

# 2023 北京怀柔高一（上）期末

## 数 学

2023.1

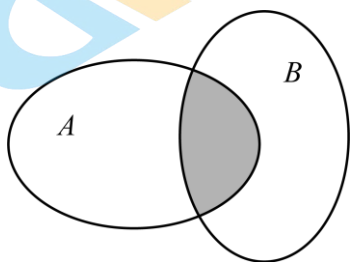
注意事项：

1. 本试卷分第一部分选择题和第二部分非选择题两部分，共四页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 试题所有答案必须书写在答题卡的对应位置。在试卷上作答无效。
3. 考试结束后，考生应及时上传答案。

### 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，集合  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ，则图中阴影部分表示 集合为（ ）



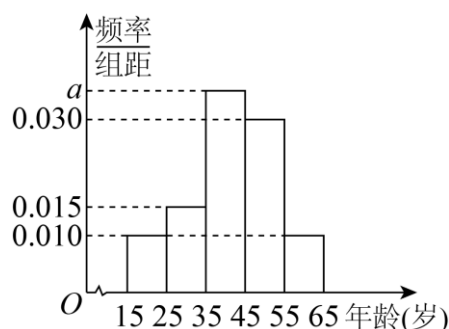
- A.  $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$     B.  $\{1, 2, 3\}$     C.  $\{0, 1, 2, 3\}$     D.  $\{4, 5, 6\}$
2. 若命题  $P$ ：“ $\exists x \in (0, +\infty)$ ， $\ln x \geq 1$ ”，则  $\neg P$  为（ ）
- A.  $\exists x \in (-\infty, 0]$ ， $\ln x \geq 1$     B.  $\exists x \in (0, +\infty)$ ， $\ln x < 1$
- C.  $\forall x \in (0, +\infty)$ ， $\ln x \leq 1$     D.  $\forall x \in (0, +\infty)$ ， $\ln x < 1$
3. 下列函数既是奇函数又在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增的是（ ）
- A.  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$     B.  $f(x) = \log_2(x+1)$     C.  $f(x) = x^3$     D.  $f(x) = x^2 + 1$
4. 已知  $a, b, c \in \mathbf{R}$ ，且  $a > b$ ，则下列不等式一定成立的是（ ）
- A.  $|a| > |b|$     B.  $a - c > b - c$     C.  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$     D.  $a \cdot c^2 > b \cdot c^2$
5. 设  $a = 2^{0.3}$ ， $b = 0.2^3$ ， $c = \log_{0.2} 5$ ，则  $a, b, c$  的大小关系是（ ）
- A.  $a < b < c$     B.  $b < c < a$     C.  $c < a < b$     D.  $c < b < a$
6. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数，且当  $x > 0$  时， $f(x) = \log_2 x$ ，则  $f(-4)$  的值是（ ）

A. 2

B. -2

C.  $-\frac{1}{2}$ D.  $\frac{1}{2}$ 

7. 某直播间从参与购物的人群中随机选出 200 人,并将这 200 人按年龄分组,得到的频率分布直方图如图所示,则在这 200 人中年龄在  $[25,35)$  的人数  $n$  及直方图中  $a$  值是 ( )

A.  $n = 35, a = 0.032$ B.  $n = 35, a = 0.32$ C.  $n = 30, a = 0.035$ D.  $n = 30, a = 0.35$ 

8. 已知  $a \in \mathbb{R}$ ,  $p$ : 方程  $x^2 + ax + 1 = 0$  有实数解,  $q$ :  $2 < a < 3$ , 则  $p$  是  $q$  的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分不必要条件

9. 溶液酸碱度是通过  $PH$  计量的.  $PH$  的计算公式为  $PH = -\lg[H^+]$ , 其中  $[H^+]$  表示溶液中氢离子的浓度, 单位是摩尔/升. 已知某品牌苏打水中氢离子的浓度为  $[H^+] = 5 \times 10^{-9}$  摩尔/升, 计算这种苏打水的  $PH$  值. (精确到 0.001) (参考数据:  $\lg 2 \approx 0.301$ ) ( )

A. 8.699

B. 8.301

C. 7.699

D. 6.602

10. 已知  $f(x-2)$  是偶函数, 函数  $f(x)$  对任意  $x_1, x_2 \in (-\infty, -2]$ , 且  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$  成立, 且  $f(0) = 0$ , 则  $f(x) > 0$  的解集是 ( )

A.  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ B.  $(-2, 2)$ C.  $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ D.  $(-4, 0)$ 

## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题: 共 5 道小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 函数  $f(x) = \log_2(x-1)$  的定义域为\_\_\_\_\_.

