秘密 ★ 启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：B

2024届广州市高三年级调研测试

数　学

本试卷共5页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项： 1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔在答题卡的相应位置填涂考生号。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知复数 z 满足 $z+\overline{z}=2$，$z-\overline{z}=-4\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．$2\sqrt{5}$

2. 已知集合 $M=\{x|y=\ln(1-2x)\}$，$N=\{y|y=\mathrm{e}^x\}$，则 $M\cap N=$

A．$\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　B．$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　C．$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D．$\varnothing$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,t)$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{j}=(0,1)$ 上的投影向量为

A．$\boldsymbol{j}$　　B．$-\boldsymbol{j}$　　C．$2\boldsymbol{j}$　　D．$-2\boldsymbol{j}$

4. 已知函数 $f(x)=a+\dfrac{b}{3^x-1}\ (ab\neq 0)$ 是奇函数，则

A．$2a+b=0$　　B．$2a-b=0$　　C．$a+b=0$　　D．$a-b=0$

5. 如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中，后人称为“三角垛”．“三角垛”的最上层有1个球，第二层有3个球，第三层有6个球，……．记各层球数构成数列 $\{a_n\}$，且 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等差数列，则数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 100 项和为

A．$\dfrac{99}{100}$　　B．$\dfrac{100}{101}$　　C．$\dfrac{99}{50}$　　D．$\dfrac{200}{101}$

6. 直线 $l: y=kx-2$ 与圆 $C: x^2+y^2-6x-7=0$ 交于 A,B 两点，则 $|AB|$ 的取值范围为

A. $[\sqrt{7},4]$　　B. $[2\sqrt{7},8]$　　C. $[\sqrt{3},4]$　　D. $[2\sqrt{3},8]$

7. 已知 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{5}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，则 $\tan\alpha\tan\beta$ 的值为

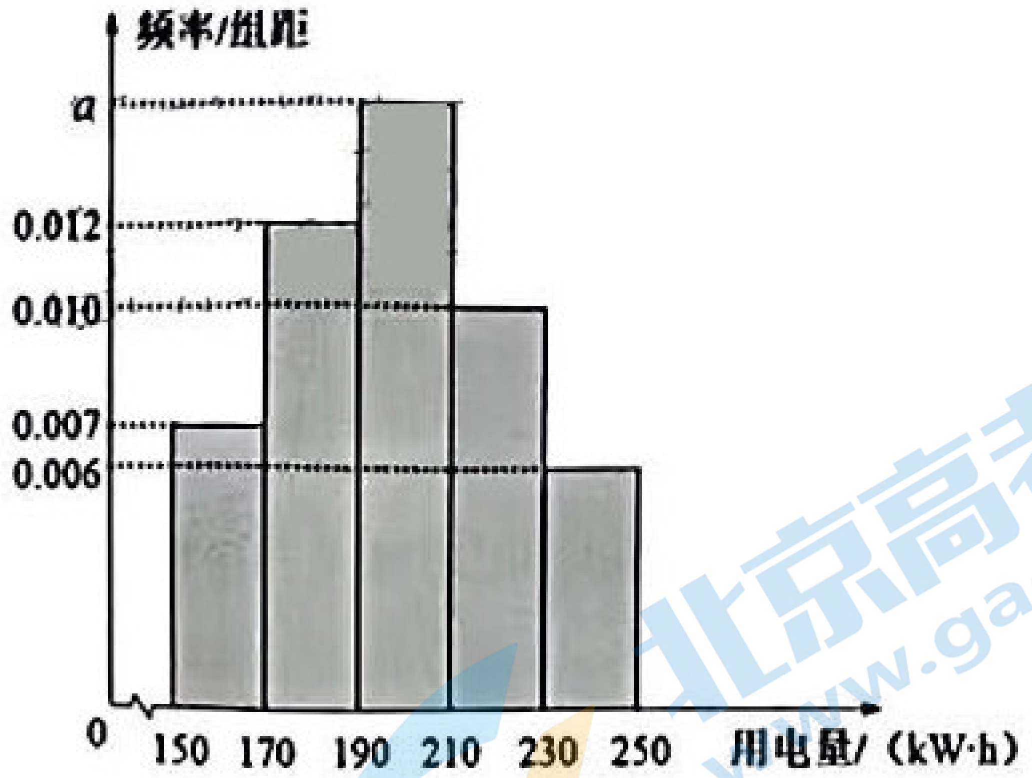
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{5}{3}$　　D. 2

8. 若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+x+1$ 在区间 $(0,2)$ 上存在极小值点，则 a 的取值范围为

