

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回，试卷自行保存。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ ，集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | (x-1)(x-3) \leq 0\}$ ， $B = \{2, 3\}$ ，则 $C_U(A \cup B) =$

- (A) $\{3\}$ (B) $\{4\}$ (C) $\{3, 4\}$ (D) $\{1, 3, 4\}$

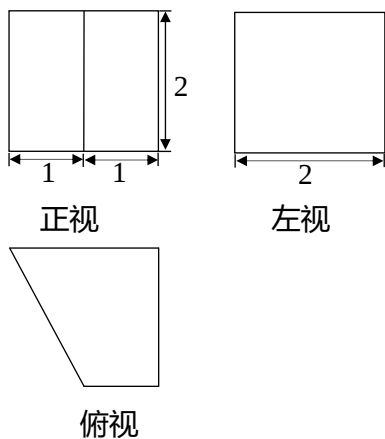
(2) 若复数 $z = (x^2 + x - 2) + (x - 1)i$ (i 为虚数单位) 为纯虚数，则实数 x 的值为

- (A) 1 (B) 2 (C) -2 (D) 1 或 -2

(3) 在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 6$ ， $A = \frac{\pi}{3}$ ， $\sin B = 2\sin C$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为

- (A) $6\sqrt{3}$ (B) 6 (C) $9\sqrt{3}$ (D) $4\sqrt{2}$

(4) 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积是



- (A) 6 (B) $10 + 2\sqrt{3}$ (C) $10 + 2\sqrt{5}$ (D) $16 + 2\sqrt{5}$

(5) 某公司购买一批机器投入生产，若每台机器生产的产品可获得的总利润 s (万元) 与机器运转时间 t (年数， $t \in \mathbb{N}^*$) 的关系为 $s = -t^2 + 23t - 64$ 。要使年平均利润最大，则每台机器运转的年数 t 为

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

(6) 已知角 α 的终边经过点 $(3, 4)$ ，把角 α 的终边绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到角 β 的终边，则 $\tan \beta$ 等于

(A) $-\frac{4}{3}$

(B) $\frac{4}{3}$

(C) $-\frac{3}{4}$

(D) $\frac{3}{4}$

- (7) 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的两个焦点, O 为坐标原点, 点 P 在双曲线 C 上, 且 $|OP| = |OF_1|$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为

(A) $\frac{5}{2}$

(B) 2

(C) $\frac{3}{2}$

(D) 1

- (8) 20 世纪 30 年代, 里克特制定了一种表明地震能量大小的尺度, 就是使用地震仪衡量地震能量的等级, 地震能量越大, 地震仪记录的地震曲线的振幅就越大, 这就是我们常说的里氏震级 M , 其计算公式为

$M = \lg A - \lg A_0$, 其中 A 是被测地震的最大振幅, A_0 是标准地震的振幅. 2008 年 5 月 12 日, 我国四川汶川发生了地震, 速报震级为里氏 7.8 级, 修订后的震级为里氏 8.0 级, 则修订后的震级与速报震级的最大振幅之比为

(A) $10^{-0.2}$

(B) $10^{0.2}$

(C) $\lg \frac{40}{39}$

(D) $\frac{40}{39}$

- (9) “ $a \leq 0$ ”是“函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ -2^x + a, & x \leq 0 \end{cases}$ 有且只有一个零点”的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

- (10) 为了庆祝中国共产党成立 100 周年, 某校举行了以“重温时代经典, 唱响回声嘹亮”为主题的“红歌”歌咏比赛. 该校高三年级有 1, 2, 3, 4 共四个班参加了比赛, 其中有两个班获奖. 比赛结果揭晓之前, 甲同学说: “两个获奖班级在 2 班、3 班、4 班中”, 乙同学说: “2 班没有获奖, 3 班获奖了”, 丙同学说: “1 班、4 班中有且只有一个班获奖”, 丁同学说: “乙说得对”. 已知这四人中有且只有两人的说法是正确的, 则这两人是 ()

(A) 乙, 丁

(B) 甲, 丙

(C) 甲, 丁

(D) 乙, 丙

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、 填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

- (11) 函数 $y = \sin 2x \cos 2x$ 的最小正周期为__.