12. 某学校高一有 280 名学生, 高二有 200 名学生, 高三有 120 名学生, 用分层抽样的方法从中抽取 60 名学生对课后辅导的满意度进行调查, 则从高一学生中应抽取\_\_\_\_\_人.

13. 已知  $x > -1$ , 则  $x + \frac{4}{x+1}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = 3^x$ , 则下列命题正确的有\_\_\_\_\_. (写出所有正确命题的编号)

①对于任意  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , 都有  $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  成立;

②对于任意  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , 且  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$  成立

③对于任意  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , 且  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$  成立;

④存在实数  $a$ , 使得对于任意实数  $x$ , 都有  $f(x+a) = f(a-x)$  成立.

15. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -ax+1, & x < a \\ (x-2)^2, & x \geq a \end{cases}$ , 当  $a=1$  时, 则  $f[f(-2)] =$  \_\_\_\_\_; 若函数  $g(x) = f(x) - a$  有

三个零点, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

**三、解答题: 共 6 道小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.**

16. 已知集合  $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$ ,  $B = \{x | x \geq a\}$ .

(1) 当  $a=1$  时, 求  $\complement_{\mathbb{R}} B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ;

(2) 若  $A \cap B = \emptyset$ , 求实数  $a$  的取值范围.

17. 为了庆祝神舟十四号成功返航, 学校开展“航天知识”竞赛活动, 甲乙两个班级的代表队同时回答一道有关航天知识的问题, 甲队答对此题的概率是  $\frac{3}{4}$ , 乙队答对此题的概率是  $\frac{2}{3}$ , 假设每队答题正确与否是相互独立的.

(1) 求甲乙两队都答对此题的概率;

(2) 求甲乙两队至少有一队答对此题的概率.

18. 已知函数  $f(x) = 2x^2 + bx + c (b, c \in \mathbb{R})$

(1) 若不等式  $f(x) > 0$  的解集为  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$ , 求  $f(x)$  的最小值;

(2) 若  $f(-2) = f(4)$  且  $f(1) = -1$ , 求方程  $f(x) = 0$  两实根之差 绝对值.

19. 已知函数  $f(x) = x - \frac{a}{x}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , 若  $f(1) = -1$

(1) 求  $a$  值;

(2) 判断函数  $f(x)$  的奇偶性, 并用定义给出证明;

(3) 用定义证明  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增.

20. 为了庆祝神舟十四号成功返航, 学校开展了“航天知识”讲座, 为了解讲座效果, 从高一甲乙两班的学生中各随机抽取 5 名学生的测试成绩, 这 10 名学生的测试成绩 (百分制) 的茎叶图如图所示.

| 甲 |   |   | 乙   |
|---|---|---|-----|
| 8 | 7 | 7 | 9   |
| 6 | 3 | 8 | 6 8 |
|   | 6 | 9 | 0 2 |

(1) 若  $\bar{x}_甲$ ,  $\bar{x}_乙$  分别为甲、乙两班抽取的成绩的平均分,  $S_甲^2$ ,  $S_乙^2$  分别为甲、乙两班抽取的成绩的方差, 则  $\bar{x}_甲$  \_\_\_\_\_  $\bar{x}_乙$ ,  $S_甲^2$  \_\_\_\_\_  $S_乙^2$ . (填“>”或“<”)

(2) 若成绩在 85 分 (含 85 分) 以上 优秀,

(i) 从甲班所抽取的 5 名学生中任取 2 名学生, 则恰有 1 人成绩优秀的概率;

(ii) 从甲、乙两班所抽取 成绩优秀学生中各取 1 人, 则甲班选取的学生成绩不低于乙班选取的学生成绩的概率.