A. $\left(1,\frac{5}{4}\right)$　　B. $\left[1,\frac{5}{4}\right)$　　C. $\left[\frac{5}{4},2\right)$　　D. $(1,+\infty)$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分．

9. 某市实行居民阶梯电价收费政策后有效促进了节能减排．现从某小区随机调查了200户家庭十月份的用电量（单位：kW·h），将数据进行适当分组后（每组为左闭右开的区间），画出如图所示的频率分布直方图，则



A. 图中 a 的值为0.015

B. 样本的第25百分位数约为217

C. 样本平均数约为198.4

D. 在被调查的用户中，用电量落在 $[170,230)$ 内的户数为108

10. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2}=1(a>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_2 的直线 l 与双曲线 E 的右支相交于 P，Q 两点，则

A. 若 E 的两条渐近线相互垂直，则 $a=\sqrt{2}$

B. 若 E 的离心率为 $\sqrt{3}$，则 E 的实轴长为1

C. 若 $\angle F_1PF_2=90°$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=4$

D. 当 a 变化时，$\triangle F_1PQ$ 周长的最小值为 $8\sqrt{2}$

11. 已知点 $P\left(\frac{3\pi}{8},1\right)$ 是函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b\ (\omega>0)$ 的图象的一个对称中心，则

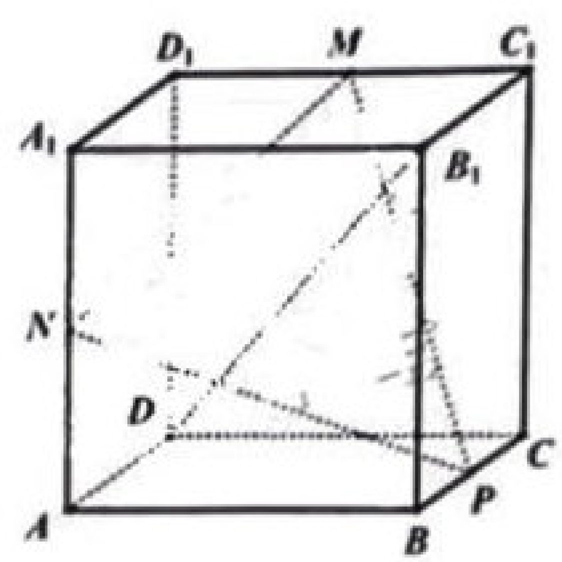
A. $f\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)-1$ 是奇函数

B. $\omega=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k,k\in\mathbf{N}^*$

C. 若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{3\pi}{8},\frac{11\pi}{8}\right)$ 上有且仅有2条对称轴，则 $\omega=2$

D. 若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5}\right)$ 上单调递减，则 $\omega=2$ 或 $\omega=\frac{14}{3}$

12. 如图，在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 M,N,P 分别是棱 C_1D_1，AA_1，BC 的中点，Q 为平面 PMN 上的动点，且直线 QB_1 与直线 DB_1 的夹角为 $30°$，则



A. $DB_1\perp$ 平面 PMN

B. 平面 PMN 截正方体所得的截面面积为 $3\sqrt{3}$

C. 点 Q 的轨迹长度为 π

D. 能放入由平面 PMN 分割该正方体所成的两个空间几何体内部（厚度忽略不计）的球的半径的最大值为 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 M 在 C 上，$MF\perp x$ 轴，若 $\triangle OFM$（O 为坐标原点）的面积为2，则 $p=$__________.

14. $(2x^2+x-y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数为__________（用数字作答）.

15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点均在同一球面上，$PC\perp$ 平面 ABC，$PC=BC=\sqrt{6}$，$AB=2\sqrt{6}$，且 PA 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$，则该球的表面积为__________.

16. 已知函数 $f(x)=e^{2x}-2a(x-2)e^x-a^2x^2\ (a>0)$ 恰有两个零点，则 $a=$__________.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10分）

设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2a_n-1$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=\begin{cases}\log_2 a_n, & n为奇数,\\ a_n, & n为偶数,\end{cases}$ 求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和T_{2n}．