- (12) 若三个点 $M(3, 2\sqrt{6})$, $N(2, 2\sqrt{3})$, $Q(3, -2\sqrt{6})$ 中恰有两个点在抛物线 $y^2 = 2px$ 上, 则该抛物线的方程为__.

- (13) 已知 $(1+2x)^n$ 的展开式中, 二项式系数之和为 32, 则其各项系数之和为__.

- (14) 已知单位向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 60° , $\vec{a} - k\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 垂直, 则 $k =$ __.

(15) 设 $m \in \mathbf{R}$ ，过定点 M 的直线 $l_1: x + my - 3m - 1 = 0$ 与过定点 N 的直线 $l_2: mx - y - 3m + 1 = 0$ 相交于点 P ，

线段 AB 是圆 $C: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$ 的一条动弦，且 $|AB| = 2\sqrt{2}$ ，给出下列四个结论：

① l_1 一定垂直 l_2

② $|PM| + |PN|$ 的最大值为 4

③ 点 P 的轨迹方程为 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$

④ $|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$

其中所有正确结论的序号是___.

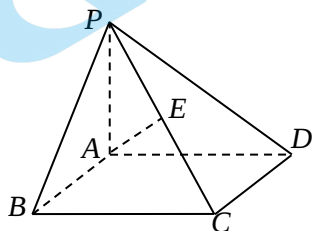
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 14 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，点 E 为 PC 的中点， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB = 2$ ， $AD = 2\sqrt{2}$ ， $PA = 2$ 。

(I) 求证: $CD \perp PD$;

(II) 求异面直线 BC 与 AE 所成角的大小。



(17) (本小题 14 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是一个公比为 $q (q > 0, q \neq 1)$ 的等比数列， $a_1 = 1$ ， S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，再从条件

①、条件②、条件③中选择一个作为已知，解答下列问题：

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 令 $b_n = 2\log_2 a_n - 7$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 的最小值。

条件①: $4a_2, 3a_3, 2a_4$ 成等差数列；

条件②: $S_n = 2a_n - 1$ ；

条件③: $S_3 = 7$ 。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

(18) (本小题 14 分)

为了提高中小学生的身体素质,某地区开展了中小学生跳绳比赛系列活动.活动结束后,利用简单随机抽样的方法,抽取了部分学生的成绩,按照不同年龄段分组记录如下表:

组别	男生		女生	
	合格	不合格	合格	不合格
第一组	90	10	80	20
第二组	88	12	72	28
第三组	60	40	58	42
第四组	80	20	62	38
第五组	82	18	78	22
合计	400	100	350	150

假设每个中小学生跳绳成绩是否合格相互独立.

- (I) 从样本中的中小学生随机抽取1人, 求该同学跳绳成绩合格的概率;
- (II) 从该地区众多中小学的男生、女生中各随机抽取1人, 记这2人中恰有 X 人跳绳成绩合格, 求 X 的分布列与数学期望;
- (III) 假设该地区中小学生跳绳成绩合格的概率与表格中该地区中小学生跳绳成绩合格的频率相等, 用“ $\xi_k = 1$ ”表示第 k 组的同学跳绳成绩合格, “ $\xi_k = 0$ ”表示第 k 组的同学跳绳成绩不合格($k=1,2,3,4,5$), 试确定方差 $D\xi_1, D\xi_2, D\xi_3, D\xi_4, D\xi_5$ 中哪个最大? 哪个最小? (只需写出结论).

(19) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = e^x \cos x$, $g(x) = ax$.

- (I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (II) 设 $F(x) = g(x) - f(x)$, 当 $a \geq 0$ 时, 求函数 $F(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值;
- (III) 当 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 时, 试写出一个实数 a 的值, 使得 $y = f(x)$ 的图像在 $y = g(x)$ 的图像下方. (不需要说明理由)

(20) (本小题 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, O 为坐标原点, F 是椭圆 C 的右焦点, A 为椭圆 C

上一点, 且 $AF \perp x$ 轴, $|AF| = \frac{3}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 过椭圆 C 上一点 $P(x_0, y_0) (y_0 \neq 0)$ 的直线 $l: \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ 与直线 AF 相交于点 M , 与直线 $x = 4$ 相交

于点 N . 证明: $\frac{|MF|}{|NF|}$ 为定值.

