昌平区 2019 年高三年级第二次统一练习

数学试卷(理科)　　　　2019.5

本试卷共 5 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案作答在答题卡上，在试卷上作答无效．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

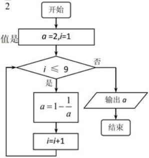
（1）已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x^2\le 1\}$，则 $\complement_U A=$

(A) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　(B) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　(C) $(-1,1)$　(D) $[-1,1]$

（2）已知复数 $z=-1+a(1+\mathrm{i})$（i 为虚数单位，a 为实数）在复平面内对应的点位于第二象限，则复数 z 的虚部可以是

(A) $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　(B) $\frac{1}{2}\mathrm{i}$　(C) $-\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{2}$

（3）已知某程序框图如图所示，则执行该程序后输出的 a 的值是



(A) -1

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 1

(D) 2

（4）若直线 $y=2x$ 上存在点 (x,y) 满足 $\begin{cases}x+y-3\le 0,\\ x-2y-3\ge 0,\\ x\ge m,\end{cases}$ 则实数 m 的最大值为

(A) -2　(B) -1　(C) 1　(D) 3

（5）设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量，则“存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$”是“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$”的

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

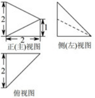
（6）某四棱锥的三视图如图所示，在此四棱锥的侧面中，直角三角形的个数为

（A）1

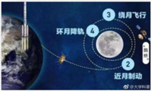
（B）2

（C）3

（D）4



（7） 嫦娥四号月球探测器于 2018 年 12 月 8 日搭载长征三号乙运载火箭在西昌卫星发射中心发射. 12 日下午 4 点 43 分左右，嫦娥四号顺利进入了以月球球心为一个焦点的椭圆形轨道，如图中轨道③所示，其近月点与月球表面距离为100 公里，远月点与月球表面距离为 400 公里. 已知月球的直径为 3476 公里，则该椭圆形轨道的离心率约为



(A) $\frac{1}{25}$ (B) $\frac{3}{40}$

(C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{3}{5}$

（8）已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，且满足 $f(x)=\begin{cases} x^2-\frac{x}{2}(0\le x<1), \\ \frac{x-1}{e^x}(x\ge 1) \end{cases}$，

若函数 $F(x)=f(x)-m$ 有 6 个零点，则实数 m 的取值范围是

(A) $(-\frac{1}{16},\frac{1}{e^2})$ (B) $(-\frac{1}{16},0)\cup(0,\frac{1}{e^2})$

(C) $(0,\frac{1}{e^2})$ (D) $[0,\frac{1}{e^2})$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（9）已知幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(2,\sqrt{2})$，则 $f(4)$ 的值为 ______.

（10）在极坐标系中，极点到直线 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$ 的距离为________.

（11）在 $\triangle ABC$ 中，三边长分别为 $a=3,b=2\sqrt{2},c=\sqrt{5}$ ，其最大角的余弦值为_________，$\triangle ABC$ 的面积为_______.

（12）2019 年 3 月 2 日，昌平 “回天” 地区开展了 7 种不同类型的 “三月雷锋月,回天有我”社会服务活动. 其中有 2 种活动既在上午开展、又在下午开展， 3 种活动只在上午开展，2 种活动只在下午开展 . 小王参加了两种不同的活动，且分别安排在上、下午，那么不同

安排方案的种数是__________.

（13）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$\forall n\in \mathbf{N}^*, a_{n+1}>a_n, S_n\geq S_6$．请写出一个满足条件的数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$________.

（14）已知平面内两个定点$M(3,0)$和点$N(-3,0)$，P是动点，且直线PM，PN的斜率乘积为常数$a(a\neq 0)$，设点P的轨迹为C．

① 存在常数$a(a\neq 0)$，使C上所有点到两点$(-4,0),(4,0)$距离之和为定值；

② 存在常数$a(a\neq 0)$，使C上所有点到两点$(0,-4),(0,4)$距离之和为定值；

③ 不存在常数$a(a\neq 0)$，使C上所有点到两点$(-4,0),(4,0)$距离差的绝对值为定值；

④ 不存在常数$a(a\neq 0)$，使C上所有点到两点$(0,-4),(0,4)$距离差的绝对值为定值.

