

2023 北京理工大附中高一（下）期中

数 学

审核人：金永涛，考试时间：90 分钟

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. 若 $\sin \alpha < 0$ ，且 $\tan \alpha > 0$ ，则 α 是

- A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

2. 函数 $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 ()

- A. π B. 2π C. 4π D. 6π

3. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$ ， $\vec{b} = (-1, 1)$ ，则 $|2\vec{a} - \vec{b}| =$ ()

- A. $\sqrt{5}$ B. 4 C. $\sqrt{26}$ D. 6

4. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ ，则 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) =$

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 0

5. 下列函数中，在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上递增的偶函数是 ()

- A. $y = \sin \frac{x}{2}$ B. $y = \tan(-x)$ C. $y = \cos 2x$ D. $y = |\sin x|$

6. 设函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{5}$ ，则它的一条对称轴方程为 ()

- A. $x = \frac{\pi}{12}$ B. $x = -\frac{\pi}{12}$ C. $x = \frac{\pi}{15}$ D. $x = -\frac{\pi}{15}$

7. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是非零向量，“ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ ”是“ $\vec{a} // \vec{b}$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 将函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，所得图象对应的函数

- A. 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递增 B. 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ 上单调递减
C. 在区间 $[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递增 D. 在区间 $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上单调递减

9. 在平面直角坐标系中，角 α 与 β 的顶点在原点，始边与 x 轴正半轴重合，终边构成一条直线，且

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则 $\cos(\alpha + \beta) =$ ()

A. 1

B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$

D. -1

10. 已知点 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 若平面区域 D 由所有满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ 的点 P 组成 (其中 $1 \leq \lambda \leq 2$, $0 \leq \mu \leq 1$), 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的取值范围为 ()

A. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ B. $[0, 1]$ C. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ D. $[-1, 0]$

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分, 把答案填在题中横线上。

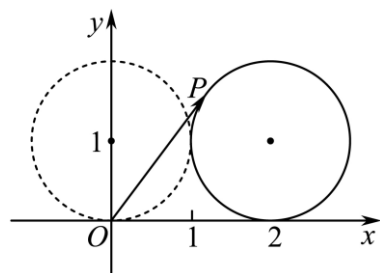
11. 若 $\tan \alpha = \frac{1}{6}$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

12. 设 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, 则 α 为_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 满足 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$, 若 $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \varphi\right)$ $\left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$. 若对 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立, 则 $\varphi =$ _____.

15. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一单位圆的圆心的初始位置在 $(0, 1)$, 此时圆上一点 P 的位置在 $(0, 0)$, 圆在 x 轴上沿正向滚动. 当圆滚动到圆心位于 $(2, 1)$ 时, $\overrightarrow{OP}$ 的坐标为_____.



三、解答题: 本大题共 4 小题, 共 40 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

16. 已知角 α 的顶点与原点 O 重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 它的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

(1) 求 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ 的值;

(2) 若角 β 满足 $\cos \beta = \frac{5}{13}$, 求 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值.

17. 在平面直角坐标系中, 已知向量 $\vec{m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{n} = (\sin x, \cos x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(1) 若 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 求 $\tan x$ 的值;

(2) 若 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 求 x 的值.

18. 某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$, ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象时, 列表并填入了部分数据, 如下表:

x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$A\sin(\omega x + \varphi)$	0	5		-5	0

(1) 请将上表数据补充完整, 并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的最大值和最小值;

(3) 将 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平移 θ ($\theta > 0$) 个单位长度, 得到 $y = g(x)$ 的图象. 若 $y = g(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$, 求 θ 的最小值.

19. 定义: 若函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 且存在非零常数 T , 对任意 $x \in D$, $f(x+T) = f(x) + T$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为线周期函数, T 为 $f(x)$ 的线周期.

(1) 下列函数 1. $y = 2^x$, 2. $y = \log_2 x$, 3. $y = [x]$ (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 是线周期函数的是 _____ (直接填写序号);

(2) 若 $g(x)$ 为线周期函数, 其线周期为 T , 求证: $G(x) = g(x) - x$ 为周期函数;

(3) 若 $\phi(x) = \sin x + kx$ 为线周期函数, 求 k 的值.