(21) (本小题 14 分)

已知数集 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} (1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$. 如果对任意的 $i, j (1 \leq i \leq j \leq n \text{ 且 } i, j, n \in \mathbf{N}^*)$, $a_i a_j$ 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A , 则称数集 A 具有性质 P .

(I) 分别判断数集 $\{2, 3, 6\}$, $\{1, 3, 4, 12\}$ 是否具有性质 P , 并说明理由;

(II) 设数集 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} (1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$ 具有性质 P .

① 若 $a_k \in \mathbf{N}^* (k = 1, 2, 3, \dots)$, 证明: 对任意 $1 \leq i \leq n (i, n \in \mathbf{N}^*)$ 都有 a_i 是 a_n 的因数;

② 证明: $a_n^n = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 \cdots a_n^2$.

2021 北京房山高三二模数学

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	(B)	(C)	(A)	(D)	(D)	(C)	(D)	(B)	(A)	(B)

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) $\frac{\pi}{2}$ (12) $y^2 = 8x$ (13) 243 (14) $\frac{1}{2}$ (15) ①②

注：第 (15) 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

解：(I) 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$,

且 $CD \subset$ 底面 $ABCD$,

所以 $PA \perp CD$ 1 分

因为底面 $ABCD$ 为矩形,

所以 $AD \perp CD$ 2 分

又因为 $AD, PA \subset$ 平面 PAD ,3 分

$PA \cap AD = A$,4 分

所以 $CD \perp$ 平面 PAD 5 分

因为 $PD \subset$ 平面 PAD ,

所以 $CD \perp PD$ 6 分

(II) 解法 1:

因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$,

$AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$

所以 $PA \perp AB$, $PA \perp AD$.

因为平面 $ABCD$ 为矩形,

所以 $AB \perp AD$.

.....7 分

分别以 AB, AD, AP 为 x 轴、 y 轴、 z 轴,

建立如图所示的空间直角坐标系，则

$$B(2,0,0), C(2,2\sqrt{2},0), E(1,\sqrt{2},1), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\overrightarrow{AE} = (1, \sqrt{2}, 1), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\overrightarrow{BC} = (0, 2\sqrt{2}, 0) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AE}| \times |\overrightarrow{BC}|} = \frac{2 \times 2}{2 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

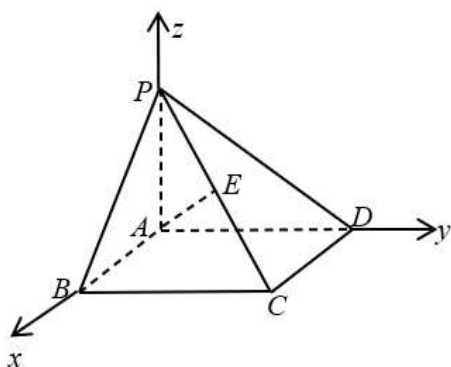
设异面直线 BC 与 AE 所成的角为 θ ，则

$$\cos \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC} \rangle \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{所以异面直线 } BC \text{ 与 } AE \text{ 所成的角的大小是 } \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$



注明：若这样写

$$\overrightarrow{AE} = (1, \sqrt{2}, 1), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\overrightarrow{BC} = (0, 2\sqrt{2}, 0) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

设异面直线 BC 与 AE 所成的角为 θ ，则

$$\cos \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AE}| \times |\overrightarrow{BC}|} = \frac{2 \times 2}{2 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

因为 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 13 分

所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$.

所以异面直线 BC 与 AE 所成的角的大小是 $\frac{\pi}{4}$ 14 分

解法 2: 取 PB 中点 F , 连接 EF, AF ,

因为点 E 为 PC 的中点, 则 $EF \parallel BC$ 7 分

所以 $\angle AEF$ (或其补角) 是异面直线 BC 与 AE 所成的角8 分

因为底面 $ABCD$ 是矩形, 所以 $AD = BC = 2\sqrt{2}, AC = 2\sqrt{3}$.

