

文科数学

注意事项:

1. 答题前, 考生务必在答题卡上将自己的姓名、班级、准考证号用 0.5 毫米黑色签字笔填写清楚, 考生考试条码由监考老师粘贴在答题卡上的“条码粘贴处”。
2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上, 如需改动, 用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案; 非选择题用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答, 超出答题区域答题的答案无效; 在草稿纸上、试卷上答题无效。
3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 集合 $A = \{1, 3, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) =$
 - A. $\{4, 8\}$
 - B. $\{3\}$
 - C. $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$
 - D. $\{1, 2, 5, 6, 7, 9\}$

2. 若 $z = \frac{2+i}{1-i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $|z| =$

A. $\sqrt{10}$

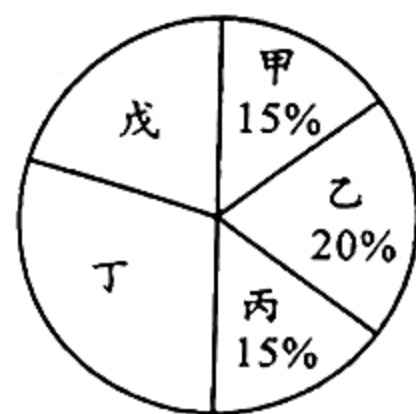
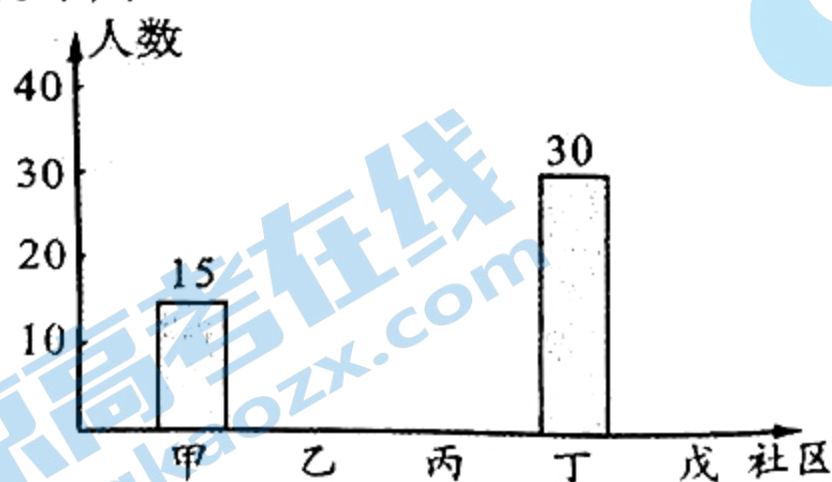
B. $\sqrt{5}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

3. 若 a, b 为非零向量, 则 “ $a \perp b$ ” 是 “ $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ” 的
 - A. 充分不必要条件
 - B. 必要不充分条件
 - C. 充分必要条件
 - D. 既不充分也不必要条件

4. 某年级有 100 名学生到甲、乙、丙、丁、戊这 5 个社区参加志愿者活动, 且每个人只到一个社区, 经统计, 并将到各社区参加志愿者活动的学生人数绘制成如下不完整的两个统计图:



则到戊社区参加志愿者活动的学生人数为

A. 10

B. 15

C. 20

D. 25

5. 以点 $(1, -1)$ 为圆心, 且与直线 $x - y + 2 = 0$ 相切的圆的方程为

A. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$

B. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$

C. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 8$

D. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 8$

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_4 + a_6 = 22$, $a_1 \cdot a_9 = 57$, 则该等差数列的公差为

~~A. 1 或 -1~~

B. 2

C. -2

D. 2 或 -2

7. 已知 $a > 0 > b$, 则下列不等式一定成立的是

~~A. $a^2 > b^2$~~

~~B. $ab > b^2$~~

C. $\ln|\frac{a}{b}| > 0$

D. $2^{a-b} > 1$

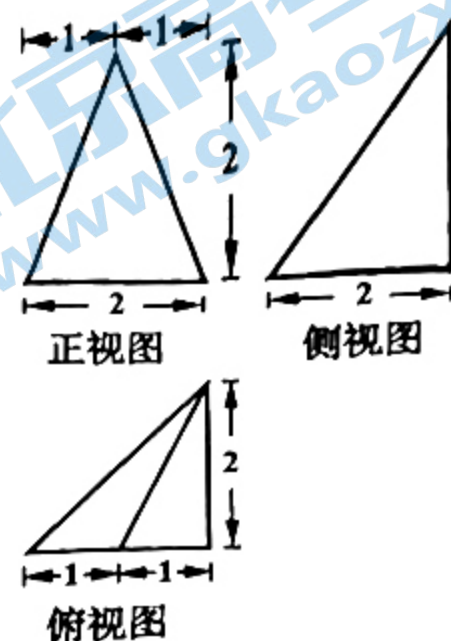
8. 如图是一个空间几何体的三视图, 则该几何体的体积为

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{4}{3}$

C. 2

D. $\frac{8}{3}$



9. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 左顶点为 A , 点 B 的坐标为 $(0, b)$. 若 $\triangle ABF$ 为等腰三角形, 则 E 的离心率为

