2024 年度高三寒假新结构适应性测试模拟试卷（四）

数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1．已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x^2+2x-3<0\}$，$B=\{x|x=2k，k\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=(\quad)$

A．$\{0，2\}$　　B．$\{-2，0\}$

C．$\{-2，0，2\}$　　D．$\{-2，-1，0\}$

答案　B

解析　解 $x^2+2x-3<0$ 得 $-3<x<1$，所以 $A=\{x|-3<x<1\}$，$B=\{x|x=2k，k\in\mathbf{Z}\}$，$B$ 是偶数集，所以 $A\cap B=\{-2，0\}$．故选 B.

2．已知复数 $z=\cos75°+\mathrm{i}\sin75°$，则 $\frac{|z|^2}{z^2}=(\quad)$

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

C．$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　D．1

答案　A

解析　因为复数 $z=\cos75°+\mathrm{i}\sin75°$，所以 $|z|^2=\cos^2 75°+\sin^2 75°=1$，则 $\frac{|z|^2}{z^2}=\frac{1}{\cos^2 75°+2\mathrm{i}\sin75°\cos75°-\sin^2 75°}=\frac{1}{\cos150°+\mathrm{i}\sin150°}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.故选

A.

3．设 D 为△ABC 所在平面内一点，$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$，则(　　)

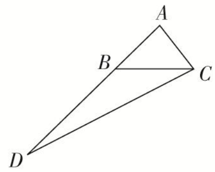
A．$\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}$

B．$\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$

C．$\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}$

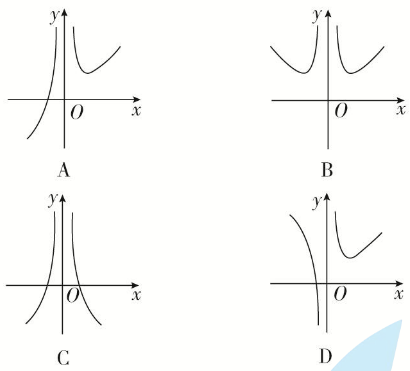
D．$\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}$

答案　D



解析　依题意作出图形，则$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+2(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}$.故选 D.

4．函数 $f(x)=x+\frac{\cos x}{x^2}$的大致图象为(　　)



答案　A

解析　由 $f(-x)=-x+\frac{\cos(-x)}{(-x)^2}=-x+\frac{\cos x}{x^2}\neq\pm f(x)$，故函数为非奇非偶函数，排除 B，C；因为 $f(-\pi)=-\pi+\frac{\cos(-\pi)}{(-\pi)^2}=-\pi+\frac{\cos\pi}{\pi^2}=-\pi-\frac{1}{\pi^2}$，$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}+\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}=-\frac{\pi}{2}$，所以 $f(-\pi)<f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$，排除 D.故选 A.

5．下列直线中，不是圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 的公切线的一条直线是(　　)

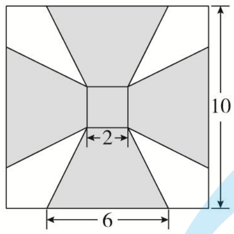
A．$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$　　　　B．$y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$

C．$y=\frac{5}{12}x-\frac{13}{12}$　　　　D．$x=-1$

答案　C

解析　当直线的斜率不存在时，设直线方程为 $x=a$，若直线是圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 的公切线，则满足 $\begin{cases}|a-0|=1,\\|a-3|=4,\end{cases}$ 所以 $a=-1$，所以直线 $x=-1$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 的公切线；当直线的斜率存在时，设直线方程为 $y=kx+m$，若直线是圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 的公切线，则满足 $\begin{cases}\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1,\\\frac{|3k+m-4|}{\sqrt{k^2+1}}=4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m^2=1+k^2,\\(3k+m-4)^2=16(1+k^2),\end{cases}$ 所以 $(3k+m-4)^2=16m^2$，即 $(3k-4-3m)(3k-4+5m)=0$，所以 $\begin{cases}k=\frac{7}{24},\\m=-\frac{25}{24}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-\frac{3}{4},\\m=\frac{5}{4},\end{cases}$ 所以公切线方程是 $y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$ 和 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.综上，公切线方程是 $y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$，$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ 和 $x=-1$.故选 C.