其中正确的命题是______________.（填出所有正确命题的序号）

三、解答题共6小题，共80分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

（15）（本小题13分）

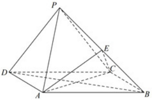
已知函数$f(x)=\cos x(\sqrt{3}\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}$．

（I）求$f(\frac{\pi}{3})$的值；

（II）当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，不等式$c<f(x)<c+2$恒成立，求实数c的取值范围.

（16）（本小题14分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，平面$PCD\perp$平面$ABCD$，$AB=2$，$BC=1$，$PC=PD=\sqrt{2}$，E为PB中点.



（Ⅰ）求证：PD // 平面ACE；

（Ⅱ）求二面角$E-AC-D$的余弦值；

（Ⅲ）在棱PD上是否存在点M，使得$AM\perp BD$？若存在，求$\frac{PM}{PD}$的值；若不存在，说明理由.

（17）（本小题13分）

某学校为了解高一新生的体质健康状况，对学生的体质进行了测试．现从男、女生中各随机抽取20人，把他们的测试数据，按照《国家学生体质健康标准》整理如下表．规定：数据$\geqslant 60$，体质健康为合格.

等级	数据范围	男生人数	男生平均分	女生人数	女生平均分

优秀	[90,100]	5	91.3	2	91
良好	[80,89]	4	83.9	4	84.1
及格	[60,79]	8	70	11	70.2
不及格	60 以下	3	49.6	3	49.1
总计	--	20	75.0	20	71.9

(I) 从样本中随机选取一名学生，求这名学生体质健康合格的概率；

(II) 从男生样本和女生样本中各随机选取一人，求恰有一人的体质健康等级是优秀的概率；

（III）表中优秀、良好、及格、不及格四个等级的男生、女生平均分都接近（二者之差的绝对值不大于1），但男生的总平均分却明显高于女生的总平均分．研究发现，若去掉四个等级中一个等级的数据，则男生、女生的总平均分也接近，请写出去掉的这个等级．（只需写出结论）

（18）（本小题 13 分）

已知 $f(x)=(x-1)e^x-\frac{1}{2}ax^2$.

(I) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行，求 a 的值；

(II) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，求 a 的取值范围.

（19）（本小题 13 分）

已知抛物线 $G:y^2=2px(p>0)$ 过点 $M(1,-2)$，A,B 是抛物线 G 上异于点 M 的不同两点，且以线段 AB 为直径的圆恒过点 M．

（I）当点 A 与坐标原点 O 重合时，求直线 MB 的方程；

（II）求证：直线 AB 恒过定点，并求出这个定点的坐标.

（20）(本小题 14 分)

对于集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，$n\in\mathbf{N}^*,m\in\mathbf{N}^*$.

$A+B=\{x+y\mid x\in A,y\in B\}$．集合 A 中的元素个数记为 $|A|$.

规定：若集合 A 满足 $|A+A|=\frac{n(n+1)}{2}$，则称集合 A 具有性质 T．

（I）已知集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}\}$，写出 $|A+A|$，$|B+B|$ 的值；

（II）已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$\{a_n\}$ 为等比数列，$a_n>0$，且公比为 $\frac{2}{3}$，证明：A 具有性质 T；

（III） 已知 A,B 均有性质 T，且 $n=m$，求 $|A+B|$ 的最小值.

昌平区 2019 年高三年级第二次统一练习

数学试卷(理科)参考答案

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分)

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	A	D	D	B	B	C	B	C

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

(9)　2　　(10)　$\sqrt{2}$　　(11)　$\frac{\sqrt{10}}{10}$;3　　(12)　18

(13)　$n-6(n\in \mathbf{N}^*)$（答案不唯一）　　(14) ②④

三、解答题(共 6 小题，共 80 分)

(15)（共 13 分）

解：(Ⅰ) $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$,

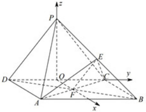
所以 $f(\frac{\pi}{3})=1$.　　....8 分

(Ⅱ) 因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$. 所以 $-\frac{1}{2}\le\sin(2x-\frac{\pi}{6})\le 1$.

由不等式 $c<f(x)<c+2$ 恒成立，所以 $\begin{cases} c<-\frac{1}{2}, \\ c+2>1 \end{cases}$ 解得 $-1<c<-\frac{1}{2}$.