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2} + 1$

D. $\sqrt{3} + 1$

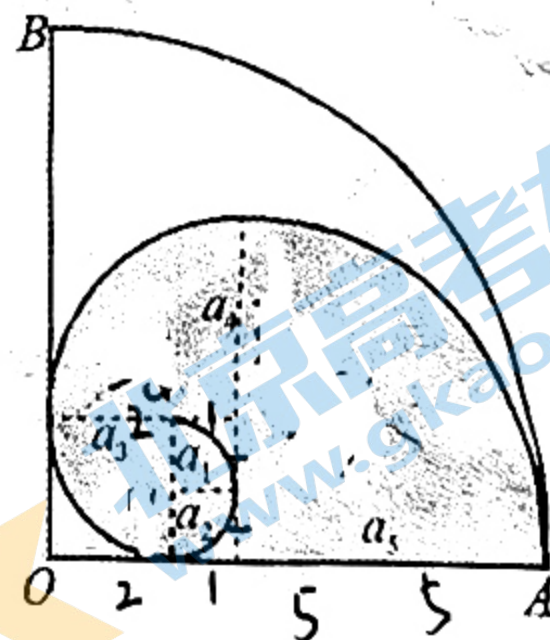
10. 满足 $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3)$ 的数列 $\{a_n\}$ 称为斐波那契数列, 又称黄金分割数列. 如图, 依次以斐波那契数列 $\{a_n\}$ 各项为边长作正方形, 在每个正方形中取半径为该正方形边长、圆心角为 90° 的圆弧, 依次连接圆弧端点所成的曲线就是斐波那契螺旋线. 右图圆心角为 90° 的扇形 OAB 中的曲线是斐波那契螺旋线的一段, 若在该扇形内任取一点, 则该点在图中阴影部分的概率为

A. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{5}{8}$

D. $\frac{7}{8}$



11. 已知函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$, 则下列结论正确的是

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ 对称

~~B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称~~

~~C. 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增~~

D. 函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = 1$ 的交点间的最小距离为 $\frac{2\pi}{3}$

12. 函数 $f(x) = -2x + 2 (x < 0)$, $g(x) = \frac{x}{\ln x} + x$. 若 $f(x_1) = g(x_2)$, 则 $x_2 - 2x_1$ 的最小值为

A. $2 - \frac{1}{e}$

B. $4 - \frac{2}{e}$

C. $4\sqrt{e} - 2$

D. $4\sqrt{e} - 1$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知 $|a|=2$ ， $|b|=3$ ，且向量 a 与 b 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ ，则 $|2a-b|$ = _____.

14. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=2$ ， $a_n=2S_{n-1}$ ($n \geq 2$)，则 S_4 = _____.

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_2 作倾斜角为 45° 的直线 l 与 C

交于 A, B 两点（点 A 在 x 轴上方），且 $\overrightarrow{AF_2} = \lambda \overrightarrow{F_2B}$ ($0 < \lambda < 1$)，则 λ = _____.

16. 如图，矩形 $BDEF$ 所在平面与正方形 $ABCD$ 所在平面互相垂直， $DB=2DE$ ，点 P 在线段 EF 上. 给出下列命题：

①直线 $PD \perp$ 直线 AC ；

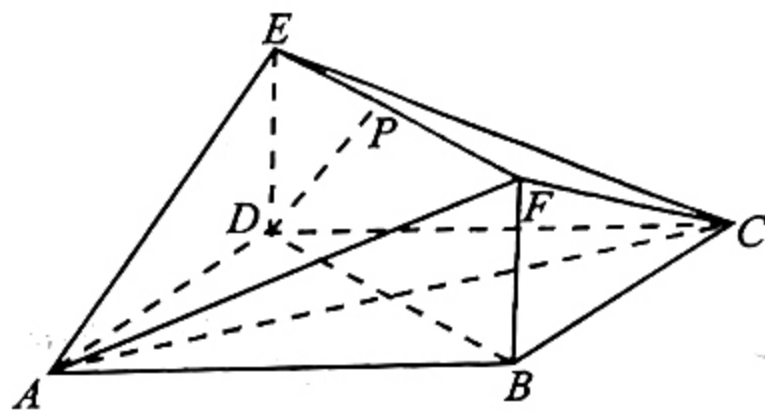
②直线 PD 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值的取值

范围是 $[\frac{\sqrt{5}}{5}, 1]$ ；

③存在点 P ，使得直线 $PD \perp$ 平面 ACF ；

④存在点 P ，使得直线 $PD \parallel$ 平面 ACF .

其中所有真命题的序号是_____.