18.（12分）

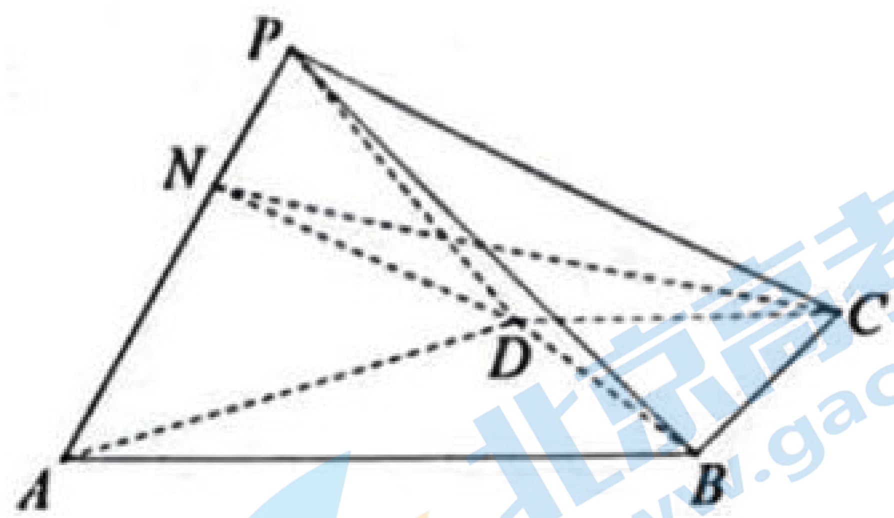
如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$CD\,/\!/\,AB$，$\angle ABC=90°$，$AB=2BC=2CD=4$，

三棱锥$B-PAD$的体积为$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$．

（1）求点P到平面$ABCD$的距离；

（2）若$PA=PD$，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，点N在线段AP上，$AN=2NP$，

求平面NCD与平面$ABCD$夹角的余弦值．



19.（12分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a,b,c，

已知$b\sin B+c\sin C-a\sin A=2b\sin B\sin C$且$C\neq\dfrac{\pi}{2}$．

（1）求证：$B=A+\dfrac{\pi}{2}$；

（2）求$\cos A+\sin B+\sin C$的取值范围．

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=(x+2)\ln(x+1)-ax$．

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程；

（2）当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$，求 a 的取值范围．

21.（12 分）

杭州亚运会的三个吉祥物是琮琮、宸宸和莲莲，他们分别代表了世界遗产良渚古城遗址、京杭大运河和西湖，分别展现了不屈不挠、坚强刚毅的拼搏精神，海纳百川的时代精神和精致和谐的人文精神．甲同学可采用如下两种方式购买吉祥物，方式一：以盲盒方式购买，每个盲盒 19 元，盲盒外观完全相同，内部随机放有琮琮、宸宸和莲莲三款中的一个，只有打开才会知道买到吉祥物的款式，买到每款吉祥物是等可能的；方式二：直接购买吉祥物，每个 30 元．

（1）甲若以方式一购买吉祥物，每次购买一个盲盒并打开．当甲买到的吉祥物首次出现相同款式时，用 X 表示甲购买的次数，求 X 的分布列；

（2）为了集齐三款吉祥物，甲计划先一次性购买盲盒，且数量不超过 3 个，若未集齐再直接购买吉祥物，以所需费用的期望值为决策依据，甲应一次性购买多少个盲盒？

22.（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，点 $F(-\sqrt{3},0)$，点 $P(x,y)$ 是平面内的动点．若以 PF 为直径的圆与圆 $O:x^2+y^2=4$ 内切，记点 P 的轨迹为曲线 E．

（1）求 E 的方程；

（2）设点 $A(0,1)$，$M(t,0)$，$N(4-t,0)$ $(t\neq 2)$，直线 AM,AN 分别与曲线 E 交于点 S,T（S,T 异于 A），$AH\perp ST$，垂足为 H，求 $|OH|$ 的最小值．

2024届广州市高三年级调研测试
数学试题参考答案及评分标准

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题不给中间分．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	C	B	D	D	B	A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

题号	9	10	11	12
答案	AC	ACD	BC	ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

题号	13	14	15	16
答案	$2\sqrt{2}$	120	36π	$\dfrac{e^2}{2}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.解：（1）因为 $S_n=2a_n-1$ ， ①

当 $n=1$ 时，$S_1=2a_1-1=a_1$，则 $a_1=1$． ……………………1 分

当 $n\ge 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$， ② ……………………2 分

①−②得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}(n\ge 2)$， ……………3 分

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列． ……………………4 分

所以 $a_n=2^{n-1}$． ……………………………………………5 分

（2）因为 $\log_2 a_n=\log_2 2^{n-1}=n-1$，所以 $b_n=\begin{cases}n-1, & n\text{为奇数},\\ 2^{n-1}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$ ……………………7 分