6．如图所示是一块边长为 10 cm 的正方形铝片，其中阴影部分由四个全等的等腰梯形和一个正方形组成，将阴影部分裁剪下来，并将其拼接成一个无上盖的容器(铝片厚度不计)，则该容器的容积为(　　)

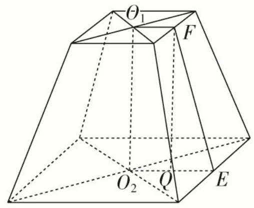


A．$\frac{80\sqrt{3}}{3}$ cm^3　　B．$\frac{104\sqrt{3}}{3}$ cm^3

C．$80\sqrt{3}$ cm^3　　D．$104\sqrt{3}$ cm^3

答案　B

解析　由题意知，该容器的容积就是正四棱台的体积．如图，连接正四棱台上、下底面的中心 O_1，O_2，取上底面正方形一边的中点 F，对应下底面正方形一边的中点 E，连接 EF，O_1F，O_2E，则 $O_1F\parallel O_2E$，故 O_1，F，O_2，E 四点共面，过点 F 作 $FQ\,//\,O_1O_2$ 交 O_2E 于点 Q，则四边形 O_1O_2QF 为矩形，故 $O_1O_2=QF$．因为该正四棱台上、下底面的边长分别为 2，6，等腰梯形的斜高为 4，所以 $O_1F=O_2Q=1$，$O_2E=3$，$EF=4$，故 $QE=O_2E-O_2Q=2$，所以该棱台的高 $h=QF=\sqrt{EF^2-QE^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，下底面面积 $S_1=36$，上底面面积 $S_2=4$，所以该容器的容积是 $V=\frac{1}{3}h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})=\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times(4+36+\sqrt{144})=\frac{104\sqrt{3}}{3}$.故选 B.



7．已知函数 $f(x)$满足 $2f(x)+f(-x)=-2x$，若 $2^a=\log_2 b=c$，则(　　)

A．$f(a)<f(b)<f(c)$

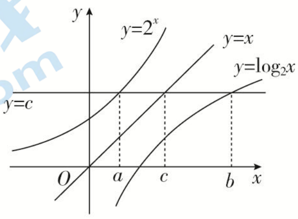
B．$f(c)<f(b)<f(a)$

C．$f(a)<f(c)<f(b)$

D．$f(b)<f(c)<f(a)$

答案　D

解析　因为 $2f(x)+f(-x)=-2x$，所以 $2f(-x)+f(x)=2x$，联立 $\begin{cases}2f(x)+f(-x)=-2x,\\2f(-x)+f(x)=2x,\end{cases}$ 得 $f(x)=-2x$，在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，在同一坐标系中作出 $y=c$，$y=2^x$，$y=\log_2x$，$y=x$ 的图象，如图，所以 $a<c<b$，故 $f(b)<f(c)<f(a)$．故选 D.



8．已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $a_n=n-1+\dfrac{8}{2n-1}$，$b_n=\dfrac{3n-7}{2^{n-1}}$，若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$(\lambda-a_n)(\lambda-b_n)<0$，则实数 λ 的取值范围是(　　)

A．$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{18}{5}\right)$　　B．$\left(\dfrac{5}{8},\dfrac{18}{5}\right)$

C．$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{11}{3}\right)$　　D．$\left(\dfrac{5}{8},\dfrac{11}{3}\right)$

