

2018 北京理工大学附中高二（下）期末

数 学（理科）

第 I 卷（共 60 分）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 从甲、乙、丙、丁四位学生中，选出两人分别担任正、副班长，共有选法（ ）

- A. 4 种 B. 12 种 C. 4^2 种 D. 2^4 种

2. 在 $(1+x)^7$ 的展开式中， x^2 的系数是（ ）

- A. 21 B. 28 C. 35 D. 42

3. 甲、乙两人独立地解同一个问题，甲解决这个问题的概率是 p_1 ，乙解决这个问题的概率是 p_2 ，那么恰好有一人解决这个问题的概率是（ ）

- A. $p_1 p_2$ B. $1 - p_1 p_2$
C. $p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)$ D. $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$

4. 下列极坐标方程表示圆的是（ ）

- A. $\rho = 1$ B. $\theta = \frac{\pi}{2}$ C. $\rho \sin \theta = 1$ D. $\rho(\sin \theta + \cos \theta) = 1$

5. 两位同学去某大学参加自主招生考试，根据如图中学校负责人与他们两人的对话，可推断出参加考试的人数为（ ）



- A. 19 B. 20 C. 21 D. 22

6. 设导弹发射的事故率为 0.01，若发射 10 次，其出事故的次数为 X ，则下列结论正确的是（ ）

- A. $P(X = k) = 0.01^k \cdot 0.99^{10-k}$ B. $P(X = k) = C_{10}^k 0.99^k \cdot 0.01^{10-k}$
C. $E(X) = 0.1$ D. $D(X) = 0.1$

7. 设 $0 < p < 1$ ，随机变量 ξ 的分布列是（ ）

ξ	0	1	2
P	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$

则当 p 在 $(0,1)$ 内增大时, 下列结论正确的是 ()

- A. $D(\xi)$ 减小
B. $D(\xi)$ 增大
C. $D(\xi)$ 先减小后增大
D. $D(\xi)$ 先增大后减小

8. 某学校运动会的立定跳远和 30 秒跳绳两个单项比赛分成预赛和决赛两个阶段. 下表为 10 名学生的预赛成绩, 其中有三个数据模糊.

学生序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
立定跳远 (单位: 米)	1.96	1.92	1.82	1.80	1.78	1.76	1.74	1.72	1.68	1.60
30 秒跳绳 (单位: 次)	63	a	75	60	63	72	70	$a-1$	b	65

在这 10 名学生中, 进入立定跳远决赛的有 8 人, 同时进入立定跳远决赛和 30 秒跳绳决赛的有 6 人, 则下列判断一定正确的是 ()

- A. 2 号学生进入 30 秒跳绳决赛
B. 5 号学生进入 30 秒跳绳决赛
C. 8 号学生进入 30 秒跳绳决赛
D. 9 号学生进入 30 秒跳绳决赛

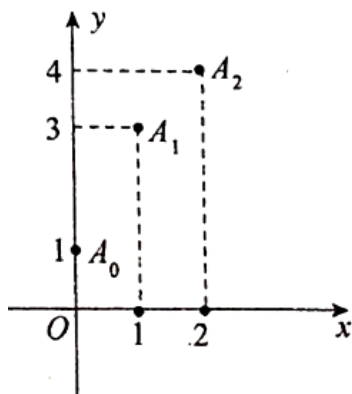
二、填空题 (共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

9. 计算 $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$ 的结果为 _____. (用数字作答)

10. 直线 $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \end{cases}$ (t 为参数) 与曲线 $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数) 的交点个数为 _____.

11. 在极坐标系中, A 为曲线 $\rho = 2 \cos \theta$ 上的点, B 为曲线 $\rho \cos \theta = 4$ 上的点, 则线段 AB 长度的最小值是 _____.

12. 设 $a \neq 0$, n 是大于 1 的自然数, $(1 + \frac{x}{a})^n$ 的展开式为 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, 对于 $i = 0, 1, 2$, 点 $A_i(i, a_i)$ 的位置如图所示, 则 $a =$ _____.



13. 设集合 $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$, 那么集合 A 中满足条件

“ $1 \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| \leq 3$ ” 的元素的个数为_____.

14. 甲罐中有 5 个红球, 2 个白球和 3 个黑球, 乙罐中有 4 个红球, 3 个白球和 3 个黑球. 先从甲罐中随机取出一球放入乙罐, 分别以 A_1 , A_2 和 A_3 表示由甲罐取出的球是红球, 白球和黑球的事件; 再从乙罐中随机取出一球, 以 B 表示由乙罐取出的球是红球的事件, 则下列结论中正确的是_____ (写出所有正确结论的编号).

