北京市西城区 2022—2023 学年度第一学期期末试卷

高二数学答案及评分参考

2023.1

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

（1）D	（2）A	（3）C	（4）C	（5） D
（6）B	（7）B	（8）A	（9）A	（10）B

二、填空题：本大题共 5 题，每小题 5 分，共 25 分.

（11）$2x-3y-1=0$　　（12）20　　（13）$2\sqrt{2}$

（14）答案不唯一，如 2 .（注：$e\in(1,\sqrt{5}]$）　　（15）② ③ ④

注：第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

（16）（本小题 10 分）

解：（Ⅰ）从 4 男 3 女共 7 名志愿者中，选出 3 人参加社区义务劳动，

选择方法数为 $C_7^3=35$.　　………………… 4 分

（Ⅱ）选中 3 人都是男生的选择方法数为 $C_4^3=4$，　　………………… 6 分

选中 3 人都是女生的选择方法数为 $C_3^3=1$，　　………………… 8 分

所以若选中的 3 人性别不都相同，选择方法数为 $35-4-1=30$.　　………………… 10 分

（17）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，且底面 $ABCD$ 为正方形，

所以 AB, AD, AP 两两垂直.

故以 A 为原点，AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.　　………………… 1 分

则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(1,0,0)$.

所以 $\overline{BC}=(0,2,0)$，$\overline{PE}=(1,0,-2)$.　　………………… 3 分

所以 $\overline{BC}\cdot\overline{PE}=0$，

所以 $BC\perp PE$.　　……………… 5 分

（Ⅱ）显然 $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$ 是平面 PAB 的一个法向量. ……………… 7 分

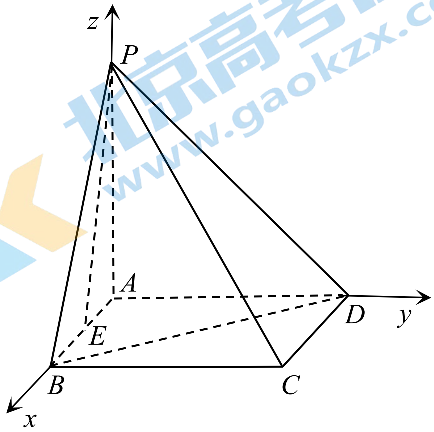
因为 $\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$，…… 8 分

设平面 PBD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x-2z=0,\\ 2y-2z=0.\end{cases}$ ……… 10 分

令 $x=1$，则 $y=1,\ z=1$.

于是 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$. ……………… 12 分



因为 $\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{AD}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以平面 PAB 与平面 PBD 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………… 15 分

（18）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）设 $P(x,y)$，则直线 PA 的斜率为 $k_{PA}=\dfrac{y}{x+1}$，直线 PB 的斜率 $k_{PB}=\dfrac{y}{x-1}$. …… 3 分

所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y^2}{x^2-1}=\lambda$，

即 $\lambda x^2-y^2=\lambda$，其中 $x\neq\pm1$. ……………… 6 分

由曲线 C 是一个圆（或圆的一部分），得 $\lambda=-1$. ……………… 8 分

（Ⅱ）由曲线 $C:\lambda x^2-y^2=\lambda$ 是一个双曲线（或双曲线的一部分），

得 $\lambda>0$，且该双曲线的标准方程可化为 $x^2-\dfrac{y^2}{\lambda}=1$. ……………… 10 分

此时双曲线 C 对应的 $a^2=1$，$b^2=\lambda$. ……………… 12 分

所以离心率 e 满足 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2}=1+\lambda$. ……………… 14 分

由 $e\geqslant\sqrt{2}$，得 $\lambda+1\geqslant2$.

解得 $\lambda\geqslant1$. ……………… 15 分

（19）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）设椭圆的半焦距为 c．

由题意得 $\begin{cases} c=\sqrt{3}, \\ a=2b, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ ………………… 3 分

解得 $a=2$， $b=1$． ………………… 4 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$． ………………… 5 分

（Ⅱ）假设椭圆 C 上存在关于 l 对称的两点 A,B．

则 $AB\perp l$，且线段 AB 的中点在直线 l 上. ………………… 7 分

由题意，直线 l 的方程为 $y=x-\sqrt{3}$． ………………… 8 分

设直线 AB 的方程为 $y=-x+m$． ………………… 9 分

由 $\begin{cases} y=-x+m, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $5x^2-8mx+4m^2-4=0$． ………………… 10 分

由 $\Delta=(8m)^2-4\times5\times(4m^2-4)>0$，解得 $-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$． ………………… 11 分

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{8m}{5}$． ………………… 12 分

设线段 AB 的中点为 D，

则 $x_D=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4m}{5}$， $y_D=-x_D+m=\frac{m}{5}$． ………………… 13 分

由线段 AB 的中点在直线 l 上，得 $\frac{m}{5}=\frac{4m}{5}-\sqrt{3}$，

解得 $m=\frac{5}{3}\sqrt{3}$，这与 $-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$（即 $\Delta>0$）矛盾，

所以椭圆 C 上不存在关于 l 对称的两点 A,B． ………………… 15 分

（20）（本小题 15 分）

解：若选择条件①：

因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$， $AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AA_1 \perp AD$，

又因为 $AD \perp BE$， $AA_1 \cap BE = E$， $AA_1, BE \subset$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $AD \perp$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $AD \perp AB$. ………………… 2 分

若选择条件②:

在四边形 $ABCD$ 中，设 AB 的中点为 F，连接 CF （图略），

由 $AB//CD$， $CD=1$， $AB=2$，得四边形 $ADCF$ 为平行四边形.