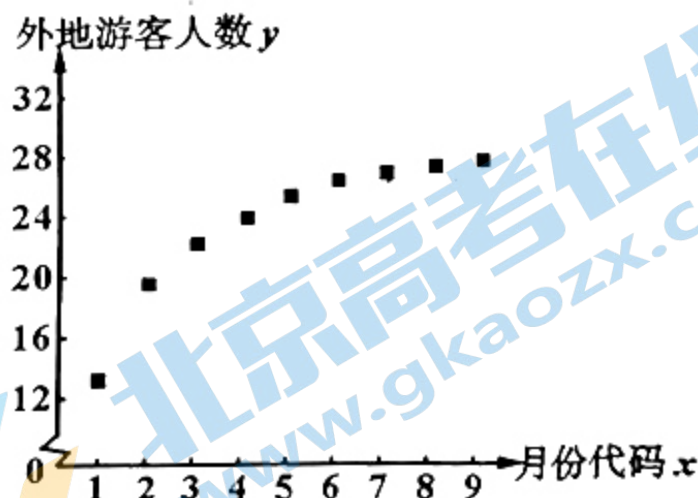


三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共60分。

17. (12分)

2021年是“十四五”开局之年，是实施乡村振兴的重要一年. 某县为振兴乡村经济，大力发展乡村生态旅游，激发乡村发展活力. 该县为了解乡村生态旅游发展情况，现对全县乡村生态旅游进行调研，统计了近9个月来每月到该县乡村生态旅游的外地游客人数 y （单位：万人），并绘制成右图所示的散点图，其中，月份代码1~9分别对应2020年7月至2021年3月.



(1) 用模型① $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ ，② $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}\sqrt{x}$ 分别拟合 y 与 x 的关系，根据散点图判断，哪个模型的拟合效果最好？（不必说理由）

(2) 根据(1)中选择的模型，求 y 关于 x 的回归方程（系数精确到0.01）；

(3) 据以往数据统计，每位外地游客可为该县带来100元左右的旅游收入，根据(2)中的回归模型，预测2021年10月，外地游客可为该县带来的生态旅游收入为多少万元？

参考数据：下表中 $t_i = \sqrt{x_i}$ ， $\bar{t} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 t_i$.

$\bar{y}$	$\bar{t}$	$\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^9 (t_i - \bar{t})^2$	$\sum_{i=1}^9 (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$	$\sum_{i=1}^9 (y_i - \bar{y})(t_i - \bar{t})$
23	2.15	60	3.58	84.5	21.31

参考公式：对于一组数据 $(t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots, (t_n, y_n)$ ，回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中的斜

率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}$.

18. (12分)

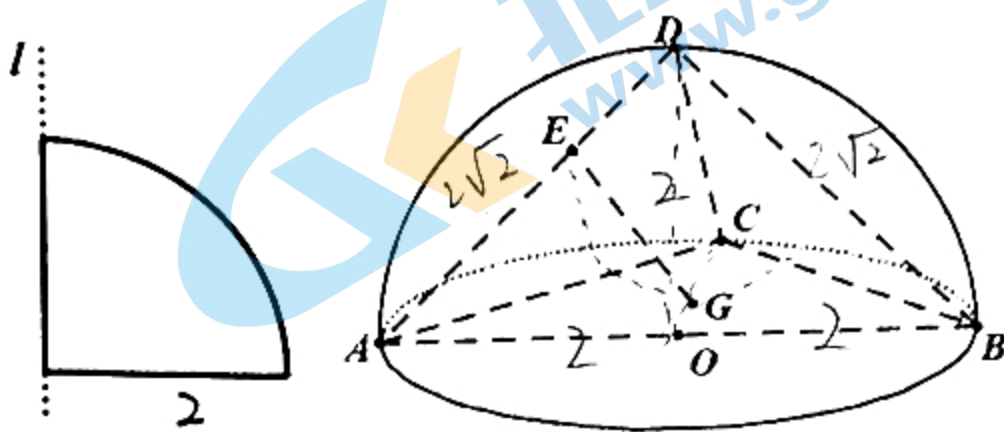
在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(2b+c)\cos A + a\cos C = 0$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $a = 2\sqrt{3}$, 求 $b+c$ 的最大值.

19. (12分)

如图, 由半径为2的四分之一圆面绕其半径所在直线 l 旋转一周, 形成的几何体底面圆的圆心为 O , D 是几何体侧面上不在 $\odot O$ 上的动点, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上不同于 A, B 的动点, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, $\overline{AE} = 2\overline{ED}$.



(1) 证明: $EG \parallel$ 平面 BCD ;

(2) 当三棱锥 $D-ABC$ 体积最大时, 求三棱锥 $G-CDE$ 的体积.

20. (12分)

已知点 $F(1,0)$, 直线 $l: x = -2$, P 为 y 轴右侧或 y 轴上动点, 且点 P 到 l 的距离比线段 PF 的长度大1, 记点 P 的轨迹为 E .

(1) 求曲线 E 的方程;

(2) 设点 $A(1, t)$ ($t > 0$) 在曲线 E 上, C, D 为曲线 E 上异于点 A 的两个动点, 且直线 AC, AD 的斜率互为相反数, 求证: 直线 CD 的斜率为定值.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - a\ln x - a\ln a$.

(1) 当 $a = e$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $x^2 + (y-2)^2 = 4$. 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 设 A 是 C_1 上的动点, 先将点 A 绕点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 得到点 B , 再保持极角不变, 极径变为原来的2倍得到点 C , 设点 C 的轨迹方程为曲线 C_2 .

(1) 求曲线 C_1, C_2 的极坐标方程;

(2) 设 M 是曲线 C_1, C_2 的公共点, P, Q 分别是射线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 与曲线 C_1, C_2 的公共点, 且 M, P, Q 都异于点 O , 求 $\triangle MPQ$ 的面积.