所以 $T_{2n}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2n}$

$=(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})$

$=(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})$

$=[0+2+\cdots+(2n-2)]+(2^1+2^3+\cdots+2^{2n-1})$

……………………7 分

$=\dfrac{(0+2n-2)\cdot n}{2}+\dfrac{2(1-4^n)}{1-4}$ ……………………9 分

$=n^2-n+\dfrac{2(4^n-1)}{3}$． ……………………………10 分

18.解：(1)设点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 h，

则 $V_{B-PAD}=V_{P-ABD}=\frac{1}{3}h\cdot S_{\triangle ABD}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$， ....1 分

由题可知 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=4$， ....2 分

所以 $h=\frac{3V_{P-ABD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$， ....3 分

故 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\sqrt{2}$． ....4 分

（2）取 AD 的中点 M，连接 PM，因为 $PA=PD$，所以 $PM\perp AD$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PM\subset$ 平面 PAD，$PM\perp AD$，所以 $PM\perp$ 平面 $ABCD$． ....5 分

由（1）知 $PM=\sqrt{2}$． ....6 分

由题意可得 $BD=2\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{(4-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

所以 $AD^2+BD^2=AB^2$，故 $AD\perp BD$．

法一（坐标法）：以 D 点为坐标原点，DA 为 x 轴，DB 为 y 轴，过 D 点作 PM 的平行线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

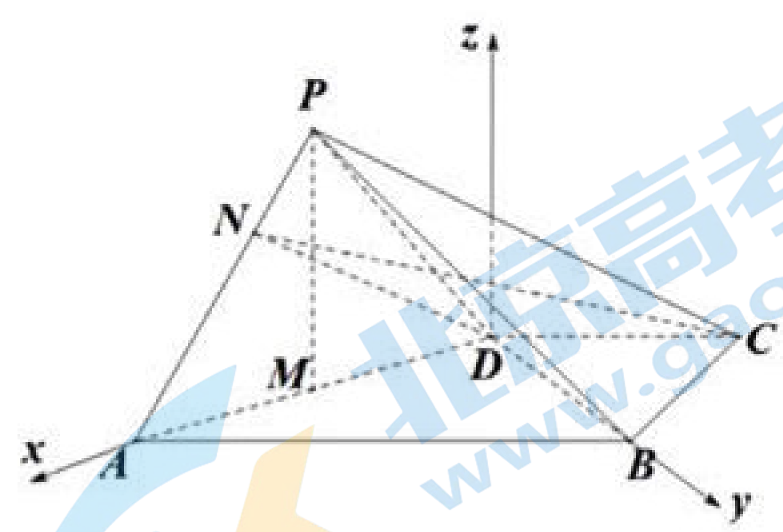
则 A（$2\sqrt{2},0,0$），P（$\sqrt{2},0,\sqrt{2}$），C（$-\sqrt{2},\sqrt{2},0$）． ....7 分

依题意 $\overrightarrow{DC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},0,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3},0,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$． ....8 分

设平面 NCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DN}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1=0,\\ \frac{4\sqrt{2}}{3}x_1+\frac{2\sqrt{2}}{3}z_1=0.\end{cases}$



令 $x_1=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,-2)$ ....10 分

又平面 $ABCD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$

设平面 NCD 与平面 $ABCD$ 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=|\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>|=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}\right|=\left|\frac{-2}{\sqrt{6}\times1}\right|=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

即平面 NCD 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$． ....12 分

法二（几何法）：在线段 AM 上取点 H，使得 $AH=2HM$，连接 NH，过点 H 作 $HK\perp CD$，垂足为 K，连接 NK． ....7 分

因为 $AN=2NP$，所以 $NH\parallel PM$，$NH=\frac{2}{3}PM=\frac{2\sqrt{2}}{3}$， ....8 分

$AH=\frac{2}{3}AM=\frac{1}{3}AD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$．

因为 $PM\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $NH\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $NH\perp CD$，

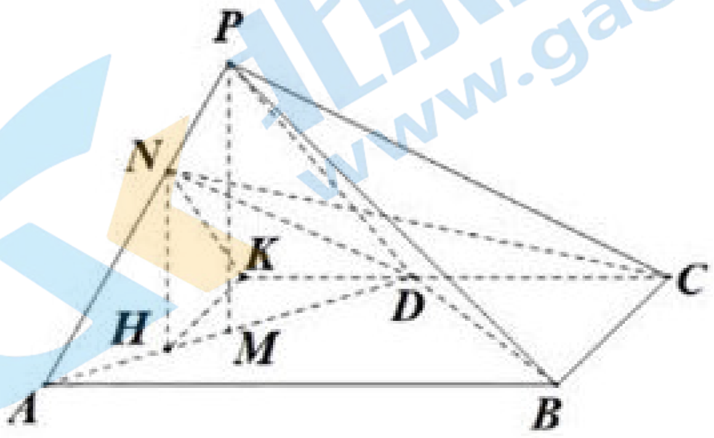
又 $HK\perp CD$，且 $HK\cap NH=H$，

所以 $CD\perp$ 平面 NHK， ……………………………9 分

所以 $CD\perp NK$，

所以 $\angle NKH$ 是二面角 $N-CD-A$ 的平面角. ……………………………10 分

在 $Rt\triangle HDK$ 中，易知 $HD=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，$\angle KDH=45°$，



