}{3}(x-3)$，即 $x+3y-6=0$.

【小问 2 详解】

因为 $2x+y-10=0$ 的斜率为 -2，所以所求直线的斜率为 $k=-2$，

所以由点斜式方程可得 $y-2=-2(x-1)$，即 $2x+y-4=0$.

【小问 3 详解】

因为 $y=-6x-1$ 的斜率为 -6，所以所求直线的斜率为 $k=-6\times\frac{1}{4}=-\frac{3}{2}$，

所以由点斜式方程可得 $y+2=-\frac{3}{2}(x-0)$，即 $3x+2y+4=0$.

【小问 4 详解】

①当截距为 0 时，设直线方程为 $y=kx$，

因为直线过点 $A(-1,3)$，所以 $3=-k$，即 $k=-3$，

所以直线方程为 $y=-3x$，即 $3x+y=0$.

②当截距不为 0 时，设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$（$a\neq0$），

因为直线过点 $A(-1,3)$，所以 $\frac{-1}{a}+\frac{3}{a}=1$，解得 $a=2$，

所以直线方程为 $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$，即 $x+y-2=0$.

综述：所求直线方程为 $3x+y=0$ 或 $x+y-2=0$.

22. 【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{1}{6}$

【分析】（1）利用中位线定理证得 $PA//MN$，结合线面平行的判定定理证明即可.

（2）建立空间直角坐标系，运用空间向量夹角的坐标公式计算即可.

【小问 1 详解】

证明：因为 M， N 分别为 AD， PD 的中点，

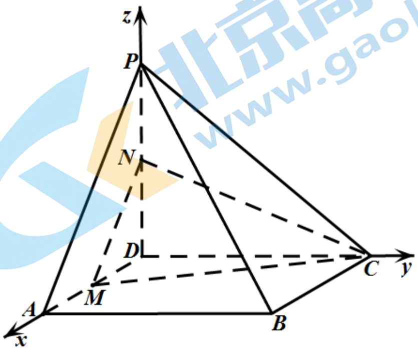
所以 $PA//MN$，

又因为 $PA\not\subset$ 平面 MNC， $MN\subset$ 平面 MNC，

所以 $PA//$ 平面 MNC .

【小问 2 详解】

由题意知，以点 D 为坐标原点，分别以 DA、DC 、 DP 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系，如图所示，



则 $P(0,0,4)$， $B(2,2,0)$， $M(1,0,0)$， $N(0,0,2)$， $C(0,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{PB}=(2,2,-4)$， $\overrightarrow{NC}=(0,2,-2)$， $\overrightarrow{MN}=(-1,0,2)$，

设平面 MNC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{NC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}2y-2z=0\\ -x+2z=0\end{cases}$，

取 $z=1$，则 $x=2$， $y=1$，所以 $\vec{n}=(2,1,1)$，

设直线 PB 与平面 MNC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PB},\vec{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{PB}||\vec{n}|}=\frac{|2\times2+2\times1-4\times1|}{\sqrt{2^2+2^2+(-4)^2}\times\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{2}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{1}{6}$，

故直线 PB 与平面 MNC 所成角的正弦值为 $\frac{1}{6}$.

23.【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{8}{17}$

（3）$[\frac{3}{5},\frac{3\sqrt{17}}{17}]$

【分析】（1）运用面面垂直的性质定理即可证明.

（2）建立空间直角坐标系，运用面面夹角的坐标公式计算即可.

（3）设点 H 坐标，由 $OH//$ 平面 PAB， $PH\subset$ 面 PBC 可表示 H 坐标，结合线面角坐标公式计算可得 $\sin\alpha=\dfrac{\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{\sqrt{\frac{25}{16}x^2+\frac{9}{4}x+\frac{25}{4}}}$（$0\le x\le 2$），运用换元法求此函数的值域即可.

【小问 1 详解】

证明：因为平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC$， $PO\perp AC$， $PO\subset$ 平面 PAC，

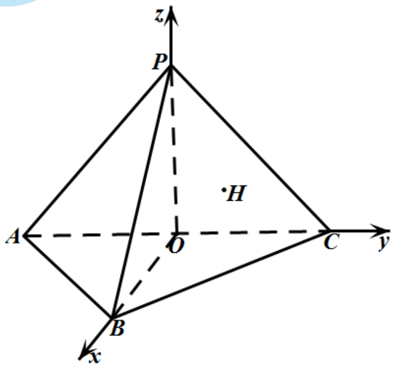
所以 $PO\perp$ 平面 ABC.