21. 已知函数  $f(x) = \frac{a \cdot 2^x + b}{2^x + 1}$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的奇函数, 且  $f(1) = \frac{1}{3}$

(1) 求实数  $a$  和  $b$  的值; 并判断  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调性; (不用写出单调性证明过程)

(2) 若关于  $x$  的不等式  $f[(m+1)x^2] + f[mx + (m-1)] \geq 0$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围;

(3) 对于任意的  $x_1 \in [1, 3]$ , 存在  $x_2 \in [1, 3]$ , 使  $\log_n(x_2 + 2) \leq f(x_1)$  成立, 求实数  $n$  的取值范围.

## 参考答案

### 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【答案】C

【解析】

【分析】题中阴影部分表示的集合为  $A \cap B$ ，求解即可。

【详解】因为集合  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，集合  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ，

而题中阴影部分表示的集合为  $A \cap B$ ，

则  $A \cap B = \{0, 1, 2, 3\}$ 。

故选：C。

2. 【答案】D

【解析】

【分析】利用存在量词命题的否定，直接写出  $\neg P$  作答。

【详解】命题  $P$ ：“ $\exists x \in (0, +\infty)$ ， $\ln x \geq 1$ ”是存在量词命题，其否定是全称量词命题，

所以  $\neg P$  为： $\forall x \in (0, +\infty)$ ， $\ln x < 1$ 。

故选：D

3. 【答案】C

【解析】

【分析】利用奇函数的定义、由解析式直接判断单调性，逐项分析判断作答。

【详解】对于 A，函数  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$  定义域为  $\mathbf{R}$ ，且在  $\mathbf{R}$  上单调递减，A 不是；

对于 B，函数  $f(x) = \log_2(x+1)$  定义域为  $(-1, +\infty)$ ，定义域关于数 0 不对称，即  $f(x) = \log_2(x+1)$  不是奇函数，B 不是；

对于 C，函数  $f(x) = x^3$  定义域为  $\mathbf{R}$ ，且  $f(-x) = (-x)^3 = -f(x)$ ，即函数  $f(x) = x^3$  是奇函数，

而函数  $f(x) = x^3$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增，因此 C 是；

对于 D，函数  $f(x) = x^2 + 1$  定义域为  $\mathbf{R}$ ，而  $f(-x) = (-x)^2 + 1 = f(x)$ ，即函数  $f(x) = x^2 + 1$  不是奇函数，D 不是。

故选：C

4. 【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件，举例说明判断 A，C，D；利用不等式的性质判断 B 作答。



【详解】 $a, b, c \in \mathbf{R}$ ，且  $a > b$ ，

取  $a=1, b=-2$ ，则有  $|a|=1 < 2=|b|$ ， $\frac{1}{a}=1 > -\frac{1}{2}=\frac{1}{b}$ ，选项 A，C 都不正确；

由不等式性质知，不等式  $a-c > b-c$  一定成立，B 正确；

取  $c=0$ ，则  $a \cdot c^2 = 0 = b \cdot c^2$ ，D 不正确。

故选：B

5. 【答案】D

【解析】

【分析】根据给定条件，利用指数函数、对数函数性质，再结合“媒介”数比较大小作答。

【详解】 $a=2^{0.3} > 2^0=1$ ， $0 < 0.2^3 < 0.2^0=1$ ，即  $0 < b < 1$ ， $c=\log_{0.2} 5 < \log_{0.2} 1=0$ ，

因此  $c < 0 < b < 1 < a$ ，即 D 正确。

故选：D

6. 【答案】A

【解析】

【分析】根据给定条件，利用偶函数的性质结合对数运算作答。

【详解】因为函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数，且当  $x > 0$  时， $f(x)=\log_2 x$ ，

所以  $f(-4)=f(4)=\log_2 4=2$ 。

故选：A

7. 【答案】C

【解析】

【分析】求出频率直方图中年龄在  $[25, 35)$  的频率，根据频率即可求出人数，根据频率分布直方图中，小矩形面积和为 1，列出等式解出  $a$  即可。

【详解】解：由图知，年龄在  $[25, 35)$  的小矩形的面积为：

$$0.015 \times 10 = 0.15,$$

即年龄在  $[25, 35)$  的频率为 0.15，

所以年龄在  $[25, 35)$  的人数  $n = 0.15 \times 200 = 30$ ，

由频率分布直方图的小矩形面积和为 1 可得：

$$0.01 \times 10 + 0.015 \times 10 + a \times 10 + 0.03 \times 10 + 0.01 \times 10 = 1,$$