又因为 EF 为 $\triangle PBC$ 的中位线, 所以 $EF = \frac{1}{2}BC = \sqrt{2}$ 9 分

又因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB, AC \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp AB$, $PA \perp AC$.

在直角三角形 $\triangle PAB$ 中, 因为 $AB = PA = 2$, 所以 $PB = 2\sqrt{2}$,

又因为点 F 为 PB 中点, 所以 $AF = \frac{1}{2}PB = \sqrt{2}$,10 分

同理可得 $PC = 4, AE = 2$ 11 分

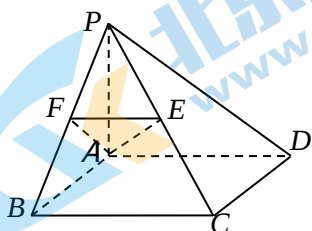
在 $\triangle AEF$ 中, 因为 $EF = \sqrt{2}, AF = \sqrt{2}, AE = 2$,

所以 $AE^2 = EF^2 + AF^2$. 所以 $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形12 分

因为 $\angle AEF \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,13 分

所以 $\angle AEF = \frac{\pi}{4}$.

所以异面直线 BC 与 AE 所成的角的大小是 $\frac{\pi}{4}$ 14 分



(17) 解: (I) 选①:1分

因为 $4a_2, 3a_3, 2a_4$ 成等差数列,

所以 $6a_3 = 4a_2 + 2a_4$. 即, $3a_3 = 2a_2 + a_4$ 2分

因为 $\{a_n\}$ 是一个公比为 $q (q > 0, q \neq 1)$ 的等比数列,

所以 $3a_2q = 2a_2 + a_2q^2$,3分

即 $q^2 - 3q + 2 = 0$.

解得 $q=1$ (舍去) 或 $q=2$ 4分

因为 $a_1=1$, 所以 $a_n = a_1q^{n-1} = 2^{n-1}$ 6分

选②:1分

因为 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 1 - (2a_{n-1} - 1)$

$= 2a_n - 2a_{n-1} (n > 1, n \in \mathbf{N}^*)$,2分

所以 $a_n = 2a_{n-1}$,3分

所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ 4分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=1$, 公比 $q=2$ 的等比数列.

所以 $a_n = a_1q^{n-1} = 2^{n-1}$ 6分

选③:1分

因为 $S_3 = 7$,

所以 $a_1 + a_2 + a_3 = 7$,2分

即 $a_1 + a_1q + a_1q^2 = 7$ 3分

因为 $a_1=1$, 所以 $q^2 + q - 6 = 0$.

解得 $q=2$ 或 $q=-3$ (舍去)4分

所以 $a_n = a_1q^{n-1} = 2^{n-1}$ 6分

(II) 解法 1:

因为 $b_n = 2\log_2 a_n - 7 = 2\log_2 2^{n-1} - 7$,7分

$= 2(n-1) - 7 = 2n - 9$ 8分

且有 $b_{n+1} - b_n = 2(n+1) - 9 - (2n-9) = 2$,9 分

所数列 $\{b_n\}$ 是以 -7 为首项, 2 为公差的等差数列.....10 分

因为 $T_n = \frac{n(b_1 + b_n)}{2}$ 11 分

所以 $T_n = \frac{n(-7 + 2n - 9)}{2} = n^2 - 8n$ 12 分

$= (n-4)^2 - 16$ ($n \in \mathbf{N}^*$)13 分

当 $n=4$ 时, T_n 有最小值, 即为 -16 14 分

(II) 解法 2:

依题意得 $b_n = 2\log_2 a_n - 7 = 2\log_2 2^{n-1} - 7 = 2(n-1) - 7$ 7 分

$= 2n - 9$ 8 分

令 $b_n = 2n - 9 < 0$,9 分

解得 $n \leq 4$ 10 分

令 $b_n = 2n - 9 > 0$,11 分

解得 $n > 4$.