参考答案

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

1. 【答案】C

【解析】

【详解】 $\sin \alpha < 0$ ，则 α 的终边在三、四象限； $\tan \alpha > 0$ 则 α 的终边在三、一象限，
 $\sin \alpha < 0$ ， $\tan \alpha > 0$ ，同时满足，则 α 的终边在三象限。

2. 【答案】C

【解析】

【分析】根据周期公式 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ 计算可得。

【详解】函数 $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ 。

故选：C

3. 【答案】C

【解析】

【分析】求出 $2\vec{a} - \vec{b}$ 的坐标，再由模的坐标表示计算。

【详解】因为 $\vec{a} = (2, 1)$ ， $\vec{b} = (-1, 1)$ ，

所以 $2\vec{a} - \vec{b} = (5, 1)$ ，

所以 $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$ ，

故选：C。

4. 【答案】B

【解析】

【详解】分析：根据向量模的性质以及向量乘法得结果。

详解：因为 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}|^2 - (-1) = 2 + 1 = 3$ ，

所以选 B

点睛：向量加减乘： $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$ ， $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

5. 【答案】D

【解析】

【分析】根据基本初等函数的性质判断即可。

【详解】对于 A： $y = \sin \frac{x}{2}$ 为奇函数，故 A 错误；

对于 B： $y = \tan(-x)$ 为奇函数，故 B 错误；

对于 C: $y = \cos 2x$ 为偶函数, 但是函数在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 故 C 错误;

对于 D: $y = f(x) = |\sin x|$, 则 $f(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$, 故 $y = |\sin x|$ 为偶函数,

且 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时 $y = |\sin x| = \sin x$, 函数在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 故 D 正确;

故选: D

6. 【答案】B

【解析】

【分析】由题得 $f(x) = \cos\left(10x - \frac{\pi}{6}\right)$, 再依次代入检验即可得答案.

【详解】解: 因为函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{5}$,

所以 $\frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{\omega}$, 解得 $\omega = 10$

所以 $f(x) = \cos\left(10x - \frac{\pi}{6}\right)$,

所以当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $10x - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$, 不是函数 $y = \cos x$ 的对称轴, 故错误;

当 $x = -\frac{\pi}{12}$ 时, $10x - \frac{\pi}{6} = -\pi$, 是函数 $y = \cos x$ 的对称轴, 故正确;

当 $x = \frac{\pi}{15}$ 时, $10x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 不是函数 $y = \cos x$ 的对称轴, 故错误;

当 $x = -\frac{\pi}{15}$ 时, $10x - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$, 不是函数 $y = \cos x$ 的对称轴, 故错误;

故选: B

7. 【答案】A

【解析】

【详解】 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, 由已知得 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1$, 即 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$, $\vec{a} // \vec{b}$. 而当 $\vec{a} // \vec{b}$ 时, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 还

可能是 π , 此时 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$, 故“ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ ”是“ $\vec{a} // \vec{b}$ ”的充分而不必要条件, 故选 A.

考点: 充分必要条件、向量共线.

8. 【答案】A

【解析】

【分析】由题意首先求得平移之后的函数解析式, 然后确定函数的单调区间即可.

【详解】由函数图象平移变换的性质可知:

将 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度之后的解析式为:

$$y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{10}\right) + \frac{\pi}{5}\right] = \sin 2x.$$

则函数的单调递增区间满足: $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$,

$$\text{即 } k\pi - \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}),$$

令 $k=1$ 可得一个单调递增区间为: $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

函数的单调递减区间满足: $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$,

$$\text{即 } k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}),$$

令 $k=1$ 可得一个单调递减区间为: $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, 本题选择 A 选项.

【点睛】 本题主要考查三角函数的平移变换, 三角函数的单调区间的判断等知识, 意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

9. **【答案】** C

【解析】

【分析】 根据角 α 与 β 的终边构成一条直线得 $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$, 利用诱导公式及二倍角的余弦公式即可求解.

【详解】 由题意, 角 α 与 β 的顶点在原点, 终边构成一条直线, 所以 $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$,

$$\text{所以 } \cos(\alpha + \beta) = \cos(2\alpha + \pi + 2k\pi) = \cos(2\alpha + \pi)$$

$$= -\cos 2\alpha = -(1 - 2\sin^2 \alpha) = 2\sin^2 \alpha - 1,$$

$$\text{又 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha + \beta) = 2\sin^2 \alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{3}.$$

故选: C.

10. **【答案】** D

【解析】

【分析】 由题可得 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC}$ 关于 λ, μ 的表达式, 后由不等式性质可得答案.

【详解】由题可得 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} = \left(\lambda + \frac{\mu}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \mu \right)$, $\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{4} \mu + \frac{3}{4} \mu = \frac{1}{2} (\mu - \lambda).$$

又 $1 \leq \lambda \leq 2$, 则 $-2 \leq -\lambda \leq -1 \Rightarrow -2 \leq \mu - \lambda \leq 0$, 则 $-1 \leq \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} \leq 0$.

故选: D

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分, 把答案填在题中横线上。

11. 【答案】 $-\frac{5}{7}$

【解析】

【分析】由两角差的正切公式计算.

【详解】因为 $\tan \alpha = \frac{1}{6}$,

$$\text{所以 } \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{6} - 1}{1 + \frac{1}{6} \times 1} = -\frac{5}{7}.$$

故答案为: $-\frac{5}{7}$.