解得： $a = 0.035$ 。

故选：C

8. 【答案】B

【解析】

【分析】求出命题  $p$  为真的  $a$  的取值范围，再利用充分条件、必要条件的定义判断作答。

【详解】因为方程  $x^2 + ax + 1 = 0$  有实数解，则有  $\Delta = a^2 - 4 \geq 0$ ，解得  $a \leq -2$  或  $a \geq 2$ ，因此  $p: a \leq -2$  或  $a \geq 2$ ，

显然  $(2, 3) \subsetneq [2, +\infty)$ ，即有命题  $q$  成立，命题  $p$  必成立，而命题  $p$  成立，命题  $q$  未必成立，

所以  $p$  是  $q$  的必要而不充分条件.

故选：B

9. 【答案】B

【解析】

【分析】直接利用所给公式计算求解即可.

【详解】由题意得苏打水的  $PH$  为

$$\begin{aligned} pH &= -\lg[H^+] \\ &= -\lg(5 \times 10^{-9}) \\ &= -(\lg 5 + \lg 10^{-9}) \\ &= -\lg \frac{10}{2} + 9 \\ &= -(\lg 10 - \lg 2) + 9 \\ &= \lg 2 + 8 \approx 0.301 + 8 = 8.301. \end{aligned}$$

故选：B

10. 【答案】D

【解析】

【分析】由已知条件得到  $f(x)$  的图象关于  $x = -2$  对称，从而可知  $f(x)$  在  $(-\infty, -2]$  上为增函数，在  $(-2, +\infty)$  上为减函数，且  $f(-4) = 0$ ，再画出折线图表示出函数  $f(x)$  的单调性，即可得到答案.

【详解】因为  $f(x-2)$  是偶函数，即  $f(x-2)$  的图象关于  $y$  对称.

所以  $f(x)$  的图象关于  $x = -2$  对称.

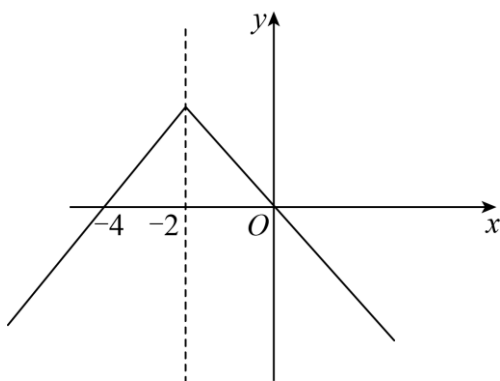
因为函数  $f(x)$  对任意  $x_1, x_2 \in (-\infty, -2]$ ，且  $x_1 \neq x_2$ ，都有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$  成立，

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, -2]$  上为增函数.

又因为  $f(x)$  的图象关于  $x = -2$  对称， $f(0) = 0$ ，

所以  $f(x)$  在  $(-2, +\infty)$  为减函数，且  $f(-4) = 0$ .

用折线图表示函数  $f(x)$  的单调性，如图所示：



由图知:  $f(x) > 0 \Rightarrow -4 < x < 0$ .

故选: D.

## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

### 二、填空题: 共 5 道小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 【答案】  $(1, +\infty)$

【解析】

【分析】根据对数函数的真数大于 0, 列出不等式求解集即可.

【详解】对数函数  $f(x) = \log_2(x-1)$  中,  
 $x-1 > 0$ ,

解得  $x > 1$ ;

$\therefore f(x)$  的定义域为  $(1, +\infty)$ .

故答案  $(1, +\infty)$ .

【点睛】本题考查了求对数函数的定义域问题, 是基础题.

12. 【答案】 28

【解析】

【分析】由分层抽样的定义计算即可.

【详解】由分层抽样的定义, 高一学生中应抽取人数为  $60 \times \frac{280}{280+200+120} = 28$ .

故答案为: 28

13. 【答案】 3

【解析】

【分析】由  $x > -1$  可得  $x+1 > 0$ , 将  $x + \frac{4}{x+1}$  整理为  $x+1 + \frac{4}{x+1} - 1$ , 再利用基本不等式即可求解.