【小问 2 详解】

在三棱锥 $P-ABC$ 中，连接 OB，

因为 O 为 AC 中点， $\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形，则 $OB\perp OC$，

由（1）知， $PO\perp$ 平面 ABC，所以以 O 为原点，分别以 OB、OC、OP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，如图所示，



由题意知， $OB=OA=OC=4$，又 $PA=PC=5$，则 $OP=3$，

则 $P(0,0,3)$， $A(0,-4,0)$， $B(4,0,0)$， $C(0,4,0)$，

所以 $\overrightarrow{PA}=(0,-4,-3)$， $\overrightarrow{PB}=(4,0,-3)$， $\overrightarrow{PC}=(0,4,-3)$，

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=-4y_1-3z_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=4x_1-3z_1=0\end{cases}$，

取 $x_1=3$，则 $y_1=-3$， $z_1=4$，则 $\vec{n}=(3,-3,4)$，

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=4x_2-3z_2=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=4y_2-3z_2=0\end{cases}$，

取$x_2=3$，则$y_2=3$，$z_2=4$，则$\vec{m}=(3,3,4)$，

设平面PAB与平面PBC夹角为θ，

则$\cos\theta=|\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{|9-9+16|}{\sqrt{9+9+16}\times\sqrt{9+9+16}}=\dfrac{16}{34}=\dfrac{8}{17}$，

即平面PAB与平面PBC夹角的余弦值为$\dfrac{8}{17}$.

【小问 3 详解】

如（2）建系及图可知，平面PAB的法向量为$\vec{n}=(3,-3,4)$，平面PBC的法向量为$\vec{m}=(3,3,4)$，

$P(0,0,3)$，

设$H(x,y,z)$，则$\overrightarrow{OH}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{PH}=(x,y,z-3)$，

因为OH//平面PAB，$PH\subset$面PBC，

所以$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{OH}=3x-3y+4z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PH}=3x+3y+4(z-3)=0\end{cases}$，解得$H(x,2,\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{4}x)$，

所以$\overrightarrow{PH}=(x,2,-\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{4}x)$，

又因为$OP\perp$平面ABC，

所以$\vec{p}=(0,0,1)$是平面ABC的一个法向量，

设直线PH与平面ABC所成角为α，

则$\sin\alpha=|\cos\langle\vec{p},\overrightarrow{PH}\rangle|=\dfrac{|-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}x|}{\sqrt{x^2+4+(-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}x)^2}}=\dfrac{\frac{3}{2}|1+\frac{1}{2}x|}{\sqrt{\frac{25}{16}x^2+\frac{9}{4}x+\frac{25}{4}}}$，

又H为PBC内的动点（含边界），

所以$\begin{cases}0\le x\le 4\\ 0\le\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{4}x\le 3\end{cases}$，解得$0\le x\le 2$，

所以$\sin\alpha=\dfrac{\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{\sqrt{\frac{25}{16}x^2+\frac{9}{4}x+\frac{25}{4}}}$（$0\le x\le 2$），

令$t=1+\dfrac{1}{2}x$，则$x=2(t-1)$，（$1\le t\le 2$），

所以 $\sin\alpha=\dfrac{\frac{3}{2}t}{\sqrt{\frac{25}{16}\times 4(t-1)^2+\frac{9}{4}\times 2(t-1)+\frac{25}{4}}}=\dfrac{\frac{3}{2}t}{\frac{1}{2}\sqrt{25t^2-32t+32}}=3\times\sqrt{\dfrac{t^2}{25t^2-32t+32}}$

$=3\times\sqrt{\dfrac{1}{\frac{32}{t^2}-\frac{32}{t}+25}}=3\times\sqrt{\dfrac{1}{32(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})^2+17}}$ （$1\le t\le 2$），

因为$1\le t\le 2$，所以$\frac{1}{2}\le\frac{1}{t}\le 1$，

所以$0\le(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}$，

所以$17\le 32(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})^2+17\le 25$，

所以$\frac{1}{5}\le\sqrt{\dfrac{1}{32(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})^2+17}}\le\frac{\sqrt{17}}{17}$，即$\frac{3}{5}\le 3\times\sqrt{\dfrac{1}{32(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})^2+17}}\le\frac{3\sqrt{17}}{17}$，

所以直线PH与平面ABC所成角的正弦值的取值范围为$[\frac{3}{5},\frac{3\sqrt{17}}{17}]$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！