所以 $KH=DH\cdot\sin45°=\dfrac{4}{3}$，

所以 $\cos\angle NKH=\dfrac{HK}{NK}=\dfrac{\frac{4}{3}}{\sqrt{(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2+(\frac{4}{3})^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

故平面 NCD 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………12 分

19（1）证明：因为 $b\sin B+c\sin C-a\sin A=2b\sin B\sin C$，

由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=2bc\sin B$， ……………………………1 分

又因为 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ……………………2 分

所以 $2bc\cos A=2bc\sin B$，即 $\cos A=\sin B$. ……………………3 分

又 $\cos A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)$，所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)=\sin B$.

又 A，$B\in(0,\pi)$，

所以 $\dfrac{\pi}{2}-A=B$ 或 $\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)+B=\pi$. ……………………4 分

又 $C\neq\dfrac{\pi}{2}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{2}+A$. ……………………………5 分

（2）解：由（1）知 $B=\dfrac{\pi}{2}+A$，$C=\pi-A-B=\pi-A-\left(\dfrac{\pi}{2}+A\right)=\dfrac{\pi}{2}-2A$. ……….6 分

由 A，B，$C\in(0,\pi)$，解得 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$. ……………………………7 分

所以 $\cos A+\sin B+\sin C=\cos A+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+A\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2A\right)$

$=\cos A+\cos A+\cos2A$ ……………………………8 分

$=2\cos A+2\cos^2A-1$ ……………………………9 分

$=2(\cos A+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{3}{2}$.

又 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，所以 $\cos A\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$， ……………………………10 分

所以 $\cos A+\sin B+\sin C$ 的取值范围为 $(\sqrt{2},3)$. ……………………………12 分

（别解：因为 $\cos A+\sin B+\sin C=2\cos A+\cos2A$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，

所以 $\sqrt{2}<2\cos A+\cos2A<3$，所以 $\cos A+\sin B+\sin C$ 的取值范围为 $(\sqrt{2},3)$. ）

20. 解（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=(x+2)\ln(x+1)$，$f(0)=0$， ……………………1 分

$f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x+2}{x+1}$，$f'(0)=2$， ……………………3 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程为 $y=2x$． ……………………4 分

（2）**法一：** $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x+2}{x+1}-a$，$f'(0)=2-a$，

记 $\varphi(x)=f'(x)$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x}{(x+1)^2}<0,\ x\in(-1,0)$， ……………………5 分

（备注：从逻辑推理的角度写成：$f''(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x}{(x+1)^2}<0$ 不扣分）

所以 $f'(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 单调递减． ……………………6 分

（ⅰ）当 $a\le 2$ 时，$f'(x)>f'(0)=2-a\ge 0$，$x\in(-1,0)$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，符合题意； ……………………8 分

（ⅱ）当 $a>2$ 时，$f'(0)=2-a<0$，$f'(-1+\mathrm{e}^{-a})=-a+1+\mathrm{e}^{a}-a>0$，

所以存在 $x_0\in(-1+\mathrm{e}^{-a},0)$，使得 $f'(x_0)=0$． ……………………10 分

从而 $f(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,0)$ 上单调递减，

故当 $x\in(x_0,0)$，$f(x)>f(0)=0$，矛盾，舍去． ……………………11 分

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,2]$． ……………………12 分

法二： 当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$，即 $\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+2}<0$ 对 $\forall x\in(-1,0)$ 恒成立．

设 $g(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+2}=\ln(x+1)+\dfrac{2a}{x+2}-a$，$x\in(-1,0)$．

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2a}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+2)^2-2a(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}=\dfrac{x^2+(4-2a)(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$，$x\in(-1,0)$．