【详解】因为  $x > -1$ , 所以  $x+1 > 0$ ,

所以  $x + \frac{4}{x+1} = x+1 + \frac{4}{x+1} - 1 \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{x+1}} - 1 = 3$ ,

当且仅当  $x+1 = \frac{4}{x+1}$ , 即  $x=1$  时取等号,



所以  $x + \frac{4}{x+1}$  的最小值为 3,

故答案为: 3

【点睛】易错点睛: 利用基本不等式求最值时, 要注意其必须满足的三个条件:

- (1) “一正二定三相等” “一正” 就是各项必须为正数;
- (2) “二定” 就是要求和的最小值, 必须把构成和的二项之积转化成定值; 要求积的最大值, 则必须把构成积的因式的和转化成定值;
- (3) “三相等” 是利用基本不等式求最值时, 必须验证等号成立的条件, 若不能取等号则这个定值就不是所求的最值, 这也是最容易发生错误的地方.

14. 【答案】②③

【解析】

【分析】利用指数的运算性质, 容易判断①不正确, 结合指数函数的图像和性质, 可判断②正确, ④错误, 利用基本不等式易证③成立.

【详解】 $\because f(x_1 \cdot x_2) = 3^{x_1 x_2} \neq 3^{x_1} + 3^{x_2} = f(x_1 + x_2)$ ,  $\therefore$  ①不正确.

$\because f(x) = 3^x$  单调递增,  $\therefore$  ②正确.

$$\therefore \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{3^{x_1} + 3^{x_2}}{2} \geq \sqrt{3^{x_1} \cdot 3^{x_2}} = 3^{\frac{x_1 + x_2}{2}} = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

$\because x_1 \neq x_2$ ,  $\therefore \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ , 所以③正确.

若对于任意实数  $x$ , 都有  $f(x+a) = f(a-x)$  成立, 则  $f(x)$  关于  $x=a$  对称, 显然④不正确.

故答案为: ②③

15. 【答案】 ①. 1      ②.  $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right]$

【解析】

【分析】根据  $a=1$  得此时  $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 1 \\ (x-2)^2, & x \geq 1 \end{cases}$ , 根据解析式先求  $f(2)$  得值, 再求解  $f[f(-2)]$  的值

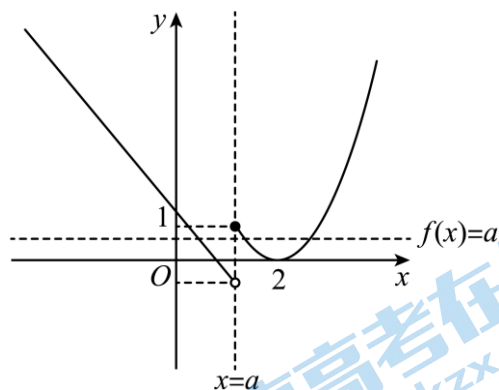
即可; 函数  $g(x) = f(x) - a$  有三个零点, 即  $f(x) = a$  有三个根, 结合函数解析式初步判断可得  $0 < a < 2$ , 画出函数图象, 结合图象分析列不等式即可得实数  $a$  的取值范围.

【详解】解: 当  $a=1$  时,  $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 1 \\ (x-2)^2, & x \geq 1 \end{cases}$ , 所以  $f(-2) = -(-2)+1=3$ , 则

$$f[f(-2)] = f(3) = (3-2)^2 = 1;$$

若函数  $g(x) = f(x) - a$  有三个零点，即  $f(x) = a$  有三个根，又  $f(x) = \begin{cases} -ax+1, & x < a \\ (x-2)^2, & x \geq a \end{cases}$ ,

则  $f(x) = (x-2)^2 = a$  在  $[a, +\infty)$  上有两个根，所以  $0 < a < 2$ ， $f(x) = -ax+1 = a$  在  $(-\infty, a)$  上有一个根，如下图得此时  $f(x)$  的大致图象：



则根据  $f(x) = a$  有三个根可得： $\begin{cases} -a^2+1 < a \leq (a-2)^2 \\ 0 < a < 2 \end{cases}$ ，解得  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < a \leq 1$ ，则实数  $a$  的取值范围是  $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right]$ 。