12. 【答案】 $\frac{2\pi}{3} \# \frac{2}{3}\pi$

【解析】

【分析】由诱导公式及余弦函数的单调性得结论.

【详解】因为 $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, 且 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减,

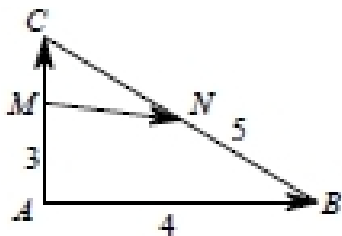
所以由 $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha \in (0, \pi)$ 得 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

故答案为: $\frac{2\pi}{3}$.

13. 【答案】 ①. $\frac{1}{2}$ ②. $-\frac{1}{6}$

【解析】

【详解】特殊化, 不妨设 $AC \perp AB$, $AB = 4$, $AC = 3$, 利用坐标法, 以 A 为原点, AB 为 x 轴, AC 为 y 轴, 建立直角坐标系, $A(0, 0)$, $M(0, 2)$, $C(0, 3)$, $B(4, 0)$, $N(2, \frac{3}{2})$, $\overrightarrow{MN} = (2, -\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{AB} = (4, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 3)$, 则 $(2, -\frac{1}{2}) = x(4, 0) + y(0, 3)$, $4x = 2, 3y = -\frac{1}{2}, \therefore x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{6}$.



考点：本题考点为平面向量有关知识与计算，利用向量相等解题.

14. 【答案】 $-\frac{\pi}{6}$

【解析】

【分析】依题意 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 为函数的最大值，即可得到 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 结合 φ 的取值范围，即可得解.

【详解】因为对 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立，所以 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

解得 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

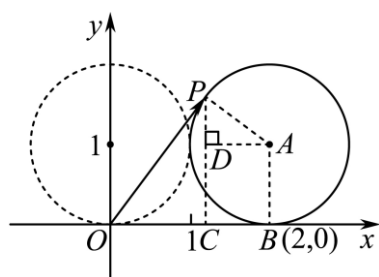
因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

故答案为: $-\frac{\pi}{6}$

15. 【答案】 $(2 - \sin 2, 1 - \cos 2)$

【解析】

【详解】如图，连结 AP，分别过 P, A 作 PC, AB 垂直 x 轴于 C, B 点，过 A 作 $AD \perp PC$ 于 D 点. 由题意知 BP 的长为 2.



$\because$ 圆的半径为 1,

$\therefore \angle BAP = 2$,

故 $\angle DAP = 2 - \frac{\pi}{2}$.

$\therefore DP = AP \cdot \sin\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2$,

$\therefore PC = 1 - \cos 2$,

$$DA = AP \cos \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) = \sin 2.$$

$$\therefore OC = 2 - \sin 2.$$

$$\text{故 } \overrightarrow{OP} = (2 - \sin 2, 1 - \cos 2).$$

三、解答题：本大题共 4 小题，共 40 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. 【答案】(1) $-\frac{3}{5}$;

(2) $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{56}{65}$ 或 $\frac{16}{65}$.

【解析】

【分析】(1) 利用诱导公式和三角函数的定义求解；

(2) 由平方关系求得 $\sin \beta$ ，再利用两角和的正弦公式计算.

【小问 1 详解】

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1,$$

$$\text{因此由已知得 } \sin \alpha = -\frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha = -\frac{3}{5};$$

【小问 2 详解】

$$\cos \beta = \frac{5}{13}, \text{ 则 } \sin \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \pm \frac{12}{13},$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin \beta = \frac{12}{13} \text{ 时, } \sin(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{12}{13} = -\frac{56}{65},$$

$$\sin \beta = -\frac{12}{13} \text{ 时, } \sin(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{16}{65},$$

$$\text{综上, } \sin(\alpha + \beta) = -\frac{56}{65} \text{ 或 } \frac{16}{65}.$$

17. 【答案】(1) 1

(2) $\frac{5\pi}{12}$

【解析】

【分析】(1) 依题意可得 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$ ，根据数量积的坐标运算得到方程，再根据同角三角函数的基本关系计算可得；

(2) 首先求出 $|\vec{m}|$, $|\vec{n}|$, 依题意可得 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2}$, 再利用两角差的正弦公式计算可得;

【小问 1 详解】

解: 因为 $\vec{m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{n} = (\sin x, \cos x)$ 且 $\vec{m} \perp \vec{n}$,

所以 $\vec{m} \cdot \vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = 0$, 即 $\sin x = \cos x$, 所以 $\tan x = 1$;

【小问 2 详解】

解: 因为 $\vec{m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{n} = (\sin x, \cos x)$,