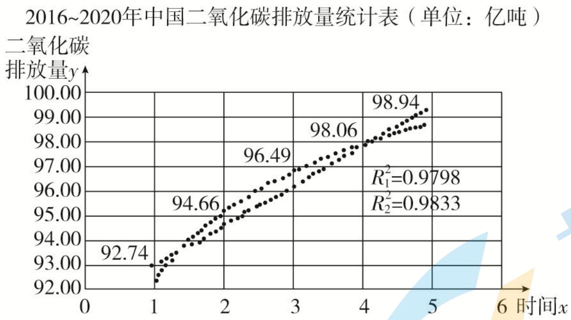
答案　B

解析　当 $a_n>a_{n+1}$ 时，有 $n-1+\dfrac{8}{2n-1}>n+\dfrac{8}{2n+1}$，由 $n\in\mathbf{N}^*$，解得 $n\leq2$；当 $a_n<a_{n+1}$ 时，有 $n-1+\dfrac{8}{2n-1}<n+\dfrac{8}{2n+1}$，由 $n\in\mathbf{N}^*$，解得 $n\geq3$，则 $a_1>a_2>a_3$，且 $a_3<a_4<a_5<\ldots$，所以 a_n 的最小值为 $a_3=\dfrac{18}{5}$.当 $b_n>b_{n+1}$ 时，有 $\dfrac{3n-7}{2^{n-1}}>\dfrac{3n-4}{2^n}$，由 $n\in\mathbf{N}^*$，解得 $n\geq4$；当 $b_n<b_{n+1}$ 时，有 $\dfrac{3n-7}{2^{n-1}}<\dfrac{3n-4}{2^n}$，由 $n\in\mathbf{N}^*$，解得 $n\leq3$，则 $b_1<b_2<b_3<b_4$，且 $b_4>b_5>b_6>\ldots$，所以 b_n 的最大值为 $b_4=\dfrac{5}{8}$，所以 a_n 的最小值大于 b_n 的最大值，

即 $a_n>b_n$ 恒成立，所以$(\lambda-a_n)(\lambda-b_n)<0$，解得 $b_n<\lambda<a_n$，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$b_n<\lambda<a_n$ 恒成立，则 $b_4<\lambda<a_3$，即实数λ的取值范围是$\left(\frac{5}{8},\ \frac{18}{5}\right)$.故选 B.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．进入 21 世纪以来，全球二氧化碳排放量增长迅速，自 2000 年至今，全球二氧化碳排放量增加了约 40%，我国作为发展中国家，经济发展仍需要大量的煤炭能源消耗．下图是 2016～2020 年中国二氧化碳排放量的统计图表(以 2016 年为第 1 年)．利用图表中的数据计算可得，采用某非线性回归模型拟合时，$R_1^2=0.9798$；采用一元线性回归模型拟合时，经验回归方程为$\hat{y}=1.58x+91.44$，$R_2^2=0.9833$.则下列说法正确的是(　　)



A．由图表可知，二氧化碳排放量 y 与时间 x 正相关

B．由决定系数可以看出，线性回归模型的拟合程度更好

C．利用经验回归方程计算 2019 年所对应的样本点的残差为 -0.30

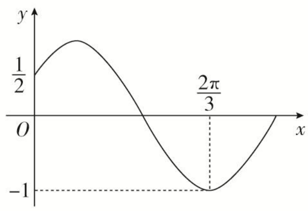
D．利用经验回归方程预计 2025 年中国二氧化碳排放量为 107.24 亿吨

答案　ABD

解析　由散点图可得二氧化碳排放量 y 与时间 x 正相关，故 A 正确；因为

$R_2^2>R_1^2$，所以线性回归模型的拟合程度更好，故 B 正确；当 $x=4$ 时，$\hat{y}=1.58\times4+91.44=97.76$，而 $98.06-97.76=0.30$，故 C 错误；当 $x=10$ 时，$\hat{y}=1.58\times10+91.44=107.24$，即利用经验回归方程预计 2025 年中国二氧化碳排放量为 107.24 亿吨，故 D 正确．故选 ABD.

10．已知 $f(x)$是定义在闭区间上的偶函数，且在 y 轴右侧的图象是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0，0<\varphi<\pi)$图象的一部分(如图所示)，则(　　)



A．$f(x)$的定义域为$[-\pi，\pi]$

B．当 $x=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$取得最大值

C．当 $x<0$ 时，$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{2\pi}{3}，-\frac{\pi}{6}\right]$

D．当 $x<0$ 时，$f(x)$有且只有两个零点 $-\frac{5\pi}{12}$和 $-\frac{11\pi}{12}$

答案　BCD

解析　由题图得 $f(0)=\sin\varphi=\frac{1}{2}$，且位于单调递增区间上，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又因为 $0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$，$\begin{cases}f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=-1,\\ \frac{3T}{4}>\frac{2\pi}{3},\end{cases}$ 则 $\begin{cases}\frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi，k\in\mathbf{Z},\\ \frac{2\pi}{\omega}>\frac{8\pi}{9},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\omega=2+3k，k\in\mathbf{Z},\\ 0<\omega<\frac{9}{4},\end{cases}$ 所以 $\omega=2$，所以 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.由题图可知，原点右侧的第二个零点为$\frac{2\pi}{3}+\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{11\pi}{12}$，所以 $f(x)$