故答案为：1； $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right]$ 。

【点睛】关键点睛：本题考查分段函数求值与分段函数零点问题，属于压轴题。解决本题中零点问题的关键是分析分段函数两段函数性质，由于  $f(x) = \begin{cases} -ax+1, & x < a \\ (x-2)^2, & x \geq a \end{cases}$ ，是一次函数与二次函数分段问题，要求  $f(x) = a$  有三个根，结合二次函数  $y = (x-2)^2$  在  $[a, +\infty)$  上的性质可初步判断  $0 < a < 2$ ，避免对  $a$  进行符号讨论，即可得出分段函数的大致图象，结合图象列不等式可求得参数范围。

三、解答题：共 6 道小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. 【答案】(1)  $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x < 1\}$ ， $A \cap B = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$ ， $A \cup B = \{x | x \geq -1\}$ ；

(2)  $a > 2$

【解析】

【分析】(1) 化简集合  $A$ ，把  $a=1$  代入，再利用补集、交集、并集的定义求解作答。

(2) 利用 (1) 中信息，结合给定的交集结果，列式求解作答。

【小问 1 详解】

解一元二次不等式  $x^2 - x - 2 \leq 0$  得： $-1 \leq x \leq 2$ ，即  $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$ ，

当  $a=1$  时， $B = \{x | x \geq 1\}$ ，

所以  $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x < 1\}$ ,  $A \cap B = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$ ,  $A \cup B = \{x | x \geq -1\}$ .

【小问 2 详解】

由  $A \cap B = \emptyset$  得:  $A \subseteq \complement_{\mathbb{R}} B$ , 由  $B = \{x | x \geq a\}$  得:  $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x < a\}$ , 而  $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$ , 于是得  $a > 2$ ,

所以实数  $a$  的取值范围  $a > 2$ .

17. 【答案】(1)  $\frac{1}{2}$

(2)  $\frac{11}{12}$

【解析】

【分析】(1) 设甲、乙队答对此题分别为事件  $A, B$ , 则  $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{2}{3}$ , 结合相互独立事件同时发生 概率公式, 即可求甲乙两队都答对此题的概率;

(2) 依据题意, 结合对立事件与相互独立事件同时发生的概率公式, 即可求得甲乙两队至少有一队答对此题的概率.

【小问 1 详解】

解: 设甲、乙队答对此题分别为事件  $A, B$ , 则  $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{2}{3}$ ,

记事件  $M =$  “甲乙两队都答对此题”, 由于每队答题正确与否是相互独立的,

所以  $P(M) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ , 故甲乙两队都答对此题的概率为  $\frac{1}{2}$ ;

【小问 2 详解】

解: 记事件  $N =$  “甲乙两队至少有一队答对此题”, 由于每队答题正确与否是相互独立的,

故  $P(N) = 1 - P(\bar{N}) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{11}{12}$ .

故甲乙两队至少有一队答对此题的概率为  $\frac{11}{12}$ .

18. 【答案】(1)  $-\frac{9}{8}$ ;

(2)  $\sqrt{2}$ .

【解析】

【分析】(1) 根据给定一元二次不等式解集, 求出函数  $f(x)$  的解析式, 再求出二次函数最小值作答.

(2) 根据给定条件, 求出函数  $f(x)$  的解析式, 再求出方程  $f(x) = 0$  的二根即可作答.

【小问 1 详解】

不等式  $f(x) > 0$ ，即  $2x^2 + bx + c > 0$  的解集为  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$ ，

于是得  $\frac{1}{2}, 2$  是方程  $2x^2 + bx + c = 0$  的二根，即有  $\frac{1}{2} + 2 = -\frac{b}{2}$ ，且  $\frac{1}{2} \times 2 = \frac{c}{2}$ ，解得  $b = -5, c = 2$ ，

因此  $f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$ ，当且仅当  $x = \frac{5}{4}$  时， $f(x)_{\min} = -\frac{9}{8}$ ，

所以函数  $f(x)$  的最小值是  $-\frac{9}{8}$ 。

【小问 2 详解】

因  $f(-2) = f(4)$  且  $f(1) = -1$ ，则有  $\begin{cases} 2 \times (-2)^2 - 2b + c = 2 \times 4^2 + 4b + c \\ 2 + b + c = -1 \end{cases}$ ，

解得  $b = -4, c = 1$ ，

因此  $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ ，方程  $f(x) = 0$ ，即  $2x^2 - 4x + 1 = 0$  的二根为  $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以程  $f(x) = 0$  两实根之差的绝对值为  $|x_1 - x_2| = \sqrt{2}$ 。