23. [选修4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |1-2x| + |x-2|$.

(1) 解不等式 $f(x) \leq 2x$;

(2) 若正实数 a, b 满足 $a+b=2$, 试比较 $f(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2})$ 与 $f(1)$ 的大小.

四川省大数据精准教学联盟 2018 级高三第三次统一监测

文科数学命题意图及参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 命题意图：本小题主要考查集合的并集、补集的概念及其运算等基础知识；考查运算求解能力。

答案 A. 因为 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ ，所以 $\partial_U(A \cup B) = \{4, 8\}$ 。

2. 命题意图：本小题主要考查复数的除法运算和复数的模的概念等基础知识；考查运算求解能力。

答案 C. 法 1: 由 $z = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i) \cdot (1+i)}{(1-i) \cdot (1+i)} = \frac{1+3i}{2}$ ，所以 $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 。

法 2: $|z| = \left| \frac{2+i}{1-i} \right| = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 。

3. 命题意图：本小题主要考查向量垂直的几何意义、充要条件等基础知识；考查逻辑推理能力，化归与转化等数学思想。

答案 C. 因为 $a \perp b$ ，所以 $a \cdot b = 0$ ，则 $(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 = a^2 + b^2$ ，所以“ $a \perp b$ ”是“ $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ”的充分条件；反之，由 $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ 有 $a \cdot b = 0$ ，所以非零向量 a, b 垂直，“ $a \perp b$ ”是“ $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ”的必要条件。

4. 命题意图：本小题主要考查统计图表等基础知识；考查统计思想和应用意识。

答案 C. 由于到甲、乙、丙社区参加志愿者活动的学生所占比例分别为 15%、20%、15%，且甲社区的志愿者学生人数为 15，则丙、丁社区志愿者学生人数分别为 20、15，所以，到戊社区参加志愿者活动的学生数为 $100 - 15 - 20 - 15 - 30 = 20$ 。

5. 答案 D. 因直线与圆相切，所以圆的半径等于点 $(1, -1)$ 到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离，

即 $R = d = \frac{|1 - (-1) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$ ，则所求圆的方程为 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 8$ 。

命题意图：本小题主要考查直线与圆相切的性质、圆的标准方程等基础知识；考查运算求解能力；考查化归与转化、数形结合等数学思想。

6. 命题意图：本小题主要考查等差数列的性质，通项公式和公差等基础知识；考查运算求解能力；考查化归与转化、方程等数学思想和应用意识。

答案 D. 由 $a_1 + a_9 = a_4 + a_6 = 22$ ， $a_1 \cdot a_9 = 57$ ，所以 a_1, a_9 是方程 $x^2 - 22x + 57 = 0$ 的两

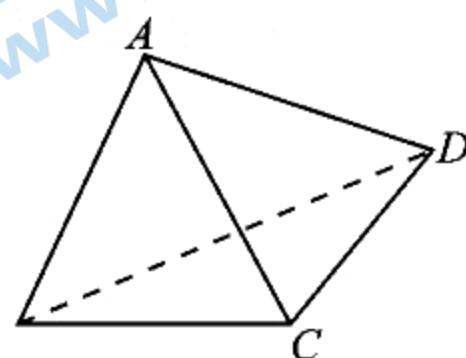
实数根，解得 $\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_9 = 19, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = 19, \\ a_9 = 3, \end{cases}$ 所以公差 $d = \frac{a_9 - a_1}{8} = 2$ 或 -2 。

7. 命题意图：本小题主要考查不等式、函数性质等基本知识；考查化归与转化等数学思想。

答案 D. 对于 A, 由 $a > 0 > b$ 知, $a^2 > b^2$ 不一定成立; 对于 B, 由 $ab - b^2 = b(a - b) < 0$, 知 $ab < b^2$; 对于 C, 取 $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$, 则 $\ln(a - b) = \ln \frac{1}{2} < 0$, C 也不一定成立; 由 $a > b$, 知 $2^{a-b} > 1$, D 项正确.

8. 命题意图: 本小题主要考查多面体三视图、直观图等基础知识; 考查空间想象、运算求解能力; 考查数形结合等数学思想.

答案 B. 该几何体的直观图为如图所示的三棱锥, 底面是等腰直角三角形, 高为 2, 则体积 $V = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times 2 \times 2) \times 2 = \frac{4}{3}$.



9. 命题意图: 本小题主要考查双曲线的定义、标准方程和几何性质等基础知识; 考查运算求解、推理论证等数学能力及创新意识; 考查数形结合、化归与转化等数学思想.

答案 D. 由题 $|AB| = c$, $|AF| = a + c$, $|BF| = \sqrt{b^2 + c^2}$, 因为 $\triangle ABF$ 为等腰三角形, 所以 $|AF| = |BF|$, 则 $a + c = \sqrt{b^2 + c^2}$, 化为 $c^2 - 2ac - 2a^2 = 0$, 即 $e^2 - 2e - 2 = 0$, 解得 $e = \sqrt{3} + 1$.