的定义域为$\left[-\frac{11\pi}{12},\ \frac{11\pi}{12}\right]$，故 A 错误；当$x\in\left[0,\ \frac{11\pi}{12}\right]$时，$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，因为$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$为最大值，则当$x=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$取得最大值，故 B 正确；当$x>0$时，令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则$\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{2\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又因为$x\in\left[0,\ \frac{11\pi}{12}\right]$，所以当$x>0$时，$f(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3}\right]$，因为函数$f(x)$为偶函数，所以当$x<0$时，$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{2\pi}{3},\ -\frac{\pi}{6}\right]$，故 C 正确；当$x\in\left[0,\ \frac{11\pi}{12}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\ 2\pi\right]$，令$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$，得$2x+\frac{\pi}{6}=\pi$或$2\pi$，则$x=\frac{5\pi}{12}$或$x=\frac{11\pi}{12}$，因为函数$f(x)$为偶函数，所以当$x<0$时，$f(x)$有且只有两个零点$-\frac{5\pi}{12}$和$-\frac{11\pi}{12}$，故 D 正确．故选 BCD．

11．已知过抛物线C：$x^2=4y$的焦点F作直线l与抛物线C交于A，B两点，弦AB的中点为Q，过A，B两点分别作抛物线的两条切线交于点P，PQ交抛物线C于点M，过M作抛物线C的切线，分别交PA，PB于点D，E，则(　　)

A．$PQ\perp x$轴

B．$DE/\!/AB$

C．$S_{\triangle MAB}=3S_{\triangle PDE}$

D．$S_{\triangle ADM}$，$S_{\triangle PDM}$，$S_{\triangle PEM}$，$S_{\triangle BEM}$成等比数列

答案　ABD

解析　设$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则$x_1^2=4y_1$，$x_2^2=4y_2$，由$x^2=4y$得$y=\frac{x^2}{4}$，$y'=\frac{x}{2}$，故在A，B处的切线方程分别为$y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，$y-y_2=\frac{x_2}{2}(x-x_2)$，即$xx_1=2(y+y_1)$，$xx_2=2(y+y_2)$　(*)，设$P(x_0,\ y_0)$，切线PA，PB均过点P，则弦AB

所在直线的方程为 $xx_0=2(y+y_0)$，又 AB 过点(0，1)，则 $y_0=-1$ 恒成立，即 P 在直线 $y=-1$ 上，由(*)可得 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=x_Q$，故 $PQ\perp x$ 轴，A 正确；$k_{DE}=\frac{\frac{x_1+x_2}{2}}{2}=\frac{x_0}{2}$，故 $k_{DE}=k_{AB}$，故 $DE\parallel AB$，B 正确；根据题意，直线 AB 的斜率显然存在，设为 k，则直线 AB 的方程为 $y=kx+1$，$\therefore k_{DE}=k=\frac{x_0}{2}$，$\therefore x_0=2k$，故 $M(2k，k^2)$，直线 DE 的方程为 $y=kx-k^2$，$P(2k，-1)$，点 P 到直线 AB，DE 的距离分别为 $d_1=\frac{|2k^2+2|}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{1+k^2}$，$d_2=\frac{|k^2+1|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{1+k^2}$，$\therefore d_1=2d_2$，故 DE 是△PAB 的中位线，$\therefore S_{\triangle MAB}=2S_{\triangle PDE}$，且 $S_{\triangle ADM}=S_{\triangle PDM}$，$S_{\triangle PEM}=S_{\triangle BEM}$，根据题意可得 M 是 DE 的中点，$\therefore S_{\triangle PDM}=S_{\triangle PEM}$，故 $S_{\triangle ADM}=S_{\triangle PDM}=S_{\triangle PEM}=S_{\triangle BEM}\neq 0$，C 错误，D 正确．故选 ABD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

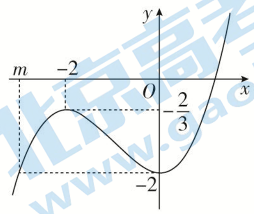
12．二项式$\left(3x-\frac{1}{x}\right)^n$的展开式中所有二项式系数之和为 64，则二项式的展开式中常数项为________.

答案　-540

解析　由二项式$\left(3x-\frac{1}{x}\right)^n$的展开式中所有二项式系数之和为 64，得 $2^n=64$，即 $n=6$，所以 $T_{k+1}=C_6^k(3x)^{6-k}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^k=C_6^k3^{6-k}\cdot(-1)^kx^{6-2k}$.令 $6-2k=0$，得 $k=3$，所以二项式的展开式中常数项为 $C_6^3\times3^{6-3}\times(-1)^3=-540$.