19. 【答案】(1)  $a = 2$ ；

(2) 奇函数，理由见解析；

(3) 证明见解析。

【解析】

【分析】(1) 将给定自变量及对应函数值代入计算即可。

(2) 利用奇偶函数的定义直接判断作答。

(3) 利用函数单调性定义，按步骤推理作答。

【小问 1 详解】

函数  $f(x) = x - \frac{a}{x}$  中，因为  $f(1) = -1$ ，则有  $1 - a = -1$ ，解得  $a = 2$ ，

所以  $a = 2$ 。

【小问 2 详解】

由 (1) 知，函数  $f(x) = x - \frac{2}{x}$  是奇函数，

函数  $f(x) = x - \frac{2}{x}$  定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ， $f(-x) = -x - \frac{2}{-x} = -(x - \frac{2}{x}) = -f(x)$ ，

所以函数  $f(x) = x - \frac{2}{x}$  是奇函数。

【小问 3 详解】

$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，且  $x_1 < x_2$ ， $f(x_1) - f(x_2) = x_1 - \frac{2}{x_1} - (x_2 - \frac{2}{x_2}) = (x_1 - x_2)(1 + \frac{2}{x_1 x_2})$ ，

因为  $0 < x_1 < x_2$ , 则  $x_1 - x_2 < 0, x_1 x_2 > 0$ , 即有  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 因此  $f(x_1) < f(x_2)$ ,

所以  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增.

20. 【答案】(1)  $<, >$ ;

(2) (i)  $\frac{3}{5}$ ; (ii)  $\frac{5}{8}$ .

【解析】

【分析】(1) 利用给定的茎叶图, 结合平均数、方差的意义计算判断作答.

(2) (i) (ii) 利用列举法, 结合古典概率求解作答.

【小问 1 详解】

由茎叶图知,  $\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{77+78+83+86+96}{5} = 84$ ,  $\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{79+86+88+90+92}{5} = 87$ ,

所以  $\bar{x}_{\text{甲}} < \bar{x}_{\text{乙}}$ ;

$$S_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{5}[(77-84)^2 + (78-84)^2 + (83-84)^2 + (86-84)^2 + (96-84)^2] = 46.8,$$

$$S_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{5}[(79-87)^2 + (86-87)^2 + (88-87)^2 + (90-87)^2 + (92-87)^2] = 20,$$

所以  $S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2$ .

【小问 2 详解】

(i) 抽取的两名学生成绩分别为  $x, y$ , 把他们记为  $(x, y)$ ,

从甲班所抽取的 5 名学生中任取 2 名学生, 他们的成绩组成的不同结果:

$(77, 78), (77, 83), (77, 86), (77, 96), (78, 83), (78, 86), (78, 96), (83, 86), (83, 96), (86, 96)$ , 共 10 个,

恰有 1 人成绩优秀的事件 A 有:  $(77, 86), (77, 96), (78, 86), (78, 96), (83, 86), (83, 96)$ , 共 6 个,

所以恰有 1 人成绩优秀的概率  $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ .

(ii) 依题意, 甲班成绩优秀学生有 2 人, 成绩分别为 86, 96, 乙班成绩优秀学生有 4 人, 成绩分别为 86, 88, 90, 92,

从甲、乙两班所抽取的成绩优秀学生中各取 1 人, 按甲班的在前、乙班的在后写在括号内, 不同结果有:

$(86, 86), (86, 88), (86, 90), (86, 92), (96, 86), (96, 88), (96, 90), (96, 92)$ , 共 8 个,

甲班选取的学生成绩不低于乙班选取的学生成绩的事件 B 有:

$(86, 86), (96, 86), (96, 88), (96, 90), (96, 92)$ , 共 5 个,

所以甲班选取的学生成绩不低于乙班选取的学生成绩的概率  $P(B) = \frac{5}{8}$ .