……………………6 分

记 $q(x)=x^2+(4-2a)(x+1)$，

当 $a\le 2$ 时，$q(x)>0$，$x\in(-1,0)$， ……………………7 分

所以 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，

所以 $g(x)<g(0)=0$，$x\in(-1,0)$，符合题意； ……………………8 分

当 $a>2$ 时，$q(x)$ 开口向上，对称轴 $x=-2+a>0$，$q(-1)>0$，$q(0)<0$，

所以存在唯一 $x_0\in(-1,0)$，使得 $q(x_0)=0$， ……………………9 分

当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$q(x)>0$，$g'(x)>0$；当 $x\in(x_0,0)$ 时，$q(x)<0$，从而 $g'(x)<0$

从而 $g(x)$ 在区间 $(-1,x_0)$ 递增，在区间 $(x_0,0)$ 递减，

故当 $x\in(x_0,0)$，$g(x)>g(0)=0$，矛盾，舍去． ……………………11 分

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,2]$． ……………………12 分

21. 解：(1)由题意可知 X 所有可能取值为 2,3,4， ……………………1 分

$P(X=2)=\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{1}{3}$，$P(X=3)=\dfrac{A_3^2C_2^1}{3^3}=\dfrac{4}{9}$，$P(X=4)=\dfrac{A_3^3}{3^3}=\dfrac{2}{9}$．

……………………4 分

（其他解法：$P(X=2)=C_3^1\times(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{3}$，$P(X=3)=C_3^1C_2^1\times(\dfrac{1}{3})^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$，

$P(X=4)=1-P(X=2)-P(X=3)=\frac{2}{9}$. ）

则 X 的分布列如下：……………………5 分

X	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

(2) 设甲一次性购买 x 个吉祥物盲盒，集齐三款吉祥物需要的总费用为 Z .

依题意， x 可取 0,1,2,3.

方案 1：不购买盲盒时，则需要直接购买三款吉祥物，总费用 $Z_1=3\times30=90$ 元.

方案 2：购买 1 个盲盒时，则需要直接购买另外两款吉祥物，

总费用 $Z_2=19+2\times30=79$ 元. ……………………………………6 分

方案 3：购买 2 个盲盒时，

当 2 个盲盒打开后款式不同，则只需要直接购买剩下一款吉祥物，

总费用 $Z_3=2\times19+30=68$， $P(Z_3=68)=\frac{A_3^2}{3^2}=\frac{2}{3}$；

（或 $P(Z_3=68)=C_3^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ ）

当 2 个盲盒打开后款式相同，则需要直接购买另外两款吉祥物，

总费用 $Z_3=2\times19+2\times30=98$， $P(Z_3=98)=C_3^1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

所以 $E(Z_3)=68\times\frac{2}{3}+98\times\frac{1}{3}=78$ (元). ……………………………………8 分

（别解： $E(Z_3)=30\times\frac{2}{3}+2\times30\times\frac{1}{3}+38=78$ (元)）

方案 4：购买 3 个盲盒时，

当 3 个盲盒打开后款式各不相同，则总费用 $Z_4=3\times19=57$，

$P(Z_4=57)=A_3^3(\frac{1}{3})^3=\frac{2}{9}$；

当 3 个盲盒打开后恰有 2 款相同，则需要直接购买剩下一款吉祥物，

总费用 $Z_4=3\times19+30=87$， $P(Z_4=87)=A_3^2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$；

当 3 个吉祥物盲盒打开后款式全部相同，则需要直接购买另外两款吉祥物，

总费用 $Z_4=3\times19+60=117$， $P(Z_4=117)=C_3^1\times(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{9}$.

所以 $E(Z_4)=57\times\frac{2}{9}+87\times\frac{2}{3}+117\times\frac{1}{9}=\frac{251}{3}$ (元). ……………………11 分

（别解： $E(Z_4)=30\times\frac{2}{3}+2\times30\times\frac{1}{9}+3\times19=\frac{251}{3}$ (元)）

显然 $E(Z_3)<E(Z_2)<E(Z_4)<Z_1$.

综上，应该一次性购买 2 个吉祥物盲盒. ……………………………12 分

22.解：（1） 法一：设 PF 的中点为 G，依题意以 PF 为直径的圆内切于圆 $O:x^2+y^2=4$，

所以 $|GO|=2-\frac{|PF|}{2}$，即 $|PF|=4-2|GO|$， ……………………1 分

设$F_2(\sqrt{3},0)$，又$2|OG|=|PF_2|$，所以$|PF|+|PF_2|=4>2\sqrt{3}=|FF_2|$， ……………2 分

所以点 P 的轨迹是以 F,F_2 为焦点，4 为长轴长的椭圆，

设 E 的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则 $c=\sqrt{3},a=2,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