所以 $CF=1$， $AD//CF$.

又因为 $BC=\sqrt{2}$， $BF=1$.

所以 $BF^2+CF^2=BC^2$， 所以 $BF \perp CF$.

所以 $AD \perp AB$. ………………… 2 分

故选择条件①或选择条件②均可得到 $AD \perp AB$.

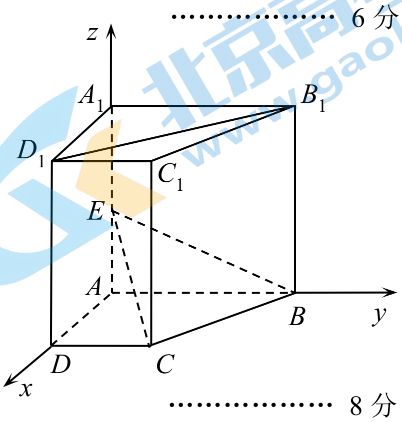
（Ⅰ）又由 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$，可得 AD， AB， AA_1 两两垂直，所以以 A 为原点， AD， AB， AA_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴，如图建立空间直角坐标系， …… 3 分

则 $A(0,0,0)$， $B(0,2,0)$， $C(1,1,0)$， $E(0,0,1)$， $B_1(0,2,2)$， $C_1(1,1,2)$， $D_1(1,0,2)$.

所以 $\overrightarrow{CE}=(-1,-1,1)$， $\overrightarrow{B_1D_1}=(1,-2,0)$. ………………… 4 分

所以 $\cos\langle \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{B_1D_1} \rangle = \dfrac{\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}}{|\overrightarrow{CE}||\overrightarrow{B_1D_1}|} = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

所以直线 CE 与 B_1D_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$. ………………… 6 分



（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$.

因为 $\overrightarrow{BC}=(1,-1,0)$， $\overrightarrow{BE}=(0,-2,1)$，

设平面 BCE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x, y, z)$，

所以 $\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x-y=0, \\ -2y+z=0. \end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=1$， $z=2$，于是 $\boldsymbol{m}=(1,1,2)$. ………………… 8 分

所以点 C_1 到平面 BCE 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. ………………… 10 分

（Ⅲ）设 $CM=\lambda CC_1$，其中 $\lambda\in[0,1]$，则 $\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2\lambda)$． ……………… 11 分

所以 $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CM}=(1,1,2\lambda-1)$． ……………… 12 分

因为 $\overrightarrow{BC}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$．

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1-y_1=0,\\ 2z_1=0.\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $y_1=1$，$z_1=0$，于是 $\boldsymbol{n}=(1,1,0)$． ……………… 13 分

记直线 EM 与平面 BCC_1B_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{EM},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{EM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EM}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4\lambda^2-4\lambda+3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$， ……… 14 分

解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$，或 $\lambda=\dfrac{3}{4}$．

所以 $CM=\dfrac{1}{2}$ 或 $CM=\dfrac{3}{2}$． ……………… 15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）设椭圆的长半轴为 a，短半轴为 b，半焦距为 c．

由题意，得 $\begin{cases}a^2=t+1,\\ b^2=6-t,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ ……………… 3 分

解得 $t=3$． ……………… 4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$． ……………… 5 分

① 当 $m\neq\pm2$ 时，

设过点 $P(m,n)$ 且与椭圆 C 相切的直线方程为 $y-n=k(x-m)$． ………… 6 分

联立方程组 $\begin{cases}y-n=k(x-m),\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

消去 y，得 $(3+4k^2)x^2+8k(n-km)x+4(n-km)^2-12=0$. …………………… 8 分

则 $\Delta_1=64k^2(n-km)^2-4(3+4k^2)\left[4(n-km)^2-12\right]=0$， …………………… 9 分

化简，得 $(m^2-4)k^2-2mnk-3+n^2=0$. （$*$）

因为过点 $P(m,n)$ 可作两条互相垂直的直线 l_1,l_2，且 l_1,l_2 均与椭圆 C 相切，

所以关于 k 的方程（$*$）存在两个根 k_1,k_2（分别为直线 l_1,l_2 的斜率），且 $k_1k_2=-1$.

…………………… 11 分

所以 $m^2-4\neq 0$，$\Delta_2=4m^2n^2-4(m^2-4)(n^2-3)=4(3m^2+4n^2-12)>0$，

且 $k_1k_2=\dfrac{n^2-3}{m^2-4}=-1$.

即 $m^2+n^2=7$（$m\neq\pm 2$），且验证知 $\Delta_2>0$.

所以点 $P(m,n)$ 在圆 $x^2+y^2=7$ 上. …………………… 13 分

② 当 $m=\pm 2$ 时，

由 l_1,l_2 均与椭圆 C 相切，得直线 l_1，l_2 分别与 x 轴、y 轴平行，此时点 P 的坐标为 $(2,\sqrt{3})$，或 $(2,-\sqrt{3})$，或 $(-2,\sqrt{3})$，或 $(-2,-\sqrt{3})$.

所以点 $P(m,n)$ 在圆 $x^2+y^2=7$ 上.

经验证，过圆 $x^2+y^2=7$ 上任意的一点可作两条互相垂直的直线 l_1,l_2，且 l_1,l_2 均与椭圆 C 相切.

综上，动点 $P(m,n)$ 组成的集合是一个圆，且圆的方程为 $x^2+y^2=7$. …… 15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。