所以 $|\vec{m}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$, $|\vec{n}| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$,

因为 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 所以 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{1}{2}$,

所以 $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, 因为 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$, 所以 $x = \frac{5\pi}{12}$;

18. 【答案】(1) 表格见解析, $f(x) = 5\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

(2) $f(x)_{\max} = \frac{5}{2}$, $f(x)_{\min} = -5$

(3) $\frac{\pi}{6}$

【解析】

【分析】(1) 根据表格数据得到方程组, 即可求出 ω 、 φ , 再读出 A, 从而得到函数解析式, 再补全表格即可;

(2) 根据 x 的取值范围, 求出 $2x - \frac{\pi}{6}$ 的范围, 再结合正弦函数的性质计算可得;

(3) 利用平移规律得 $g(x) = 5\sin\left(2x + 2\theta - \frac{\pi}{6}\right)$, 再利用对称中心公式, 令 $2 \times \frac{5\pi}{12} + 2\theta - \frac{\pi}{6} = k\pi$,

$k \in \mathbb{Z}$, 求得 θ .

【小问 1 详解】

由表格数据可知 $\begin{cases} \frac{\pi}{3}\omega + \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{6}\omega + \varphi = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} \omega = 2 \\ \varphi = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$, 且 $A = 5$,

所以 $f(x) = 5\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$,

数据补全如下表:

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$
$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$A\sin(\omega x + \varphi)$	0	5	0	-5	0

【小问2详解】由(1)可得 $f(x) = 5\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$,

又 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, 则 $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right]$, 所以 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$,

所以 $f(x) \in \left[-5, \frac{5}{2}\right]$,

所以当 $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$, 即 $x = -\frac{\pi}{2}$ 时 $f(x)_{\max} = \frac{5}{2}$, 当 $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$, 即 $x = -\frac{\pi}{6}$ 时 $f(x)_{\min} = -5$.

【小问3详解】

函数 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平移 $\theta (\theta > 0)$ 个单位长度, 得 $g(x) = 5\sin\left(2x + 2\theta - \frac{\pi}{6}\right)$,

因为 $y = \sin x$ 的对称中心是 $(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$,

因为函数 $y = g(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$,

所以 $2 \times \frac{5\pi}{12} + 2\theta - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $\theta = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

又 $\theta > 0$, 当 $k = 1$ 时, θ 的最小值是 $\frac{\pi}{6}$.

19. 【答案】(1) 3; (2) 证明见解析; (3) $k = 1$.

【解析】

【分析】(1) 根据新定义逐一判断即可;

(2) 根据新定义证明即可;

(3) 若 $\phi(x) = \sin x + kx$ 为线周期函数, 则存在非零常数 T , 对任意 $x \in R$, 都有

$\sin(x+T) + k(x+T) = \sin x + kx + T$, 可得 $2kT = 2T$, 解得 k 的值再检验即可.

【详解】(1) 对于 $y = 2^x$, $f(x+T) = 2^{x+T} = 2^x \cdot 2^T = f(x) \cdot 2^T$, 所以不是线周期函数,

对于 $y = \log_2 x$, $f(x+T) = \log_2(x+T) \neq f(x) + T$, 所以不是线周期函数,

对于 $y = [x]$, $f(x+1) = [x+1] = [x] + 1 = f(x) + 1$, 所以是线周期函数;

(2) 若 $g(x)$ 为线周期函数, 其线周期为 T ,

则存在非零常数 T 对任意 $x \in R$, 都有 $g(x+T) = g(x) + T$ 恒成立,

因为 $G(x) = g(x) - x$,

所以 $G(x+T) = g(x+T) - (x+T) = g(x) + T - (x+T) = g(x) - x = G(x)$,

所以 $G(x) = g(x) - x$ 为周期函数;

(3) 因为 $\phi(x) = \sin x + kx$ 为线周期函数,

则存在非零常数 T , 对任意 $x \in R$,

都有 $\sin(x+T) + k(x+T) = \sin x + kx + T$,

所以 $\sin(x+T) + kT = \sin x + T$,

令 $x = 0$, 得 $\sin T + kT = T$,

令 $x = \pi$, 得 $-\sin T + kT = T$,

所以 $2kT = 2T$, 因为 $T \neq 0$, 所以 $k = 1$,

检验: 当 $k = 1$ 时, $\phi(x) = \sin x + x$,

存在非零常数 2π , 对任意 $x \in R$,

$\phi(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + (x+2\pi) = \sin x + x + 2\pi = \phi(x) + 2\pi$,

所以 $\phi(x) = \sin x + x$ 为线周期函数,

所以: $k = 1$.

【点睛】关键点点睛: 本题解题的关键是对新定义的理解和应用, 以及特殊值解决恒成立问题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