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 4 项都是负值,

从第 5 项起是正值,12 分

所以当 $n=4$ 时, T_n 有最小值,13 分

最小值为 $T_4 = \frac{4 \times (-7 - 1)}{2} = -16$ 14 分

(18) 解: (I) 设事件 A = “从样本中的中小生随机抽取 1 人, 该同学跳绳成绩合格”1 分

样本中男生跳绳成绩合格的有: $90+88+60+80+82=400$ 人,

样本中女生跳绳成绩合格的有: $80+72+58+62+78=350$ 人,2 分

样本中男、女跳绳成绩合格的共有: $400+350=750$,

样本中的男生总人数: $400+100=500$ 人,

样本中的女生总人数: $350+150=500$ 人,

样本中男、女生总数: $500+500=1000$,3 分

所以 $P(A) = \frac{400+350}{500+500} = \frac{3}{4}$ 4 分

(II) 设事件 B = “从该地区众多中小学的男生中随机抽取 1 个, 该生跳绳成绩合格”, 则

$$P(B) = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}; \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

设事件 C = “从该地区众多中小学的女生中随机抽取 1 个, 该生跳绳成绩合格”, 则

$$P(C) = \frac{350}{500} = \frac{7}{10}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

由题可知 X 的可能取值为 0, 1, 2, 则 $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

$$P(X=0) = P(\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{B})P(\bar{C}) = (1 - \frac{4}{5}) \times (1 - \frac{7}{10}) = \frac{3}{50}; \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$P(X=1) = P(\bar{B}C \cup B\bar{C}) = P(\bar{B})P(C) \cup P(B)P(\bar{C}) = (1 - \frac{4}{5}) \times \frac{7}{10} + \frac{4}{5} \times (1 - \frac{7}{10}) = \frac{19}{50};$$

$$P(X=2) = P(BC) = P(B)P(C) = \frac{4}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{28}{50} = \frac{14}{25}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{50}$	$\frac{19}{50}$	$\frac{14}{25}$

$\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\text{所以 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{3}{50} + 1 \times \frac{19}{50} + 2 \times \frac{14}{25} = \frac{3}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

(III) $D\xi_1$ 最小, $D\xi_3$ 最大 $\dots\dots\dots 14 \text{ 分}$

(19) 解: (I) 因为 $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$k = f'(0) = 1 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$f(0) = 1, \text{ 所以切点为 } (0, 1) \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = x + 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(II) 解法 1:

$$F'(x) = a - e^x \cos x + e^x \sin x \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$F'(x) = a + e^x(\sin x - \cos x) = a + \sqrt{2}e^x \sin(x - \frac{\pi}{4}) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], x - \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{4}], \sqrt{2}e^x \sin(x - \frac{\pi}{4}) \geq 0 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

又因为 $a \geq 0$, 所以 $F'(x) \geq 0 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

所以 $F(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.....10 分

所以 $F(x)_{\max} = F(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi a}{2}$, $F(x)_{\min} = F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi a}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$ 12 分

解法 2:

$$F(x) = g(x) - f(x) = ax - e^x \cos x$$

$$F'(x) = a - e^x \cos x + e^x \sin x, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{设 } h(x) = F'(x) = a - e^x \cos x + e^x \sin x, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$h'(x) = 0 - e^x (\cos x - \sin x - \sin x - \cos x) = 2e^x \sin x \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], \text{ 所以 } h'(x) \geq 0, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

所以 $h(x) = F'(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.....9 分

$$\text{又因为 } F'(x) \geq F'(\frac{\pi}{4}) = a \geq 0 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

所以 $F(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.

所以 $F(x)_{\max} = F(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi a}{2}$, $F(x)_{\min} = F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi a}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$ 12 分

解法 3:

$$F'(x) = a - e^x \cos x + e^x \sin x \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$= a - e^x (\cos x - \sin x) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], \cos x \leq \sin x, \text{ 所以 } \cos x - \sin x \leq 0 \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } -e^x (\cos x - \sin x) \geq 0 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } a \geq 0, \text{ 所以 } F'(x) \geq 0 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

所以 $F(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.....10 分

所以 $F(x)_{\max} = F(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi a}{2}$, $F(x)_{\min} = F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi a}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$ 12 分

(III) 写出 $a > \frac{2\sqrt{2}}{\pi} e^{\frac{\pi}{4}}$ 的任意一个实数即可.....15 分

(20) (I) 解法 1:

设 $F(c, 0)$, $A(c, y_0)$, 则 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$1 分

又因为 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 所以 $|y_0| = \frac{\sqrt{3}}{2}b$2 分

因为 $|AF| = \frac{3}{2}$,

所以 $|AF| = |y_0| = \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{3}{2}$3 分

所以 $b = \sqrt{3}$.