所以 P 的轨迹方程 $E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………4 分

法二：设$P(x,y)$，则 PF 的中点为$G(\dfrac{x-\sqrt{3}}{2},\dfrac{y}{2})$， ……………………1 分

依题意得$|OG|=2-\dfrac{1}{2}|PF|$，即$\sqrt{(\dfrac{x-\sqrt{3}}{2})^2+(\dfrac{y}{2})^2}=2-\dfrac{1}{2}\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+y^2}$. …………………2 分

整理得$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}=4-\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+y^2}$， ……………………3 分

化简得点 P 的轨迹方程 $E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………4 分

（2）设$S(x_1,y_1),T(x_2,y_2)$，先证明直线 ST 恒过定点，理由如下：

法一：由对称性可知直线 ST 的斜率不为0，所以设直线 ST 的方程为：$x=my+n$.

联立直线 ST 与 E 的方程$\begin{cases}x=my+n,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$消去 x 得：$(m^2+4)y^2+2mny+n^2-4=0$，

所以$\Delta>0$，即$4+m^2-n^2>0$， ①

$y_1+y_2=\dfrac{-2mn}{m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{n^2-4}{m^2+4}$. ② ……………………………5 分

所以直线 AS 的方程为：$x=\dfrac{x_1}{y_1-1}(y-1)$，令$y=0$，解得点 M 横坐标$t=\dfrac{-x_1}{y_1-1}$，

同理可得点 N 横坐标$4-t=\dfrac{-x_2}{y_2-1}$，

故$\dfrac{-x_1}{y_1-1}+\dfrac{-x_2}{y_2-1}=4$， ……………………………6 分

将$x_1=my_1+n,x_2=my_2+n$代入上式整理得：

$(2m+4)y_1y_2+(n-m-4)(y_1+y_2)+4-2n=0$. ③ ……………………7 分

将②代入③并整理得$m^2+2mn+n^2-2m-2n=0$， ……………………8 分

即m,n满足方程 $(m+n)(m+n-2)=0$.

若$m+n=0$，即$n=-m$，则直线 ST 方程为$x=m(y-1)$，过点$A(0,1)$，不合题意；

所以$m+n-2=0$，此时$n=2-m$，直线 ST 的方程为$x=m(y-1)+2$，

所以直线 ST 过定点$Q(2,1)$. ……………………10 分

因为直线 ST 过定点$Q(2,1)$，且与轨迹 E 始终有两个交点，

又$A(0,1)$，$AH\perp ST$，垂足为 H，

故点 H 的轨迹是以 AQ 为直径的半圆（不含点 A,Q，在直线 AQ 下方）. ………11 分

设 AQ 中点为 C，则圆心$C(1,1)$，半径为1.

所以$|OH|\geq|OC|-1=\sqrt{2}-1$，当且仅当点 H 在线段 OC 上时，

故$|OH|$的最小值为$\sqrt{2}-1$. ……………………………………12 分

法二：①当直线 ST 斜率存在，设直线 ST 的方程为 $y=kx+m$.

联立直线 ST 与椭圆 E 的方程 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$

消去 x 得：$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

所以 $\Delta>0$，即 $4k^2+1-m^2>0$， ①

$x_1+x_2=\dfrac{-8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}$. ② ……………………………5 分

所以直线 AS 的方程为：$x_1(y-1)=(y_1-1)x$，

（备注：若直线 AS 方程写成 $y-1=\dfrac{y_1-1}{x_1}x$，需另外考虑 $x_1=0$ 的情形，可参考方法四①.）

令 $y=0$，解得点 M 横坐标 $t=\dfrac{-x_1}{y_1-1}$，

同理可得点 N 横坐标 $4-t=\dfrac{-x_2}{y_2-1}$，

所以 $\dfrac{x_1}{y_1-1}+\dfrac{x_2}{y_2-1}=-4$， ……………………………6 分

即 $x_1(y_2-1)+x_2(y_1-1)=-4(y_1-1)(y_2-1)$，

将 $y_1=kx_1+m$，$y_2=kx_2+m$ 代入上式，得

$(4k^2+2k)x_1x_2+(1+4k)(m-1)(x_1+x_2)+4(m-1)^2=0$， ……………………………7 分

将②代入上式，得 $(4k^2+2k)\dfrac{4(m^2-1)}{1+4k^2}+(1+4k)(m-1)\dfrac{-8km}{1+4k^2}+4(m-1)^2=0$.

整理得 $2km-2k+m^2-2m+1=(m-1)(2k+m-1)=0$， ……………………………8 分

所以 $m=1-2k$.（其中 $m=1$ 时，直线 $ST:y=kx+1$ 过点 A，不符合题意，舍去.）

直线 ST 的方程为：$y=kx+(1-2k)$ 恒过定点 $Q(2,1)$.