10. 命题意图: 本小题主要考查几何概型等基础知识; 考查运算求解等能力; 考查化归与转化等数学思想.

答案 C. 由题, $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, 则阴影部分面积为 $\frac{\pi}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) = \frac{\pi}{4}(1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2) = 10\pi$, 扇形 OAB 的面积为 $\frac{8^2\pi}{4} = 16\pi$,

所以在该扇形内任取一点, 则该点在图中阴影部分的概率为 $\frac{10\pi}{16\pi} = \frac{5}{8}$.

11. 命题意图: 本小题主要考查三角函数图象及其性质、命题判断等基础知识; 考查运算求解能力、逻辑推理能力; 考查化归与转化和数形结合等数学思想.

答案 D. 因为 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$, 结合图象易知 A, B, C 结论不正确; 对于选项 D, 不妨看第一象限的交点, 由 $2 \sin(x - \frac{\pi}{3}) = 1 (x > 0)$, 得 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 或 $x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$, 依次得到交点横坐标 $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{7\pi}{6}$, $x_3 = \frac{5\pi}{2}$, $x_4 = \frac{19\pi}{6}$, ...,

所以交点间的最小距离等于 $x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{3}$.

12. 命题意图: 本小题主要考查函数的性质、不等式等基础知识; 考查抽象概括、运算求解等数学能力; 考查化归与转化等数学思想.

答案 C. 由题 $x_1 < 0 < x_2$ 且 $f(x_1) = g(x_2)$, $x_2 - 2x_1 > 0$. 有 $-2x_1 + 2 = \frac{x_2}{\ln x_2} + x_2$, 则 $x_2 - 2x_1 = \frac{x_2}{\ln x_2} + 2x_2 - 2$, 令 $u(x) = \frac{x}{\ln x} + 2x - 2 (x > 0 \text{ 且 } x \neq 1, u(x) > 0)$. (1) 当 $0 < x < 1$ 时, 知 $u(x) < 0$, 不满足条件. (2) 当 $x > 1$ 时, 知 $u(x) > 0$, 由 $u'(x) = \frac{2 \ln^2 x + \ln x - 1}{\ln^2 x} = \frac{(2 \ln x - 1)(\ln x + 1)}{\ln^2 x}$, 令 $u'(x) = 0$, 则 $x_1 = \sqrt{e}$, $x_2 = \frac{1}{e}$ (舍去), 若 $1 < x < \sqrt{e}$, 则 $u'(x) < 0$; 若 $x > \sqrt{e}$, 则 $u'(x) > 0$, 则 $x = \sqrt{e}$ 时取得极小值 $u(\sqrt{e}) = 4\sqrt{e} - 2$,

也为最小值, 则 $u(x) \geq u(\sqrt{e})$, 即 $x_2 - 2x_1 \geq 4\sqrt{e} - 2$, 所以 $x_2 - 2x_1$ 的最小值为 $4\sqrt{e} - 2$.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 命题意图: 本小题主要考查平面向量的模, 两个向量的差的运算等基础知识; 考查运算求解能力及应用意识。

答案 $\sqrt{37}$. 由题意得: $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |2\mathbf{a}|^2 - 2|2\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \frac{2\pi}{3} + |\mathbf{b}|^2 = 16 + 12 + 9 = 37$, 所以 $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{37}$.

14. 命题意图: 本小题主要考查等比数列定义、前 n 项和公式、递推数列等基础知识; 考查运算求解能力, 化归与转化等数学思想。

答案 54. 方法 1: 由 $a_n = 2S_{n-1}$ ($n \geq 2$) 有 $S_n = 3S_{n-1}$ ($n \geq 2$), 所以 $\{S_n\}$ 是以 2 为首项, 3 为公比的等比数列, 所以 $S_4 = S_1 q^3 = 2 \times 3^3 = 54$.

方法 2: 由已知, $a_2 = 2S_1 = 4$, $a_3 = 2S_2 = 2(2+4) = 12$, $a_4 = 2S_3 = 2(2+4+12) = 36$, 所以 $S_4 = 2+4+12+36 = 54$.

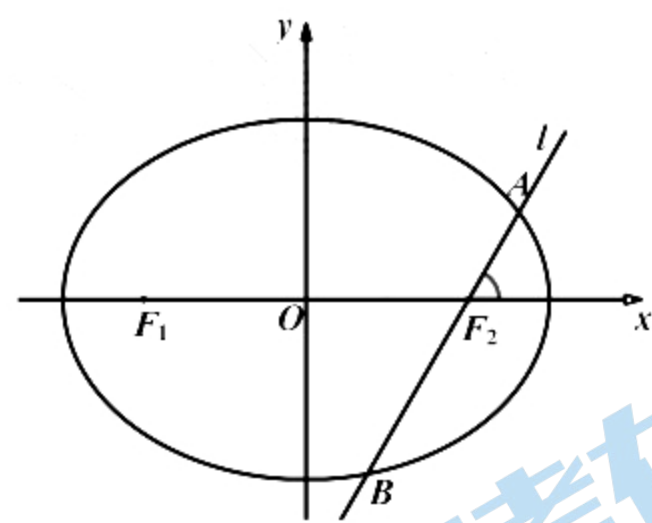
15. 命题意图: 本小题主要考查椭圆的定义、标准方程、直线的方程、直线与椭圆位置关系、平面向量的数乘运算等基础知识; 考查运算求解、推理论证等数学能力及创新意识; 考查数形结合、化归与转化等数学思想。

答案 $\frac{1}{3}$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由题意知直线 l 的方程

为 $y = x - 1$. 由 $\overrightarrow{AF_2} = \lambda \overrightarrow{F_2B}$, 得 $(1 - x_1, -y_1) = \lambda(x_2 - 1, y_2)$, 则有 $-y_1 = \lambda y_2$①

由 $\begin{cases} y = x - 1, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$ 消去 x , 得 $3y^2 + 2y - 1 = 0$.