因为 $\begin{cases} a^2 - b^2 = c^2 \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases}$4 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$5 分

解法 2:

因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 即 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$,

所以 $a = 2c$1 分

因为 A 为椭圆 C 上一点, 且 $AF \perp x$ 轴, $|AF| = \frac{3}{2}$

所以椭圆 C 过点 $\left(c, \frac{3}{2}\right)$2 分

所以 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{\frac{9}{4}}{b^2} = 1$, 所以 $\frac{1}{4} + \frac{9}{b^2} = 1$, 解得 $b^2 = 3$3 分

因为 $a^2 = b^2 + c^2$,

所以 $4c^2 = 3 + c^2$, 解得 $c^2 = 1$, 所以 $a^2 = 4c^2 = 4$4 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$5 分

解法 3:

因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 即 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$,1 分

不妨设 $a = 2t, c = t (t > 0)$,

因为 $a^2 = b^2 + c^2$, 所以 $4t^2 = b^2 + t^2$, 所以 $b^2 = 3t^2$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4t^2} + \frac{y^2}{3t^2} = 1$ 2 分

因为 A 为椭圆 C 上一点, 且 $AF \perp x$ 轴, $|AF| = \frac{3}{2}$,

所以椭圆 C 过点 $\left(t, \frac{3}{2}\right)$ 3 分

所以 $\frac{t^2}{4t^2} + \frac{\frac{9}{4}}{3t^2} = 1$, 解得 $t^2 = 1$, 所以 $a^2 = 4$ 4 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4t^2} + \frac{y^2}{3t^2} = 1$ 5 分

(II) 解法 1:

由 (I) 知直线 l 的方程为 $\frac{x_0x}{4} + \frac{y_0y}{3} = 1 (y_0 \neq 0)$,

即 $y = \frac{12-3x_0x}{4y_0} (y_0 \neq 0)$6 分

因为直线 AF 的方程为 $x = 1$,

所以直线 l 与 AF 的交点为 $M\left(1, \frac{12-3x_0}{4y_0}\right)$,7 分

直线 l 与直线 $x = 1$ 的交点为 $N\left(4, \frac{3-3x_0}{y_0}\right)$,8 分

则 $\frac{|MF|^2}{|NF|^2} = \frac{\left(\frac{12-3x_0}{4y_0}\right)^2}{9 + \left(\frac{3-3x_0}{y_0}\right)^2} = \frac{(4-x_0)^2}{16y_0^2 + 16(1-x_0)^2}$ (1)10 分

又 $P(x_0, y_0)$ 是 C 上一点, 则 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$, $y_0^2 = 3 - \frac{3x_0^2}{4}$ 11 分

代入 (1) 式得

$$\frac{|MF|^2}{|NF|^2} = \frac{(4-x_0)^2}{48-12x_0^2+16-32x_0+16x_0^2}$$

$$= \frac{(4-x_0)^2}{4(x_0^2-8x_0+16)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4-x_0)^2}{(4-x_0)^2} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

所以 $\frac{|MF|}{|NF|} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

所以 $\frac{|MF|}{|NF|}$ 为定值. $\dots\dots\dots 14 \text{ 分}$

解法 2:

易知直线 AF 的方程为 $x=1$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

由 $\begin{cases} \frac{x_0x}{4} + \frac{y_0y}{3} = 1 \\ x = 1 \end{cases}$ 可得直线 l 与直线 AF 的交点为 $M\left(1, \frac{12-3x_0}{4y_0}\right) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

由 $\begin{cases} \frac{x_0x}{4} + \frac{y_0y}{3} = 1 \\ x = 4 \end{cases}$ 可得直线 l 与直线 AF 的交点为 $N\left(4, \frac{3-3x_0}{y_0}\right) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

