

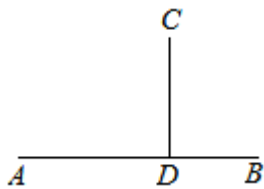
2019 北京一七一中学高二（上）期中

数 学

（满分：150 时间：120 分钟）

一. 选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1. 设 l_1 的方向向量 $\vec{a} = (1, 2, -2)$, l_2 的方向向量 $\vec{b} = (-2, 3, m)$, 若 $l_1 \perp l_2$, 则 $m = (\quad)$
A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. 3
2. 椭圆 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的短轴长为 $(\quad)$
A. 2 B. 6 C. 4 D. 12
3. 设抛物线 $y^2 = 8x$ 上一点 P 到直线 $x = -2$ 的距离是 6, 则点 P 到该抛物线焦点的距离是 $(\quad)$
A. 4 B. 6 C. 8 D. 12
4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 在左支上过 F_1 的弦 AB 的长为 5, 若 $2a = 8$, 那么 $\triangle ABF_2$ 的周长是 $(\quad)$
A. 16 B. 18 C. 21 D. 26
5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, 且与椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 有公共焦点, 则 C 的方程为 $(\quad)$
A. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{10} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$
6. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上的点到直线 $l: y = x + 3\sqrt{7}$ 的距离的最小值是 $(\quad)$
A. $\sqrt{14}$ B. $2\sqrt{17}$ C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$ D. $\sqrt{7}$
7. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上有一点 P , F_1, F_2 是椭圆的左、右焦点, 若 $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形, 则这样的点 P 有 $(\quad)$
A. 2 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 8 个
8. 如图, 已知线段 AB 上有一动点 D (D 异于 A, B), 线段 $CD \perp AB$, 且满足 $CD^2 = \lambda AD \cdot BD$ (λ 是大于 0 且不等于 1 的常数), 则点 C 的运动轨迹为 $(\quad)$



- A. 圆的一部分 B. 椭圆的一部分 C. 双曲线的一部分 D. 抛物线的一部分

二. 填空题 (每小题 5 分, 共 40 分)

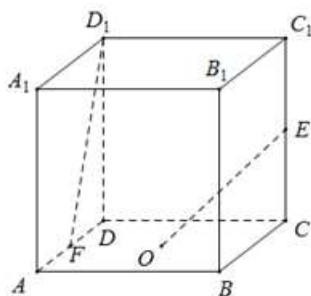
9. 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 若 $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CC_1} = \mathbf{c}$, 则 $\overrightarrow{A_1B} =$ _____.

10. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率为 _____, 渐近线方程为 _____.

11. 已知双曲线过点 $(2, 0)$, 且渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 则该双曲线的标准方程为 _____.

12. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 B, C 在椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 上, 顶点 A 是椭圆的一个焦点, 且椭圆的另外一个焦点在 BC 边上, 则 $\triangle ABC$ 的周长是 _____.

13. 如图所示, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是底面 $ABCD$ 的中心, E, F 分别是 CC_1 和 FD_1 所成角的余弦值等于 _____.



14. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点, M 是 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴于点 N . 若 M 为 FN 的中点, 则 $|FN| =$ _____.

15. 已知点 P 是抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上, 那么点 P 到点 $Q(2, -1)$ 的距离与点 P 到抛物线焦点距离之和取得最小值时, 点 P 的坐标为 _____.

16. 已知椭圆 $G: \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < \sqrt{6})$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2 , 短轴的两个端点分别为 B_1 和 B_2 , 点 P 在椭圆 G 上, 且满足 $|PB_1| + |PB_2| = |PF_1| + |PF_2|$. 当 b 变化时, 给出下列三个命题:

- ① 点 P 的轨迹关于 y 轴对称; ② 存在 b 使得椭圆 G 上满足条件的点 P 仅有两个;
③ $|OP|$ 的最小值为 2.

其中, 所有正确命题的序号是 _____.

三.解答题：（每题 14 分，共 70 分）

17. 已知椭圆的两焦点为 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

(1) 求此椭圆的方程;

(2) 设直线 $l: y = x + 1$, 若 l 与此椭圆相交于 P, Q 两点, 求 $|PQ|$ 的长.

18. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $P(2, 2)$, 其焦点为 F . 直线 $y = x - 2$ 与抛物线 C 相交于点 A, B .

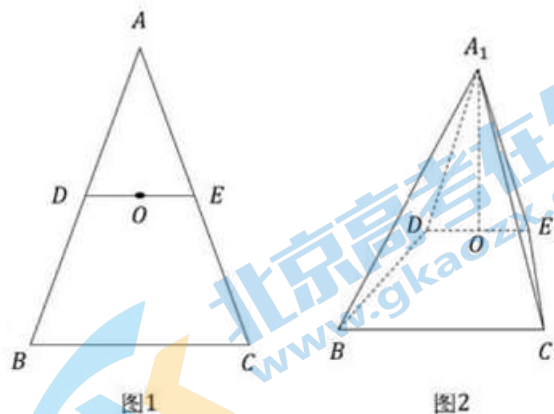
(1) 求抛物线 C 的方程以及焦点 F 的坐标;

(2) 求证: $OA \perp OB$.

19. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别为 AB, AC 的中点, O 为 DE 的中点, $AB = AC = 2\sqrt{5}$, $BC = 4$. 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置, 使得平面 $A_1DE \perp$ 平面 $BCED$, 如图 2.

(1) 求证: $A_1O \perp BD$;

(2) 求直线 A_1C 和平面 A_1BD 所成角的正弦值.



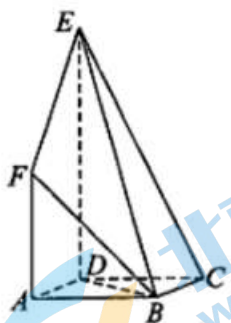
20. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 梯形 $ADEF$ 与平行四边形 $ABCD$ 所在平面互相垂直, $AF \parallel DE, DE \perp AD, AD \perp BE$.

$$AF = AD = \frac{1}{2}DE = 1, AB = \sqrt{2}.$$

(1) 求证: $BF \parallel$ 平面 CDE ;

(2) 求二面角 $B - EF - D$ 的余弦值;

(3) 判断线段 BE 上是否存在点 Q , 使得平面 $CDQ \perp$ 平面 BEF ? 若存在, 求出 $\frac{BQ}{BE}$ 的值, 若不存在, 说明理由.



21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $A(a, 0), B(0, b), O(0, 0)$, ΔOAB 的面积为 1.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 P 是椭圆 C 上一点, 直线 PA 与 y 轴交于点 M , 直线 PB 与 x 轴交于点 N . 求证: $|AN| \cdot |BM|$ 为定值.



长按识别关注