13．若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2$ 在区间$(a-4，a)$上存在最小值，则整数 a 的取值可以是________(写出满足题意的一个值即可).

答案　1(答案不唯一，1，2，3 均可)



解析　因为$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2$，则$f'(x)=x^2+2x=x(x+2)$．由$f'(x)<0$可得$-2<x<0$，由$f'(x)>0$可得$x<-2$或$x>0$，所以函数$f(x)$的单调递减区间为$(-2，0)$，单调递增区间为$(-\infty，-2)$，$(0，+\infty)$，所以函数$f(x)$的极大值为$f(-2)=-\frac{8}{3}+4-2=-\frac{2}{3}$，极小值为$f(0)=-2$.令$f(m)=f(0)=-2$，其中$m\neq 0$，则$\frac{1}{3}m^3+m^2-2=-2$，解得$m=-3$，因为函数$f(x)$在区间$(a-4，a)$上存在最小值，则$\begin{cases}-3\le a-4<0，\\a>0，\end{cases}$解得$1\le a<4$，所以整数$a$的取值集合为$\{1，2，3\}$．故整数$a$的取值可以是1(答案不唯一，1，2，3均可)．

14．数学家高斯在各个领域中都取得了重大的成就．在研究一类二次型数论问题时，他在他的著作《算术研究》中首次引入了二次剩余的概念．二次剩余理论在噪音工程学、密码学以及大数分解等各个领域都有广泛的应用．已知对于正整数a，$n(n\ge 2)$，若存在一个整数x，使得n整除x^2-a，则称a是n的一个二次剩余，否则为二次非剩余．从1到20这20个整数中随机抽取一个整数a，记事件A为“a与12互质”，事件B为“a是12的二次非剩余”，则$P(A)=$________，$P(B|A)=$________．

答案　$\frac{7}{20}$　$\frac{5}{7}$

解析　在1～20内与12互质的数有1，5，7，11，13，17，19，所以$P(A)=\frac{7}{20}$.根据定义，对于$\frac{x^2-a}{12}=$整数的x不存在，则a是12的二次非剩余数．显然，当$a=1$时，$x=11$；当$a=13$时，$x=7$；当$a=5$，7，11，17，19时，x不存在，所以$P(B|A)=\frac{5}{7}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，满足 $a_n+S_{n+1}=S_n+(-1)^{n+1}\cdot n$.

(1)求 S_{2n}；

(2)令 $b_n=\dfrac{1}{S_{2n}}$，证明：$n\in\mathbf{N}^*$，$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n<2$.

解　(1)因为 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$，

所以由 $a_n+S_{n+1}=S_n+(-1)^{n+1}\cdot n$，

可得 $a_n+a_{n+1}=(-1)^{n+1}\cdot n$，

所以 $S_{2n}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\ldots+(a_{2n-1}+a_{2n})=1+3+\ldots+(2n-1)=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$，即 $S_{2n}=n^2$.

(2)证明：$b_n=\dfrac{1}{S_{2n}}=\dfrac{1}{n^2}$，当 $n=1$ 时，$b_1=1<2$；

当 $n\geq 2$ 时，$\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$，

故 $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n<1+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)=2-\dfrac{1}{n}<2$.

综上，$n\in\mathbf{N}^*$，$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n<2$.

16．据统计，某城市居民年收入(所有居民在一年内收入的总和，单位：亿元)与某类商品销售额(单位：万元)的 10 年数据如下表所示：

第 n 年	居民年收入 x/亿元	商品销售额 y/万元
1	32.2	25.0
2	31.1	30.0
3	32.9	34.0

4	35.7	37.0
5	37.1	39.0
6	38.0	41.0
7	39.0	42.0
8	43.0	44.0
9	44.6	48.0
10	46.0	51.0

依据表格数据，得到下面一些统计量的值．

$\sum_{i=1}^{10} x_i$	$\sum_{i=1}^{10} y_i$	$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2$	$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})$
379.6	391	247.624	568.9	m

(1)根据表中数据，得到样本相关系数 $r\approx0.95$.以此推断，y 与 x 的线性相关程度是否很强?