21. 【答案】(1)  $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ ,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增



$$(2) \left[ \frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty \right)$$

$$(3) (0,1) \cup [64, +\infty)$$

【解析】

【分析】(1) 根据奇函数和  $f(1) = \frac{1}{3}$  即可求出  $a$  和  $b$  的值，有定义法即可得出  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调性。

(2) 根据奇函数和单调递增求出  $(m+1)x^2 + mx + m - 1 \geq 0$ ，分类讨论  $x^2$  前的系数是否为 0，即可求出实数  $m$  的取值范围

(3) 根据函数的单调递增，得出等价条件，分类讨论  $g(x) = \log_n x$  的单调性即可求出实数  $n$  的取值范围。

【小问 1 详解】

由题意

在  $f(x) = \frac{a \cdot 2^x + b}{2^x + 1}$  中，函数是定义域为  $\mathbf{R}$  的奇函数， $f(1) = \frac{1}{3}$

$$\therefore \begin{cases} f(0) = \frac{a+b}{2^0+1} = \frac{a+b}{2} = 0 \\ f(1) = \frac{2^1 \cdot a + b}{2^1+1} = \frac{2a+b}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}, \text{ 此时 } f(-x) = -f(x) \text{ 满足题意,}$$

$$\therefore f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$$

设  $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < x_2$ ,

$$f(x_1) - f(x_2) = 1 - \frac{2}{2^{x_1} + 1} - \left( 1 - \frac{2}{2^{x_2} + 1} \right) = 2 \left( \frac{1}{2^{x_2} + 1} - \frac{1}{2^{x_1} + 1} \right) = 2 \cdot \frac{2^{x_1} - 2^{x_2}}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)}$$

在  $y = 2^x$  中，函数单调递增，

$$\therefore 2^{x_1} - 2^{x_2} < 0$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = 2 \cdot \frac{2^{x_1} - 2^{x_2}}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)} < 0$$

$\therefore f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增

【小问 2 详解】

由题意及 (1) 得

在  $f(x) = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$  中，函数是奇函数， $f(x) = -f(-x)$

$$f[(m+1)x^2] + f[mx + (m-1)] \geq 0 \text{ 恒成立}$$

$$\therefore f[(m+1)x^2] \geq -f[mx+(m-1)] = f[-mx-(m-1)] \text{ 恒成立}$$

$\therefore$  函数单调递增

$$\therefore (m+1)x^2 \geq -mx-(m-1) \text{ 即 } (m+1)x^2 + mx + m - 1 \geq 0 \text{ 恒成立}$$

当  $m+1=0$  即  $m=-1$  时,

$$-x-2 \geq 0, \text{ 解得: } x \leq -2,$$

不恒成立, 舍去.

$$\text{当 } m+1 \neq 0 \text{ 即 } m \neq -1 \text{ 时, } (m+1)x^2 + mx + m - 1 \geq 0 \text{ 恒成立}$$

在  $h(x) = (m+1)x^2 + mx + m - 1$  中, 若  $h(x) \geq 0$  则需开口向上,

$$\therefore \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta = m^2 - 4(m+1)(m-1) = -3m^2 + 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } m \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{综上, 实数 } m \text{ 的取值范围为 } \left[ \frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty \right)$$

【小问3详解】

由题意及 (1) (2) 得

$$\text{在 } f(x) = 1 - \frac{2}{2^x + 1} \text{ 中, 函数单调递增}$$

对于任意的  $x_1 \in [1, 3]$ , 存在  $x_2 \in [1, 3]$ , 使  $\log_n(x_2 + 2) \leq f(x_1)$  成立,

$\therefore$  函数在  $[1, 3]$  单调递增

$$\therefore f(x) \geq f(1) = 1 - \frac{2}{2^1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{则存在 } x_2 \in [1, 3], \text{ 使 } \log_n(x_2 + 3) \leq \frac{1}{3} \text{ 成立,}$$

当  $0 < n < 1$  时,  $g(x) = \log_n x$  在定义域内单调递减,

$$\therefore \log_n(x_2 + 3) \leq \log_n 4 < 0$$

满足题意

当  $n > 1$  时,  $g(x) = \log_n x$  在定义域内单调递增

$$\log_n(x_2 + 3) \geq \log_n 4 \text{ 且 } \log_n 4 \leq \frac{1}{3} = \log_n n^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{解得: } n \geq 64$$

综上, 实数  $n$  的取值范围为  $(0, 1) \cup [64, +\infty)$ .

【点睛】 本题考查待定系数法求参数，定义法证单调性，考查分类讨论的思想，具有很强的综合性.



## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