

2019 北京东城区高三（上）期末

数 学（理）

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡一并交回。

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | -2 < x \leq 0\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $\{-2, -1\}$ (B) $\{-2, 0\}$
(C) $\{-1, 0\}$ (D) $\{-2, -1, 0\}$

(2) 下列复数为纯虚数的是

- (A) $1 + i^2$ (B) $i + i^2$
(C) $1 - \frac{1}{i}$ (D) $(1 - i)^2$

(3) 下列函数中，是奇函数且存在零点的是

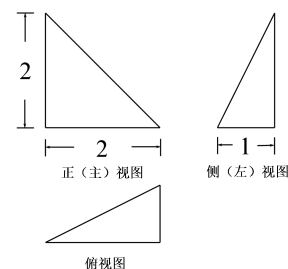
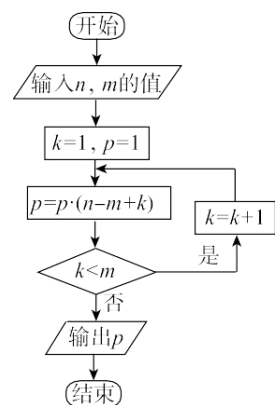
- (A) $y = x^3 + x$ (B) $y = \log_2 x$
(C) $y = 2x^2 - 3$ (D) $y = \frac{2}{x}$

(4) 执行如图所示的程序框图，若输入的 $n = 5, m = 3$, 则输出的 p 值为

- (A) 360 (B) 60
(C) 36 (D) 12

(5) “ $m = \frac{5}{12}\pi$ ”是“函数 $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象关于直线 $x = m$ 对称”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件



(6) 某三棱锥的三视图如图所示, 在此三棱锥的六条棱中, 最长棱的长度为

(A) 2

(B) $\sqrt{5}$

(C) $2\sqrt{2}$

(D) 3

(7) 在极坐标系中, 下列方程为圆 $\rho=2\sin\theta$ 的切线方程的是

(A) $\rho\cos\theta=2$

(B) $\rho=2\cos\theta$

(C) $\rho\cos\theta=-1$

(D) $\rho\sin\theta=-1$

(8) 地震里氏震级是地震强度大小的一种度量. 地震释放的能量 E (单位: 焦耳) 与地震里氏震级 M 之间的关系为 $\lg E = 4.8 + 1.5M$. 已知两次地震的里氏震级分别为 8.0 级和 7.5 级, 若它们释放的能量分别为 E_1 和 E_2 , 则 $\frac{E_1}{E_2}$ 的值所在的区间为

(A) (1, 2)

(B) (5, 6)

(C) (7, 8)

(D) (15, 16)

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(9) 若 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 2, \\ y \leq 2x, \\ x + y \geq 3, \end{cases}$ 则 $x + 2y$ 的最小值为_____.

(10) 已知双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{3m} = 1$ 的一个焦点为 $(2\sqrt{3}, 0)$, 则 $m =$ _____.

(11) 若等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = -1, b_1 = 2, a_3 + b_2 = -1$, 试写出一组满足条件的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式: $a_n =$ _____, $b_n =$ _____.

(12) 在菱形 $ABCD$ 中, 若 $BD = \sqrt{3}$, 则 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DB}$ 的值为_____.

(13) 函数 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6}) + \cos(x - \frac{\pi}{3})$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi]$ 上的最大值为_____.

(14) 已知函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$ ，设 $F_f(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq 1, \\ 1, & |f(x)| > 1. \end{cases}$

①若 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ，则 $F_f(1) =$ _____；

②若 $f(x) = e^{a-|x|} - 1$ ，且对任意 $x \in \mathbf{R}$ ， $F_f(x) = f(x)$ ，则实数 a 的取值范围为_____。

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15) (本小题 13 分)

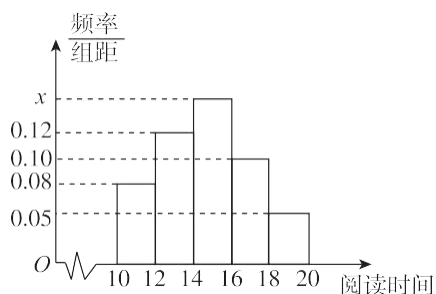
在 $\triangle ABC$ 中， $\sqrt{2}c \sin A \cos B = a \sin C$.

(I) 求 $\angle B$ 的大小；

(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 a^2 ，求 $\cos A$ 的值.

(16) (本小题 13 分)

某中学有学生 500 人，学校为了解学生的课外阅读时间，从中随机抽取了 50 名学生，获得了他们某一个月课外阅读时间的数据（单位：小时），将数据分为 5 组：[10,12)，[12,14)，[14,16)，[16,18)，[18,20]，整理得到如图所示的频率分布直方图.