(2)根据统计量的值与样本相关系数 $r\approx0.95$，建立 y 关于 x 的经验回归方程(系数精确到 0.01)；

(3)根据(2)的经验回归方程，计算第 1 个样本点(32.2，25.0)对应的残差(精确到 0.01)，并判断若剔除这个样本点再进行回归分析，$\hat{b}$的值将变大还是变小?(不必说明理由，直接判断即可)

附：样本$(x_i，y_i)(i=1，2，…，n)$的相关系数 $r=$错误!，$\sqrt{2.297}\approx1.516$，

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}，\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

解　(1)根据样本相关系数 $r\approx0.95$，可以推断 y 与 x 的线性相关程度很强．

(2)由 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}\approx 0.95$

及 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$,

可得 $\dfrac{\hat{b}}{r}=\dfrac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

$=\dfrac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\approx\sqrt{2.297}$,

所以 $\hat{b}=r\sqrt{2.297}\approx 0.95\times 1.516\approx 1.440$,

又 $\bar{x}=37.96$, $\bar{y}=39.1$,

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\approx -15.56$,

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=1.44x-15.56$.

(3)第一个样本点(32.2, 25.0)的残差为 $25.0-(1.44\times 32.2-15.56)=-5.808\approx -5.81$,

由于该点在回归直线的左下方，故将其剔除后，$\hat{b}$的值将变小.

17．已知 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$，其图象相邻对称轴间的距离为$\frac{\pi}{2}$，若将其图象向左平移$\frac{5\pi}{12}$个单位得到函数 $y=g(x)$的图象.

(1)求函数 $y=g(x)$的解析式及图象的对称中心；

(2)在钝角三角形 ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，若 $f\left(\frac{B}{2}\right)=g\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$，求$\frac{2c}{b}+\frac{5}{\cos A}$的取值范围.

解 (1)已知 $f(x)$的图象相邻对称轴间的距离为$\frac{\pi}{2}$，则 $T=\pi$，

所以$\omega=2$，$f(x)=\sin 2x$，

$g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)\right]=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$，

令 $2x+\frac{5\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $x=-\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

故函数 $y=g(x)$图象的对称中心为$\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\ 0\right)(k\in\mathbf{Z})$.

(2)由题意，得 $f\left(\frac{B}{2}\right)=\sin B$，$g\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\left[2\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{5\pi}{6}\right]=\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\sin B=\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $B=A+\frac{\pi}{2}$或 $A+B=\frac{\pi}{2}$(舍去)，

所以 $C=\frac{\pi}{2}-2A$.

因为$\triangle ABC$ 是钝角三角形，

所以 $0<A<\frac{\pi}{2}$，$0<C<\frac{\pi}{2}$，

所以 $0<A<\frac{\pi}{4}$，

则 $\frac{2c}{b}+\frac{5}{\cos A}=\frac{2\sin C}{\sin B}+\frac{5}{\cos A}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-2A\right)}{\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{5}{\cos A}=\frac{2\cos 2A}{\cos A}+\frac{5}{\cos A}=$

$\frac{2(2\cos^2A-1)+5}{\cos A}=4\cos A+\frac{3}{\cos A}$.

令 $t=\cos A$，$\varphi(t)=4t+\frac{3}{t}$，$t\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$，

$\varphi'(t)=4-\frac{3}{t^2}=\frac{4t^2-3}{t^2}$，

当$\frac{\sqrt{2}}{2}<t<\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\varphi'(t)<0$；

当$\frac{\sqrt{3}}{2}<t<1$ 时，$\varphi'(t)>0$，

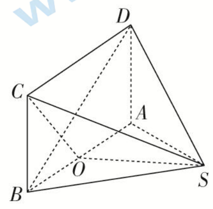
可得$\varphi(t)$在$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$上单调递增，

所以当 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{6}$时，$\varphi(t)$有最小值 $4\sqrt{3}$，

又$\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=5\sqrt{2}$，$\varphi(1)=7$，所以$\varphi(t)<5\sqrt{2}$，

所以$\frac{2c}{b}+\frac{5}{\cos A}$的取值范围为$[4\sqrt{3},\ 5\sqrt{2})$.

18.如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形且垂直于侧面 SAB，O 为 AB 的中点，$SA=SB=AB=2$，$AD=\sqrt{2}$.



(1)证明：$BD\perp$平面 SOC；

(2)侧棱 SD 上是否存在点 E，使得平面 ABE 与平面 SCD 夹角的余弦值为$\frac{1}{5}$？若存在，求出$\frac{SE}{SD}$的值；若不存在，说明理由.

