加试

一、（40 分）如图 2，在锐角 $\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，M、N 是边 BC 上不同的两点，使得 $\angle BAM = \angle CAN$. 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AMN$ 的外心分别为 O_1、O_2.证明：O_1、O_2、A 三点共线.

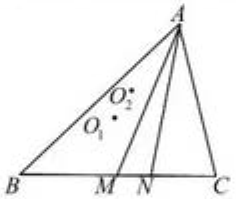

图 2

证明：如图 8，联结 AO_1、AO_2，过点 A 作 AO_1 的垂线 AP 与 BC 的延长线交于点 P.则 AP 是 $\odot O_1$ 的切线.

故 $\angle B = \angle PAC$.因为 $\angle BAM = \angle CAN$，所以，

$\angle AMP = \angle B + \angle BAM = \angle PAC + \angle CAN = \angle PAN$.

从而，AP 是 $\triangle AMN$ 外接圆 $\odot O_2$ 的切线.故 $AP \perp AO_2$.

因此，O_1、O_2、A 三点共线.

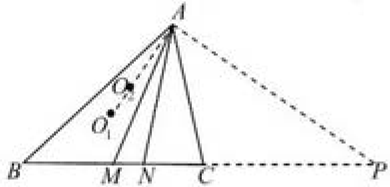

图 8

二、（40 分）试证明：集合 $A=\{2,2^2,\cdots,2^n,\cdots\}$ 满足

（1）对每个 $a\in A$ 及 $b\in \mathbf{N}_+$，若 $b<2a-1$，则 $b(b+1)$ 一定不是 $2a$ 的倍数；

（2）对每个 $a\in \overline{A}$（$\overline{A}$ 表示 A 在 $\mathbf{N}_+$ 中的补集），且 $a\neq 1$，必存在 $b\in \mathbf{N}_+$，$b<2a-1$，使 $b(b+1)$ 是 $2a$ 的倍数.

解：（1）对任意 $a\in A$，设 $a=2^k\left(k\in \mathbf{N}_+\right)$.则 $2a=2^{k+1}$.

若 b 是任意一个小于 $2a-1$ 的正整数，则 $b+1\le 2a-1$.

由于 b 与 $b+1$ 中，一个为奇数，它不含质因子 2，另一个为偶数，它含质因子 2 的幂的次数最多为 k、因此，$b(b+1)$ 一定不是 $2a$ 的倍数.

（2）若 $a\in \overline{A}$，且 $a\neq 1$，设 $a=2^k m$，其中，$k\in N$，m 为大于 1 的奇数.

则 $2a=2^{k+1}m$.

下面给出三种证明方法.

方法 1 令 $b=mx$，$b+1=2^{k+1}y$.

消去 b 得 $2^{k+1}y-mx=1$.由 $\left(2^{k+1},m\right)=1$，知方程必有整数解

$$\begin{cases} x=x_0+2^{k+1}t, \\ y=y_0+mt, \end{cases}$$

其中，$t\in Z$，(x_0,y_0) 为方程的特解.

记最小的正整数解为 (x',y').则 $x'<2^{k+1}$.

故 $b=mx'<2a-1$，使得 $b(b+1)$ 是 $2a$ 的倍数.

方法 2 注意到，$\left(2^{k+1},m\right)=1$，由中国剩余定理，知同余方程组

$$\begin{cases} x\equiv 0\left(\bmod 2^{k+1}\right), \\ x\equiv m-1\left(\bmod m\right) \end{cases}$$

在区间 $(0,2^{k+1}m)$ 上有解 $x=b$，即存在 $b<2a-1$，使得 $b(b+1)$ 是 $2a$ 的倍数.

方法 3 由 $(2,m)=1$，总存在 $r(r\in N_+,r\le m-1)$，使得 $2^r\equiv 1(\bmod m)$

取 $t\in \mathbf{N}_+$，使得 $tr>k+1$.则 $2^{tr}\equiv 1(\bmod m)$.

存在 $b=\left(2^{tr}-1\right)-q\left(2^{k+1}m\right)>0(q\in \mathbf{N})$，

使得 $0<b<2a-1$.

此时，$m\mid b$，$2^{k+1}\mid(b+1)$.从而，$b(b+1)$ 是 $2a$ 的倍数.