所以实数 c 的取值范围为 $(-1,-\frac{1}{2})$.　　....13 分

(16)（共 14 分）



解：(Ⅰ) 设 BD 交 AC 于点 F，连结 EF.

因为底面 $ABCD$ 是矩形,

所以 F 为 BD 中点．

又因为 E 为 PB 中点，

所以 $EF\ /\!/\ PD$.

因为 $PD\not\subset$ 平面 ACE，$EF\subset$ 平面 ACE,

所以 $PD\ /\!/$ 平面 ACE.　　....4 分

(Ⅱ) 取 CD 的中点 O，连结 PO，FO.

因为底面 $ABCD$ 为矩形,

所以 $BC\perp CD$.

因为 $PC=PD$，O为CD中点，

所以 $PO\perp CD, OF \mathbin{/\mkern-6mu/} BC$．

所以 $OF\perp CD$．

又因为 平面$PCD\perp$平面$ABCD$，

$PO\subset$平面PCD, 平面$PCD\cap$平面$ABCD=CD$，

所以 $PO\perp$平面$ABCD$．

如图，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则

$A(1,-1,0)$，$C(0,1,0)$, $B(1,1,0)$, $P(0,0,1)$, $E(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$

$\overrightarrow{AC}=(-1,2,0)$, $\overrightarrow{AE}=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

所以$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+2y=0,\\ -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2y,\\ z=-y.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=2, z=-1$，所以 $\boldsymbol{m}=(2,1,-1)$．

平面 ACD 的法向量为 $\overrightarrow{OP}=(0,0,1)$，

$\cos<\boldsymbol{m},\overrightarrow{OP}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{OP}|}=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$．

如图可知二面角 $E-AC-D$为钝角，所以二面角 $E-AC-D$的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ .....10 分

（III）在棱 PD 上存在点 M，使 $AM\perp BD$．

设 $\dfrac{PM}{PD}=\lambda(\lambda\in[0,1])$, $M(x,y,z)$,则 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}$, $D(0,-1,0)$．

因为 $(x,y,z-1)=\lambda(0,-1,-1)$,所以 $M(0,-\lambda,1-\lambda)$．

$\overrightarrow{AM}=(\ -1\ ,\ \lambda\ \ \ \lambda-1\ \ \overrightarrow{BD},=\ \ -\ ($

因为 $AM\perp BD$,所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=0$．

所以 $1-2(1-\lambda)=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}\in[0,1]$．

所以在棱 PD 上存在点 M ,使 $AM\perp BD$，且 $\dfrac{PM}{PD}=\dfrac{1}{2}$． ....14 分

(17)（共 13 分）

解：（I）样本中合格的学生数为：$5+2+4+4+8+11=34$，样本总数为：$20+20=40$，

这名学生体质健康合格的概率为 $\frac{34}{40}=\frac{17}{20}$.　　....5 分

（II）设事件 A 为"从男生样本中随机选出的人的体质健康等级是优秀"，

$P(A)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

事件 B 为"从女生样本中随机选出的人的体质健康等级是优秀"，$P(B)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

因为 A,B 为独立事件，

故所求概率为 $P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)(1-P(B))+(1-P(A))P(B)$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{9}{10}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{10}=\frac{3}{10}.$$　　....10 分

（III）去掉的等级为优秀.　　....13 分

(18)（共 13 分）

解：(I) 因为 $f(x)=(x-1)e^x-\frac{1}{2}ax^2$，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

所以 $f'(x)=xe^x-ax$.

$f'(1)=e-a$.

由题设知 $f'(x)=0$，即 $e-a=0$，解得 $a=e$.

此时 $f(1)=-\frac{e}{2}\neq 0$.

所以 a 的值为 e .　　....5 分

（II）由 (I) 得 $f'(x)=xe^x-ax=x(e^x-a)$.

① 若 $a>1$，则当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$x<0, e^x<1, e^x-a<0$，所以 $f'(x)>0$；

当 $x\in(0,\ln a)$ 时，$x>0, e^x-a<e^{\ln a}-a=0$，所以 $f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值.

② 若 $a\le 1$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$x>0$，$e^x-a\ge e^x-1>0$，

所以 $f'(x)>0$.