所以 $y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = -1$, 代入①得 $\lambda = \frac{1}{3}$.



16. 命题意图: 本小题主要考查直线与平面所成的角、直线与平面平行判定定理、直线与平面垂直判定定理、性质定理等基础知识; 考查逻辑推理、空间想象能力; 考查化归转化等数学思想。

答案①②④. 设 AC 与 BD 相交于点 O . 由已知, $AC \perp BD$, $AC \perp ED$, 所以 $AC \perp PD$, ①真; 易知, 直线 PD 与平面所成的角等于 $\angle BDP$, 最小为 $\angle BDF$ (其正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$),

最大为 $\frac{\pi}{2}$ (即 $\angle BDE$), ②真; 若 $DP \perp$ 平面 ACF , 则 $DP \perp FO$, 当 P 在线段 EF 上运动时, 在题设条件下 $DP \perp FO$ 不成立, ③假; 当点 P 为 EF 的中点时, $DP \parallel OF$, ④真.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分)

命题意图: 本小题主要考查回归方程、统计案例等基本知识; 考查统计基本思想以及抽象概括、数据处理等能力和应用意识。

(1) 模型② $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}\sqrt{x}$ 的拟合效果最好. 2 分

(2) 令 $t = \sqrt{x}$, 知 y 与 x 可用线性方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 拟合, 则

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^9 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^9 (t_i - \bar{t})^2} = \frac{21.31}{3.58} \approx 5.953, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} = 23 - 5.953 \times 2.15 \approx 10.20, \dots 6 \text{ 分}$$

所以, y 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{y} = 10.20 + 5.95t$,

所以 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y} = 10.20 + 5.95\sqrt{x}$. $\dots 8 \text{ 分}$

(3) 2021 年 10 月, 即 $x=16$ 时, $\hat{y} = 10.20 + 5.95 \times \sqrt{16} = 34$ (万人),

此时, 外地游客可为该县带来的生态旅游收入为 3400 万元. $\dots 12 \text{ 分}$

18. (12 分)

命题意图: 本小题主要考查正余弦定理及其应用、特殊角的三角函数值、两角和差的正余弦公式应用等基础知识; 考查运算求解能力、推理论证能力; 化归与转化数学思想。

(1) 由 $(2b+c)\cos A + a\cos C = 0$, 根据正弦定理, 有

$$(2\sin B + \sin C)\cos A + \sin A\cos C = 0. \dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } 2\sin B\cos A + \sin C\cos A + \sin A\cos C = 0,$$

$$\text{所以 } 2\sin B\cos A + \sin(C+A) = 0,$$

$$\text{即 } 2\sin B\cos A + \sin B = 0. \dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } 0 < B < \pi, \text{ 所以 } \sin B \neq 0,$$

$$\text{所以 } \cos A = -\frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A = \frac{2\pi}{3}. \dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } A = \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } B+C = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{则 } C = \frac{\pi}{3} - B (0 < B < \frac{\pi}{3}),$$

$$\text{由正弦定理: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ 得 } \frac{2\sqrt{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin(\frac{\pi}{3}-B)},$$

$$\text{所以 } b = 4\sin B, \quad c = 4\sin(\frac{\pi}{3}-B) = 2\sqrt{3}\cos B - 2\sin B. \dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } b+c = 4\sin B + 2\sqrt{3}\cos B - 2\sin B$$

$$= 2\sin B + 2\sqrt{3}\cos B$$

$$= 4(\frac{1}{2}\sin B + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B)$$

$$= 4\sin(B + \frac{\pi}{3}).$$

$$\text{因为 } 0 < B < \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin(B + \frac{\pi}{3}) \leq 1,$$

所以当 $B=C=\frac{\pi}{6}$ 时, $b+c$ 的最大值为 4.12 分

19. (12 分)

命题意图: 本小题主要考查旋转体、直线与平面平行的判定、三棱锥体积、三角形重心性质、球体等基础知识; 考查逻辑推理、运算求解、空间想象等能力及创新意识; 考查化归转化、数形结合等数学思想。

(1) 连接 AG 并延长交 BC 于 F 点, 连接 DF ,1 分
因为 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,

所以 $AG=\frac{2}{3}AF$2 分

因为 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{ED}$,

所以 $AE=\frac{2}{3}AD$,3 分

则 $\frac{AE}{AD}=\frac{AG}{AF}$, 所以 $EG\parallel DF$4 分

又 $EG\not\subset$ 面 BCD , $DF\subset$ 面 BCD ,

所以 $EG\parallel$ 面 BCD6 分

(2) 当三棱锥 $D-ABC$ 体积最大时,
平面 $ABD\perp$ 平面 ABC , 且 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形,