三、（50分）设P_0，P_1，…，P_n是平面上$n+1$个点，其两两间的距离的最小值为$d(d>0)$．

证明：$|P_0P_1||P_0P_2|\cdots|P_0P_n|>(\frac{d}{3})^n\sqrt{(n+1)!}$．

证法1 不妨设$|P_0P_1|\le|P_0P_2|\le\cdots\le|P_0P_n|$．

先证明：对任意正整数k都有$|P_0P_k|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$．

显然，$|P_0P_k|\ge d\ge\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$对$k=1,2$，…，8均成立，只有当$k=8$时，上式右边取等号．

所以，只需证明：当$k\ge9$时，有$|P_0P_k|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$即可．

以点$P_i(i=0,1,\cdots k)$为圆心、$\frac{d}{2}$为半径画$k+1$个圆，其两两相离或外切；以点P_0为圆心、$|P_0P_k|+\frac{d}{2}$为半径画圆，此圆覆盖上述$k+1$个圆．

则$\pi\left(|P_0P_k|+\frac{d}{2}\right)^2>(k+1)\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\Rightarrow|P_0P_k|>\frac{d}{2}\left(\sqrt{k+1}-1\right)$．由$k\ge9$，易知$\frac{\sqrt{k+1}-1}{2}>\frac{\sqrt{k+1}}{3}$．

所以，$|P_0P_k|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$对$k=9$，10，…，$n$也成立．

综上，对任意的正整数k都有$|P_0P_k|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$．

故$|P_0P_1||P_0P_2|\cdots|P_0P_n|>\left(\frac{d}{3}\right)^n\sqrt{(n+1)!}$．

证法2 所设同证法1．

以$P_i(i=0,1,\cdots,k)$为圆心、$\frac{d}{2}$为半径画$k+1$个圆，其两两相离或外切．

设Q是$\odot P_i$上任意一点．

$|P_0Q|\le|P_0P_i|+|P_iQ|$

由$=|P_0P_i|+\frac{1}{2}d$

$\le|P_0P_k|+\frac{1}{2}|P_0P_k|=\frac{3}{2}|P_0P_k|$，

知以P_0为圆心、$\frac{3}{2}|P_0P_k|$为半径的圆覆盖上述$k+1$个圆．

则$\pi\left(\frac{3}{2}|P_0P_k|\right)^2>(k+1)\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$，即$|P_0P_k|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}(k=1,2,\cdots,n)$．

四、（50分）设$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$（$n$是正整数）.证明：对满足$0\le a<b\le1$的任意实数$a$、$b$，数列$\{S_n-[S_n]\}$中有无穷多项属于$(a,b)$，（$[x]$表示不超过实数$x$的最大整数）．

证法1（1）对任意$n\in N_+$，

$$S_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

有

$$=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2^1+1}+\frac{1}{2^2})+\cdots+(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n})$$

$$>1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n})$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}n.$$

令 $N_0=\left[\dfrac{1}{b-a}\right]+1$，$m=\left[S_{N0}\right]+1$.则 $\dfrac{1}{b-a}<N_0$，$\dfrac{1}{N_0}<b-a$，$S_{N_0}<m\le m+a$.

又令 $N_1=2^{2(m+1)}$.则 $S_{N_1}=S_{2^{2(m+1)}}>m+1\ge m+b$.

从而，存在 $n\in N_+$，$N_0<n<N_1$，使得 $m+a<S_n<m+b\Rightarrow S_n-\left[S_n\right]\in(a,b)$.

否则，存在 $N_0<k$，使得 $S_{k-1}\le m+a$，$S_k\ge m+b$.

于是 $S_k-S_{k-1}\ge b-a$，与 $S_k-S_{k-1}=\dfrac{1}{k}<\dfrac{1}{N_0}<b-a$ 矛盾.

故一定存在 $n\in N_+$，使得 $S_n-\left[S_n\right]\in(a,b)$.

（2）假设只有有限个正整数 n_1，n_2，…，n_k，

使得 $S_{n_j}-\left[S_{n_j}\right]\in(a,b)(1\le j\le k)$.

令 $c=\min\limits_{1\le j\le k}\left\{S_{n_j}-\left[S_{n_j}\right]\right\}$ 则 $a<c<b$.

故不存在 $n\in N_+$，使得 $S_n-\left[S_n\right]\in(a,c)$ 与（1）的结论矛盾.

所以，数列 $\left\{S_n-\left[S_n\right]\right\}$ 中有无穷多项属于 (a,b).

综上，原命题成立.

证法 2 由证法 1，知当 n 充分大时，S_n 可以大于任何一个正数.

令 $N_0=\left[\dfrac{1}{b-a}\right]+1$.则 $N_0>\dfrac{1}{b-a}$.

当 $k>N_0$ 时，$S_k-S_{k-1}=\dfrac{1}{k}<\dfrac{1}{N_0}<b-a$.

同证法 1 可证，对于任何大于 S_{N_0} 的正整数 m，总存在 $n>N_0$，使得 $S_n-m\in(a,b)$，即 $m+a<S_n<m+b$.

令 $m_i=\left[S_{N_0}\right]+i(i=1,2,\cdots)$.则 $m_i>S_{N_0}$.

故一定存在 $n_i>N_0$，使得 $m_i+a<S_{n_i}<m_i+b$.

从而，$a<S_{n_i}-m_i=S_{n_i}-\left[S_{n_i}\right]<b$.

这样的 i 有无穷多个.

所以，数列 $\left\{S_n-\left[S_n\right]\right\}$ 中有无穷多项属于 (a,b).