① $P(B) = \frac{2}{5}$;

② $P(B|A_1) = \frac{5}{11}$;

③ 事件 B 与事件 A_1 相互独立;

④ A_1 , A_2 , A_3 是两两互斥的事件;

⑤ $P(B)$ 的值不能确定, 因为它与 A_1 , A_2 , A_3 中哪一个发生有关

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或推证过程.)

15. 一个袋子里面装有 6 个黄球和 4 个白球, 一次从中摸出 3 个球.

(1) 求摸出的球中恰有 1 个黄球的概率;

(2) 记摸出的球中白球的个数为 X , 求 X 的分布列;

(3) 当已知摸出 3 个球同色时, 求此色为白色的概率.

16. 一款击鼓小游戏的规则如下: 每盘游戏都需击鼓三次, 每次击鼓要么出现一次音乐, 要么不出现音乐; 每盘游戏击鼓三次后, 出现一次音乐获得 10 分, 出现两次音乐获得 20 分, 出现三次音乐获得 100 分, 没有出现音乐则扣除 200 分 (即获得 -200 分). 设每次击鼓出现音乐的概率为 $\frac{1}{2}$, 且各次击鼓出现音乐相互独立.

(1) 设每盘游戏获得的分数为 X , 求 X 的分布列;

(2) 玩三盘游戏, 至少有一盘出现音乐的概率是多少?

(3) 玩过这款游戏的许多人都发现, 若干盘游戏后, 与最初的分数相比, 分数没有增加反而减少了. 请运用概率统计的相关知识分析分数减少的原因.

17. 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{x^2}{2} - (a+1)x$.

(1) 当 $a > 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a = -1$ 时, 证明 $f(x) \geq \frac{1}{2}$.

18. 已知函数 $f(x) = xe^x$, $g(x) = a(e^x - 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 当 $a > 1$ 时, 求关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 的实根的个数.

19. 某公司准备将 100 万元资金投入代理销售业务, 现有 A , B 两个项目可供选择:

(1) 投资 A 项目一年后获得的利润 X_1 (万元) 的概率分布列如下表所示:

X_1	11	12	17
P	a	0.4	b

且 X_1 的数学期望 $E(X_1)=12$;

(2) 投资 B 项目一年后获得的利润 X_2 (万元) 与 B 项目产品价格的调整有关, B 项目产品价格根据销售情况在 4 月和 8 月决定是否需要进行调整, 两次调整相互独立且在 4 月和 8 月进行价格调整的概率分别为 $p(0 < p < 1)$ 和 $1 - p$.

经专家测算评估: B 项目产品价格一年内调整次数 X (次) 与 X_2 的关系如下表所示:

X (次)	0	1	2
X_2 (万元)	4.12	11.76	20.40

- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 求 X_2 的分布列;
- (3) 若 $E(X_1) < E(X_2)$, 则选择投资 B 项目, 求此时 p 的取值范围.

20. 品酒师需定期接受酒味鉴别功能测试, 一种通常采用的测试方法如下: 拿出 n 瓶外观相同但品质不同的酒让其品尝, 要求其按品质优劣为它们排序; 经过一段时间, 等其记忆淡忘之后, 再让其品尝这 n 瓶酒, 并重新按品质优劣为它们排序, 这称为一轮测试. 根据一轮测试中的两次排序的偏离程度的高低为其评分.

现设 $n = 4$, 分别以 a_1, a_2, a_3, a_4 表示第一次排序时被排为 1, 2, 3, 4 的四种酒在第二次排序时的序号, 并令 $X = |1 - a_1| + |2 - a_2| + |3 - a_3| + |4 - a_4|$, 则 X 是对两次排序的偏离程度的一种描述.

- (1) 写出 X 的可能值集合;
- (2) 假设 a_1, a_2, a_3, a_4 等可能地为 1, 2, 3, 4 的各种排列, 求 X 的分布列;
- (3) 某品酒师在相继进行的三轮测试中, 都有 $X \leq 2$.
 - (i) 试按 (2) 中的结果, 计算出现这种现象的概率 (假定各轮测试相互独立);
 - (ii) 你认为该品酒师的酒味鉴别功能如何? 说明理由.