(I) 求频率分布直方图中的 x 的值；

- (II) 试估计该校所有学生中，课外阅读时间不小于 16 小时的学生人数；
- (III) 已知课外阅读时间在 $[10,12)$ 的样本学生中有 3 名女生，现从阅读时间在 $[10,12)$ 的样本学生中随机抽取 3 人，记 X 为抽到女生的人数，求 X 的分布列与数学期望 $E(X)$ 。

(17) (本小题 14 分)

如图 1，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ， E, F 分别为 AD, BC 的中点， $AE = EF$ ， $AF = \sqrt{2}AE$ ，将四边形 $ABFE$ 沿 EF 折起，使平面 $ABFE \perp$ 平面 $EFCD$ (如图 2)， G 是 BF 的中点。

(I) 证明： $AC \perp EG$ ；

(II) 在线段 BC 上是否存在一点 H ，使得 $DH \parallel$ 平面 $ABFE$ ？若存在，求 $\frac{BH}{BC}$ 的值；若不存在，说明理由；

(III) 求二面角 $D-AC-F$ 的大小。

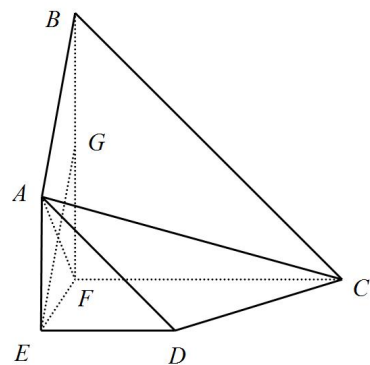


图2

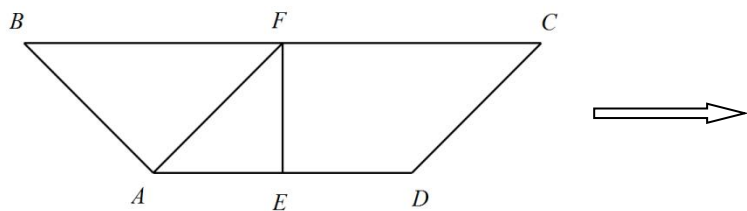


图1

(18) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = axe^x - x^2 - 2x$.

(I) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 当 $x>0$ 时, 若曲线 $y=f(x)$ 在直线 $y=-x$ 的上方, 求实数 a 的取值范围.

(19) (本小题 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2} = 1$ 过点 $P(2, 1)$.

(I) 求椭圆 C 的方程, 并求其离心率;

(II) 过点 P 作 x 轴的垂线 l , 设点 A 为第四象限内一点且在椭圆 C 上 (点 A 不在直线 l 上), 点 A 关于 l 的对称点为 A' , 直线 $A'P$ 与 C 交于另一点 B . 设 O 为原点, 判断直线 AB 与直线 OP 的位置关系, 并说明理由.

(20) (本小题 14 分)

对给定的 $d \in \mathbf{N}^*$, 记由数列构成的集合 $\Omega(d) = \{\{a_n\} \mid a_1 = 1, |a_{n+1}| = |a_n + d|, n \in \mathbf{N}^*\}$.

(I) 若数列 $\{a_n\} \in \Omega(2)$, 写出 a_3 的所有可能取值;

(II) 对于集合 $\Omega(d)$, 若 $d \geq 2$. 求证: 存在整数 k , 使得对 $\Omega(d)$ 中的任意数列 $\{a_n\}$, 整数 k 不是数列 $\{a_n\}$ 中的项;

(III) 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\} \in \Omega(d)$, 记 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n, B_n . 若 $|a_{n+1}| \leq |b_{n+1}|$, 求证: $A_n \leq B_n$.

数学试题答案

一、选择题 (共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分)

(1) C (2) D (3) A (4) B

(5) A (6) D (7) C (8) B

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

(9) 4 (10) $\sqrt{3}$

(11) $-n - 2$ (答案不唯一) (12) $\frac{3}{2}$

(13) $\sqrt{3}$

(14) $\frac{1}{2} \quad (-\infty, \ln 2]$

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

(15) （共 13 分）

解：

(I) 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $c \sin A = a \sin C$ ，所以 $\cos B = \frac{a \sin C}{c \sin A} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $0 < \angle B < \pi$,

所以 $\angle B = \frac{\pi}{4}$ 5 分

(II) 因为 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} ac \sin \frac{\pi}{4} = a^2$ ，所以 $c = 2\sqrt{2}a$.

由余弦定理， $b^2 = a^2 + 8a^2 - 2 \cdot a \cdot 2\sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $b = \sqrt{5}a$.

所以 $\cos A = \frac{5a^2 + 8a^2 - a^2}{2 \cdot \sqrt{5}a \cdot 2\sqrt{2}a} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ 13 分

(16) （共 13 分）

解：(I) 由 $0.05 \times 2 + 0.08 \times 2 + 0.10 \times 2 + 0.12 \times 2 + 2x = 1$,

可得 $x = 0.15$ 3 分

(II) $0.10 \times 2 + 0.05 \times 2 = 0.30$,

即课外阅读时间不小于 16 个小时的学生样本的频率为 0.30.