所以 $|MF|^2 = \frac{9(4-x_0)^2}{16y_0^2} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

所以 $|NF|^2 = (4-1)^2 + \left(\frac{3-3x_0}{y_0}\right)^2 = \frac{9y_0^2 + 9(1-x_0)^2}{y_0^2} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

又因为 $P(x_0, y_0)$ 是椭圆 C 上一点,

所以 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$, 所以 $y_0^2 = 3 - \frac{3x_0^2}{4} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

所以 $\frac{|MF|^2}{|NF|^2} = \frac{\frac{9(4-x_0)^2}{16y_0^2}}{9 + \frac{9(1-x_0)^2}{y_0^2}} = \frac{(4-x_0)^2}{16y_0^2 + 16(1-x_0)^2} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

$$= \frac{(4-x_0)^2}{48-12x_0^2+16-32x_0+16x_0^2}$$

$$= \frac{(4-x_0)^2}{4(x_0^2-8x_0+16)} = \frac{(4-x_0)^2}{4(4-x_0)^2} = \frac{1}{4}$$

所以 $\frac{|MF|}{|NF|} = \frac{1}{2}$ 13 分

所以 $\frac{|MF|}{|NF|}$ 为定值.14 分

(21) 解: (I) 因为 $6 \times 6 = 36$ 与 $6 \div 6 = 1$ 均不属于数集 $\{2, 3, 6\}$,

所以数集 $\{2, 3, 6\}$ 不具有性质 P 2 分

因为 $1 \times 1, 1 \times 3, 1 \times 4, 1 \times 12, \frac{1}{1}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{12}{12}, \frac{12}{3}, \frac{12}{4}$ 属于数集 $\{1, 3, 4, 12\}$,

所以数集 $\{1, 3, 4, 12\}$ 具有性质 P 4 分

(II) ① 因为数集 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} (1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n, n \geq 2)$ 具有性质 P ,

若 $a_k \in \mathbf{N}^* (k = 1, 2, 3, \dots)$, 即数集 A 中的各个元素都是整数.....5 分

假设存在一个数 a_i 不是 a_n 的因数,6 分

因为 a_i 为整数, 且不是 a_n 的因数,

所以 $a_i > 1$, 则 $a_i \cdot a_n > a_n$, 即 $a_i a_n \notin A$ 7 分

而 a_i 不是 a_n 的因数, $\frac{a_n}{a_i}$ 不是整数, $\frac{a_n}{a_i} \notin A$, 这与数集 A 具有性质 P 相矛盾,

所以假设不成立.....8 分

所以对任意 $1 \leq i \leq n$ 都有 a_i 是 a_n 的因数.....9 分

② 因为 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 具有性质 P ,

所以 $a_n a_n$ 与 $\frac{a_n}{a_n}$ 中至少有一个属于 A ,

且 $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n$,

所以 $a_n a_n > a_n$, 故 $a_n a_n \notin A$ 10 分

所以 $1 = \frac{a_n}{a_n} \in A$.

所以 $a_1 = 1$ 11 分

所以 $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

所以 $a_k a_n > a_n$, 故 $a_k a_n \notin A (k = 2, 3, \dots, n)$ 12 分

由 A 具有性质 P 可知 $\frac{a_n}{a_k} \in A (k=1, 2, 3, \dots, n)$.

又因为 $\frac{a_n}{a_n} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \dots < \frac{a_n}{a_2} < \frac{a_n}{a_1}$,

所以 $\frac{a_n}{a_n} = a_1, \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_2, \dots, \frac{a_n}{a_2} = a_{n-1}, \frac{a_n}{a_1} = a_n \dots \dots \dots 13$ 分

$$\frac{a_n}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \dots \frac{a_n}{a_2} \cdot \frac{a_n}{a_1} = a_1 \cdot a_2 \dots a_{n-1} \cdot a_n.$$

$$\frac{a_n^n}{a_1 \cdot a_2 \dots a_{n-1} \cdot a_n} = a_1 \cdot a_2 \dots a_{n-1} \cdot a_n.$$

所以 $a_n^n = a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots a_n^2 \dots \dots \dots 14$ 分