②当直线 ST 斜率不存在，此时 $S(x_1,y_1),T(x_1,-y_1)$，

同理可得 $\dfrac{x_1}{y_1-1}+\dfrac{x_1}{-y_1-1}=-4$，即 $\dfrac{x_1}{2}=1-y_1^2$，

又 $\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，解得 $x_1=0$ 或 $x_1=2$.

若 $x_1=0$，则 S,T 中必有一点与 A 重合，不符合题意；

若 $x_1=2$，则 M,N 重合，也不符合题意. ……………………………9 分

综上，所以直线 ST 过定点 $Q(2,1)$. ……………………………10 分

后略，同法一.

法三：①若直线 AS,AT 的斜率均存在，即 $x_1\neq0$，$x_2\neq0$，

则 $k_{AS}=\dfrac{y_1-1}{x_1}=\dfrac{1}{-t}$，$k_{AT}=\dfrac{y_2-1}{x_2}=\dfrac{1}{t-4}$

故 $\dfrac{x_1}{y_1-1}+\dfrac{x_2}{y_2-1}=-4$ ……………………………5 分

依题意直线 ST 不经过点 A，设直线 $ST: mx+n(y-1)=1$，

椭圆 E：$0=x^2+4y^2-4=x^2+4[(y-1)+1]^2-4=x^2+4(y-1)^2+8(y-1)$，

……………………………6 分

联立 ST 与 E 的方程 $\begin{cases} mx+n(y-1)=1, \\ x^2+4(y-1)^2+8(y-1)=0, \end{cases}$

得 $x^2+4(y-1)^2+8(y-1)[mx+n(y-1)]=0$，

整理得 $(4+8n)(y-1)^2+8m(y-1)x+x^2=0$，

除以 $(y-1)^2$，得 $(4+8n)+8m\dfrac{x}{y-1}+(\dfrac{x}{y-1})^2=0$，……………………………7 分

因为 $S(x_1,y_1)$，$T(x_2,y_2)$ 满足上式，故由韦达定理得 $\dfrac{x_1}{y_1-1}+\dfrac{x_2}{y_2-1}=-8m=-4$，

解得 $m=\dfrac{1}{2}$．……………………………8 分

所以直线 $ST:\dfrac{1}{2}x+n(y-1)=1$ 恒过定点 $Q(2,1)$．……………………………9 分

②若直线 AS 或 AT 的斜率不存在时，易求直线 ST：$y=x-1$，过点 $Q(2,1)$．

综上，所以直线 ST 过定点 $Q(2,1)$．……………………………10 分

后略，同法一．

法四： ①当 $t=0$ 时，易知直线 AM：$x=0$；直线 AN：$y=-\dfrac{1}{4}x+1$．

AM，AN 分别与轨迹 E 的方程联立求得 $S(0,-1)$，$T(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5})$，

故直线 $ST: y=x-1$．……………………………5 分

②当 $t=4$ 时，同理求得直线 $ST: y=x-1$．

③当 $t\neq 0,2,4$ 时，直线 $AM:\dfrac{x}{t}+y=1$，

联立直线 AM 与轨迹 E 的方程，消去 y 得 $x(\dfrac{t^2+4}{4t^2}x-\dfrac{2}{t})=0$，

所以 $x_1=\dfrac{8t}{t^2+4}$（S 异于 A），所以 $y_1=-\dfrac{1}{t}x_1+1=\dfrac{-8}{t^2+4}+1$．……………6 分

同理得 $x_2=\dfrac{8(4-t)}{(4-t)^2+4}$，$y_2=\dfrac{-8}{(4-t)^2+4}+1$．……………………………7 分

所以直线 ST 的斜率 $k_{ST}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{-8[(4-t)^2+4]+8(t^2+4)}{8t[(4-t)^2+4]-8(4-t)(t^2+4)}=\dfrac{4}{(t-2)^2}$，

……………………………8 分

所以直线 ST 的方程为 $y+\dfrac{8}{t^2+4}-1=\dfrac{4}{(t-2)^2}(x-\dfrac{8t}{t^2+4})$ ①

$y-1=\dfrac{4}{(t-2)^2}(x-\dfrac{8t}{t^2+4}-\dfrac{(t-2)^2}{4}\cdot\dfrac{8}{t^2+4})=\dfrac{4}{(t-2)^2}(x-2)$

综上，所以直线 ST 过定点 $Q(2,1)$．……………………………10 分

后略，同法一．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

微信搜一搜

京考一点通