解　(1)证明：设 BD 交 OC 于点 M，

∵底面 $ABCD$ 为矩形，

∴在 Rt△ABD 中，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，

∵O 为 AB 的中点，∴$OB=\frac{1}{2}AB=1$.

在 Rt△OBC 中，$OC=\sqrt{BC^2+OB^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$，

∵$OB\parallel CD$，$OB=\frac{1}{2}CD$，∴$\frac{BM}{MD}=\frac{OM}{MC}=\frac{1}{2}$，

∴$BM=\frac{1}{3}BD=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$OM=\frac{1}{3}OC=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

∵$OB=1$，∴$BM^2+OM^2=OB^2$，∴$BM\perp OM$，即 $BD\perp OC$.

∵$SA=SB=AB=2$，∴△SAB 为等边三角形，

∵O 为 AB 的中点，∴$SO\perp AB$.

∵平面 $ABCD\perp$平面 SAB，$SO\subset$平面 SAO，平面 $ABCD\cap$平面 $SAB=AB$，$SO\perp AB$，

∴$SO\perp$平面 $ABCD$.

∵$BD\subset$平面 $ABCD$，∴$SO\perp BD$，

又 $BD\perp OC$，$SO\cap OC=O$，SO，$OC\subset$平面 SOC，

∴$BD\perp$平面 SOC.

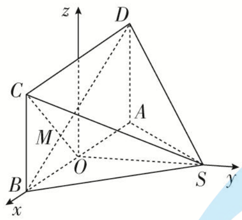
(2)设$\overrightarrow{SE}=\lambda\overrightarrow{SD}$，$\lambda\in[0,1]$，

∵底面 $ABCD$ 为矩形，∴$AD\perp AB$.

∵平面 $ABCD\perp$平面 SAB，平面 $ABCD\cap$平面 $SAB=AB$，$AD\perp AB$.

∴$AD\perp$平面 SAB.

以 O 为原点，OB，OS 所在直线分别为 x 轴、y 轴，过点 O 作平行于 AD 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.



$\because \triangle SAB$ 为等边三角形，O 为 AB 的中点，

$\therefore SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore S(0,\sqrt{3},0)$，$C(1,0,\sqrt{2})$，$D(-1,0,\sqrt{2})$，

$A(-1,0,0)$，$B(1,0,0)$，

$\overrightarrow{SD}=(-1,-\sqrt{3},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AS}=(1,\sqrt{3},0)$，

$\therefore \overrightarrow{SE}=\lambda\overrightarrow{SD}=\lambda(-1,-\sqrt{3},\sqrt{2})=(-\lambda,-\sqrt{3}\lambda,\sqrt{2}\lambda)$，

$\therefore \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SE}=(1,\sqrt{3},0)+(-\lambda,-\sqrt{3}\lambda,\sqrt{2}\lambda)=(1-\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,\sqrt{2}\lambda)$.

设平面 SCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{SD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_1=0,\\ -x_1-\sqrt{3}y_1+\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=\sqrt{2}$，$\therefore x_1=0$，$z_1=\sqrt{3}$，

$\therefore \boldsymbol{m}=(0,\sqrt{2},\sqrt{3})$，

设平面 ABE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2x_2=0,\\ (1-\lambda)x_2+\sqrt{3}(1-\lambda)y_2+\sqrt{2}\lambda z_2=0,\end{cases}$

令 $y_2=\sqrt{2}\lambda$，$\therefore x_2=0$，$z_2=\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}$，

$\therefore \boldsymbol{n}=(0,\sqrt{2}\lambda,\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})$.

∵平面 ABE 与平面 SCD 夹角的余弦值为$\frac{1}{5}$，

∴$|\cos\langle \boldsymbol{m}，\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}$

$=\frac{|2\lambda+\sqrt{3}(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})|}{\sqrt{5}\sqrt{2\lambda^2+(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{5}$，

整理得 $20\lambda^2-24\lambda+7=0$，∴$\lambda=\frac{1}{2}$或$\lambda=\frac{7}{10}$，均符合$\lambda\in[0，1]$，

∴$\frac{SE}{SD}=\frac{1}{2}$或$\frac{SE}{SD}=\frac{7}{10}$.

∴侧棱 SD 上存在点 E，使得平面 ABE 与平面 SCD 夹角的余弦值为$\frac{1}{5}$，且$\frac{SE}{SD}=\frac{1}{2}$或$\frac{SE}{SD}=\frac{7}{10}$.