则 $AC=BC=AD=BD=2\sqrt{2}$8 分

所以 $V_{G-CDE}=\frac{2}{3}V_{O-CDE}=\frac{2}{3}(V_{O-ACD}-V_{O-ACE})=\frac{2}{3}(V_{D-AOC}-V_{E-AOC})$
 $=\frac{2}{3}(\frac{1}{3}S_{\triangle AOC}\cdot DO-\frac{1}{3}S_{\triangle AOC}\cdot\frac{2}{3}DO)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}S_{\triangle AOC}\cdot DO=\frac{8}{27}$12 分

20. (12 分)

命题意图: 本小题主要考查抛物线的定义、直线的斜率、直线与抛物线的位置关系等基础知识; 考查逻辑推理、运算求解等数学能力; 考查数形结合、化归与转化、分类与整合等数学思想。

(1) 由已知, 线段 PF 的长度等于 P 到 $l_0: x=-1$ 的距离,2 分
则点 P 的轨迹是以 $F(1,0)$ 为焦点, $l_0: x=-1$ 为准线的抛物线,

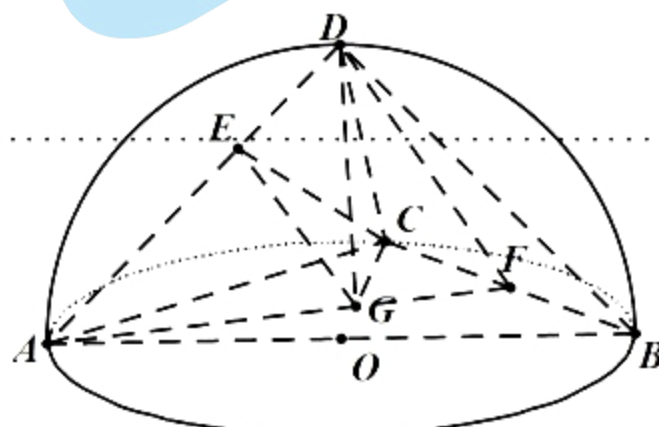
所以 E 的方程为 $y^2=4x$4 分

(2) 将 $x=1$ 代入 $y^2=4x$ 得 $t=2$.

易知直线 CD 斜率存在, 设为 k , 知 $k\neq 0$, 直线 CD 方程为 $y=kx+b$6 分

由 $\begin{cases} y^2=4x, \\ y=kx+b \end{cases}$ 得 $k^2x^2+(2bk-4)x+b^2=0$.

则 $x_C+x_D=\frac{4-2bk}{k^2}$, $x_Cx_D=\frac{b^2}{k^2}$ ①8 分



易知, $k_{AD} = \frac{y_D - 2}{x_D - 1} = \frac{kx_D + b - 2}{x_D - 1}$,

$k_{AC} = \frac{y_C - 2}{x_C - 1} = \frac{kx_C + b - 2}{x_C - 1}$,

因为直线 AC , AD 的斜率互为相反数,

所以 $k_{AC} + k_{AD} = \frac{kx_C + b - 2}{x_C - 1} + \frac{kx_D + b - 2}{x_D - 1} = \frac{2kx_Cx_D + (b - 2 - k)(x_C + x_D) - 2(b - 2)}{(x_C - 1)(x_D - 1)} = 0$,

变形可得 $2kx_Cx_D + (b - 2 - k)(x_C + x_D) - 2(b - 2) = 0$ ②..... 10 分

联立①②得 $k^2 + (b - 1)k + b - 2 = 0$,

所以 $k = -1$ 或 $k = 2 - b$.

若 $k = 2 - b$, 则 CD 的方程为 $y = kx + 2 - k = k(x - 1) + 2$, 恒过点 $A(1, 2)$, 不合题意;

所以 $k = -1$, 即直线 CD 的斜率为定值 -1 12 分

21. (12 分)

命题意图: 本小题主要考查导数的几何意义、导数及其应用、函数单调性、函数极值与最值等基础知识; 考查推理论证、运算求解等数学能力和创新意识; 考查分类与整合、函数与方程及数形结合等数学思想.

(1) $a = e$ 时, $f(x) = e^x - e \ln x - e$, 其中 $x > 0$, 则 $f'(x) = e^x - \frac{e}{x}$, 1 分

可知 $f'(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 的增函数, 且 $f'(1) = 0$, 2 分

当 $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > 1$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 递增区间为 $(1, +\infty)$ 4 分

(2) 由题知 $x > 0$, $a > 0$, $f'(x) = e^x - \frac{a}{x}$,

可知 $f'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

且当 $x \rightarrow 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f'(x) > 0$,

(此处也可利用函数 $y = e^x$ 与 $y = \frac{a}{x}$ 图象在第一象限有交点来描述)

所以, 存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} = \frac{a}{x_0}$, 6 分

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

所以, $f(x)_{\min} = f(x_0) = e^{x_0} - a \ln x_0 - a \ln a = \frac{a}{x_0} - a \ln x_0 - a \ln a \geq 0$, 8 分