所以 0 不是 $f(x)$ 的极大值点.

综上可知，a 的取值范围是（1，+∞）．　　　　....13 分

(19)（共 13 分）

解：（I）因为 $M(1,-2)$ 在抛物线 $G: y^2=2px(p>0)$ 上，所以 $(-2)^2=2p\times 1$，

所以 $p=2$，抛物线 $G: y^2=4x$．

当点 A 与点 O 重合时，易知 $k_{AM}=-2$，

因为以线段 AB 为直径的圆恒过点 M，所以 $AM\perp MB$．所以 $k_{BM}=\frac{1}{2}$．

所以 $MB: y+2=\frac{1}{2}(x-1)$，即直线 MB 的方程为 $x-2y-5=0$．　　....5 分

（II）显然直线 AB 与 x 轴不平行，设直线 AB 方程为 $x=my+n$．

$\begin{cases} x=my+n, \\ y^2=4x \end{cases}$，消去 x 得 $y^2-4my-4n=0$．

设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，因为直线 AB 与抛物线交于两点，

所以 $\Delta=16m^2+16n>0, y_1+y_2=4m, y_1y_2=-4n$ ①

因为以线段 AB 为直径的圆恒过点 M，所以 $AM\perp MB$．

因为 A,B 是抛物线上异于 M 的不同两点，

所以 $x_1,x_2\neq 1$，$k_{MA}\cdot k_{MB}=-1$．

$k_{MA}=\frac{y_1+2}{x_1-1}=\frac{y_1+2}{\frac{y_1^2}{4}-1}=\frac{4}{y_1-2}$，同理得 $k_{MB}=\frac{y_2+2}{x_2-1}=\frac{y_2+2}{\frac{y_2^2}{4}-1}=\frac{4}{y_2-2}$．

所以 $\frac{4}{y_1-2}\cdot\frac{4}{y_2-2}=-1$，即 $(y_1-2)(y_2-2)+16=0$，$y_1y_2-2(y_1+y_2)+20=0$．

将 ①代入得，$-4n-8m+20=0$，即 $n=-2m+5$．

代入直线方程得 $x=my-2m+5=m(y-2)+5$．

所以直线 AB 恒过定点 $(5,2)$．　　　　....13 分

(20)（共 14 分）

解：（I）$|A+A|=7$；$|B+B|=10$．　　　　....4 分

（II）要证 A 具有性质 T，只需证明，若 $n_1<n_2\le n_3<n_4$，则 $a_{n_1}+a_{n_4}\neq a_{n_2}+a_{n_3}$．

假设上式结论不成立，即若 $n_1<n_2\le n_3<n_4$，则 $a_{n_1}+a_{n_4}=a_{n_2}+a_{n_3}$．

即 $q^{n_1}+q^{n_4}=q^{n_2}+q^{n_3}$，即 $q^{n_4-n_1}=q^{n_2-n_1}+q^{n_3-n_1}-1$，

$(\frac{2}{3})^{n_4-n_1}=(\frac{2}{3})^{n_2-n_1}+(\frac{2}{3})^{n_3-n_1}-1$，

$2^{n_4-n_1}=2^{n_2-n_1}\times 3^{n_4-n_2}+2^{n_3-n_1}\times 3^{n_4-n_3}-3^{n_4-n_1}$.

因为上式的右边为 3 的倍数，而上式的左边为 2 的倍数，所以上式不成立.

故假设不成立，原命题成立. ....10 分

（III）由题意，集合 A 具有性质 T，等价于任意两个元素之和均不相同.

如，对于任意的 $a<b\le c<d$，有 $a+d\ne b+c$，

等价于 $d-c\ne b-a$，即任意两个不同元素之差的绝对值均不相同.

令 $A^*=\{x-y\,|\,x\in A,y\in A,x>y\}$，

所以 A 具有性质 $T \Leftrightarrow |A+A|=\frac{n(n+1)}{2}\Leftrightarrow |A^*|=\frac{n(n-1)}{2}$.

因为集合 A,B 均有性质 T，且 $n=m$，

所以 $|A+B|=n^2-|A^*\cap B^*|\ge n^2-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$，当且仅当 $A=B$ 时等号成立.

所以 $|A+B|$ 的最小值为 $\frac{n(n+1)}{2}$. ....14 分