19．设抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$的焦点为 F，抛物线 C 上一点 A 的横坐标为 $x_1(x_1>0)$，过点 A 作抛物线 C 的切线 l_1，与 x 轴交于点 D，与 y 轴交于点 E，与直线 l：$y=\frac{p}{2}$交于点 M.当$|FD|=2$ 时，$\angle AFD=60°$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)若 B 为 y 轴左侧抛物线 C 上一点，过 B 作抛物线 C 的切线 l_2，与直线 l_1 交于点 P，与直线 l 交于点 N，求△PMN 面积的最小值，并求取到最小值时 x_1 的值.

解　(1)由题意知 $F\left(0，\frac{p}{2}\right)$，$y=\frac{x^2}{2p}$，

所以 $y'=\frac{x}{p}$，$kl1=\frac{x_1}{p}$，切点 $A\left(x_1，\frac{x_1^2}{2p}\right)$，

切线 l_1 的方程为 $y=\frac{x_1}{p}(x-x_1)+\frac{x_1^2}{2p}=\frac{x_1}{p}x-\frac{x_1^2}{2p}$，

令 $y=0$，得 $x=\frac{x_1}{2}$，所以 $D\left(\frac{x_1}{2}，0\right)$，

令 $x=0$，得 $y=-\frac{x_1^2}{2p}$，所以 $E\left(0,\ -\frac{x_1^2}{2p}\right)$，

所以 D 为 AE 的中点，

根据焦半径公式得 $|AF|=y_1+\frac{p}{2}=\frac{x_1^2}{2p}+\frac{p}{2}=|EF|$，

又 $\angle AFD=60°$.

所以 $DF\perp AE$，$\angle OFD=\angle AFD=60°$，

因为 $|FD|=2$，所以 $|OF|=1$，即 $p=2$，

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$.

(2)设 $B\left(x_2,\ \frac{x_2^2}{4}\right)$，由(1)得 l_1 的方程为 $y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}$，　　①

同理可得，l_2 的方程为 $y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4}$，　　②

联立①②得 $x_P=\frac{x_1+x_2}{2}$，所以 $y_P=\frac{x_1x_2}{4}$，

因为直线 l 的方程为 $y=1$，

所以 $M\left(\frac{2}{x_1}+\frac{x_1}{2},\ 1\right)$，$N\left(\frac{2}{x_2}+\frac{x_2}{2},\ 1\right)$，

所以 $|MN|=\frac{2}{x_1}+\frac{x_1}{2}-\frac{2}{x_2}-\frac{x_2}{2}$，

所以 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_1}+\frac{x_1}{2}-\frac{2}{x_2}-\frac{x_2}{2}\right)\left(1-\frac{x_1x_2}{4}\right)=$

$\frac{1}{2}\left[\frac{2(x_1-x_2)}{-x_1x_2}+\frac{1}{2}(x_1-x_2)\right]\left(1-\frac{x_1x_2}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}[x_1+(-x_2)]\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{x_1x_2}\right)\left(1-\frac{x_1x_2}{4}\right)$

$\geq\sqrt{-x_1x_2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{x_1x_2}\right)\left(1-\frac{x_1x_2}{4}\right)$.

令 $-x_1x_2=t(t>0)$，

所以 $S_{\triangle PMN}=\sqrt{t\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{t}\right)\left(1+\frac{t}{4}\right)}=\sqrt{t\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{8}+\frac{2}{t}+\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{t\left(\frac{t}{8}+\frac{2}{t}+1\right)}$，

令 $\sqrt{t}=m$，$S=\frac{m^3}{8}+\frac{2}{m}+m(m>0)$，

$S'=\frac{3}{8}m^2-\frac{2}{m^2}+1$

$=\frac{3m^4+8m^2-16}{8m^2}$

$=\frac{(3m^2-4)(m^2+4)}{8m^2}$，

当 $0<m<\sqrt{\frac{4}{3}}$ 时，$S'<0$，S 单调递减，当 $m>\sqrt{\frac{4}{3}}$ 时，$S'>0$，S 单调递增，所以

$S_{\min}=S\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{16\sqrt{3}}{9}$，当且仅当 $\begin{cases}x_1x_2=-\frac{4}{3},\\ x_1=-x_2\end{cases}$ 时取“=”，此时 $x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以△PMN 面积的最小值为 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$，此时 x_1 的值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.