即 $\frac{1}{x_0} - \ln x_0 - \ln a \geq 0$,

由 $e^{x_0} = \frac{a}{x_0}$, 得 $a = x_0 e^{x_0}$, 即 $\ln a = \ln x_0 + x_0$,

所以 $\frac{1}{x_0} - \ln x_0 - \ln x_0 - x_0 \geq 0$, 即 $2 \ln x_0 + x_0 - \frac{1}{x_0} \leq 0$,

由于 $u(x) = 2 \ln x + x - \frac{1}{x}$ 为 $(0, +\infty)$ 的单调递增函数, 且 $u(1) = 0$,

则有 $0 < x_0 \leq 1$, 10 分

因为 $v(x) = xe^x$ 为 $(0,1]$ 上的增函数, 则当 $x \in (0,1]$ 时, $v(x) \in (0,e]$,

所以, a 的取值范围为 $(0,e]$ 12 分

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

命题意图: 本小题主要考查曲线的直角坐标方程与极坐标方程的互化、极角与极径的几何意义等基础知识; 考查逻辑推理、运算求解等数学能力; 考查化归与转化、数形结合等数学思想。

(1) 将 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 代入 $x^2 + (y-2)^2 = 4$, 化简得 $\rho = 4 \sin \theta$ 2 分

设点 C 的极坐标为 (ρ, θ) , 依题意可知 $B(\frac{\rho}{2}, \theta), A(\frac{\rho}{2}, \theta + \frac{\pi}{3})$ 4 分

因为点 A 在曲线 C_1 上, 带入其方程可得 $\frac{\rho}{2} = 4 \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$,

即 $\rho = 8 \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$ 5 分

故曲线 C_1, C_2 的极坐标方程分别为 $\rho = 4 \sin \theta, \rho = 8 \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$.

(2) 联立 $\begin{cases} \rho = 4 \sin \theta, \\ \rho = 8 \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) \end{cases}$ 可得 $M(4, \frac{\pi}{2})$; 6 分

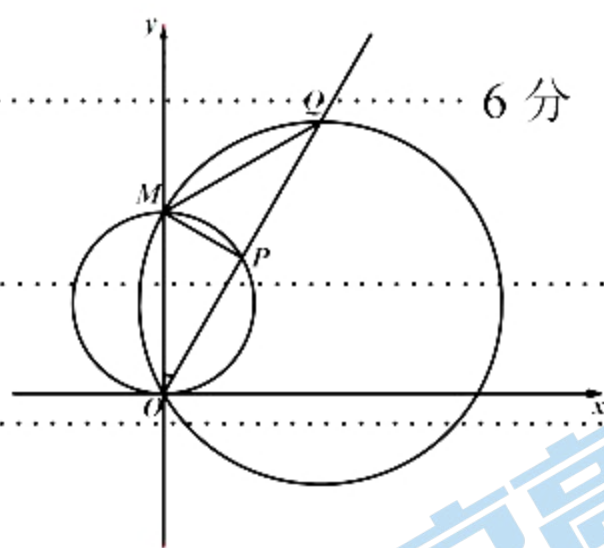
将 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 代入 $\rho = 4 \sin \theta$ 中, 得 $P(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3})$; 7 分

将 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 代入 $\rho = 8 \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$ 中, 得 $Q(4\sqrt{3}, \frac{\pi}{3})$ 8 分

显然, $\angle MOP = \angle MOQ = \frac{\pi}{6}$,

故 $S_{\triangle MPQ} = S_{\triangle OMQ} - S_{\triangle OMP}$

$= \frac{1}{2} |OM| |OQ| \sin \angle MOQ - \frac{1}{2} |OM| |OP| \sin \angle MOP = 2\sqrt{3}$ 10 分



23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

命题意图: 本小题主要考查含绝对值的不等式、基本不等式、不等式证明方法等基础知识; 考查运算求解、推理论证等数学能力; 考查分类与整合、函数与方程、化归与转化等数学思想。

(1) 由题 $f(x) = |2x-1| + |x-2|$

当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = -2x+1-x+2 = -3x+3 \leq 2x$, 得 $x \geq \frac{3}{5}$, 此时不成立; 1 分

当 $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = 2x-1-x+2 = x+1 \leq 2x$, 得 $x \geq 1$, 此时取 $1 \leq x \leq 2$;

..... 2 分

当 $x > 2$ 时, $f(x) = 2x-1+x-2 = 3x-3 \leq 2x$, 得 $x \leq 3$, 此时取 $2 < x \leq 3$ 3 分

综上, 不等式的解集为 $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$ 4 分

$$(2) \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - 1 = \frac{2+a^2+b^2}{(1+a^2)(1+b^2)} - 1 = \frac{2+a^2+b^2-(1+a^2)(1+b^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}$$

$$= \frac{1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

因为正实数 a, b 满足 $2 = a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 即有 $ab \leq 1$, 则 $\frac{1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)} \geq 0$,

所以 $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq 1$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

由 (1) 已知函数 $f(x)$ 为 $[1, +\infty)$ 的增函数,

所以 $f(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}) \geq f(1)$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$