$500 \times 0.30 = 150$,

所以可估计该校所有学生中，课外阅读时间不小于 16 个小时的学生人数为 150.

..... 6 分

(III) 课外阅读时间在 $[10, 12)$ 的学生样本的频率为 $0.08 \times 2 = 0.16$,

$50 \times 0.16 = 8$ ，即阅读时间在 $[10, 12)$ 的学生样本人数为 8，

8 名学生为 3 名女生，5 名男生，

随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}; \quad P(X=1) = \frac{C_3^1 C_5^2}{C_8^3} = \frac{15}{28};$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}; \quad P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}.$$

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

故 X 的期望 $E(X) = 0 \times \frac{5}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{9}{8}$ 13 分

(17) (共 14 分)

解: (I) 在图 1 中, $AE = EF, AF = \sqrt{2}AE$,

可得 $\triangle AEF$ 为等腰直角三角形, $AE \perp EF$.

因为 $AD \parallel BC$, 所以 $EF \perp BF, EF \perp FC$.

因为平面 $ABFE \perp$ 平面 $EFCD$, 且两平面交于 $EF, CF \subset$ 平面 $CDEF$,

所以 $CF \perp$ 平面 $ABFE$.

又 $EG \subset$ 平面 $ABFE$, 故 $CF \perp EG$;

由 G 为 AB 中点, 可知四边形 $AEFG$ 为正方形, 所以 $AF \perp EG$;

又 $AF \cap FC = F$, 所以 $EG \perp$ 平面 AFC .

又 $AC \subset$ 平面 AFC , 所以 $AC \perp EG$ 4 分

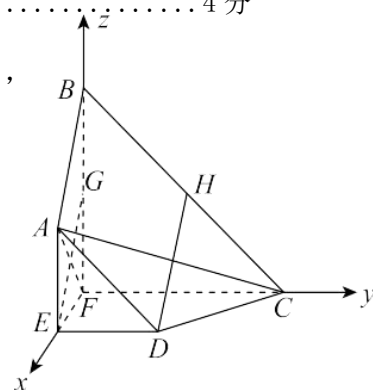
(II) 由 (I) 知: FE, FC, FB 两两垂直, 如图建立空间直角坐标系 $F-xyz$,

设 $FE = 1$, 则 $F(0,0,0), C(0,2,0), B(0,0,2), D(1,1,0)$.

设 H 是线段 BC 上一点,

则存在 $\lambda \in [0,1]$ 使得 $\overrightarrow{BH} = \lambda \overrightarrow{BC}$.

因此点 $H(0, 2\lambda, 2-2\lambda), \overrightarrow{DH} = (-1, 2\lambda-1, 2-2\lambda)$.



由 (I) 知 $\overrightarrow{FC}$ 为平面 $ABFE$ 的法向量, $\overrightarrow{FC} = (0, 2, 0)$.

因为 $DH \not\subset$ 平面 $ABFE$,

所以 $DH \parallel$ 平面 $ABFE$ 当且仅当 $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$,

即 $(-1, 2\lambda - 1, 2 - 2\lambda) \cdot (0, 2, 0) = 0$.

解得 $\lambda = \frac{1}{2}$.

所以在线段 BC 上存在点 H 使得 $DH \parallel$ 平面 $ABFE$, 此时 $\frac{BH}{BC} = \frac{1}{2}$ 9 分

(III) 设 $A(1, 0, 1)$, $E(1, 0, 0)$, $G(0, 0, 1)$.

由 (I) 可得, $\overrightarrow{EG}$ 是平面 AFC 的法向量, $\overrightarrow{EG} = (-1, 0, 1)$.

$\overrightarrow{AD} = (0, 1, -1)$, $\overrightarrow{CD} = (1, -1, 0)$,

设平面 ACD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y - z = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $y = 1, z = 1$. 于是 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$.

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{EG}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{EG} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{EG}| |\mathbf{n}|} = 0.$$

所以二面角 $D-AC-F$ 的大小为 90° 14 分

(18) (共 13 分)

解: (I) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = xe^x - x^2 - 2x$, 所以 $f'(x) = e^x(x+1) - 2x - 2$, $f'(0) = -1$.

又因为 $f(0) = 0$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = -x$ 4 分

(II) 当 $x > 0$ 时, “曲线 $y = f(x)$ 在直线 $y = -x$ 的上方” 等价于 “ $axe^x - x^2 - 2x > -x$ 恒成立”, 即 $x > 0$ 时 $ae^x - x - 1 > 0$ 恒成立,

由于 $e^x > 0$, 所以等价于当 $x > 0$ 时, $a > \frac{x+1}{e^x}$ 恒成立.

令 $g(x) = \frac{x+1}{e^x}, x \geq 0$, 则 $g'(x) = \frac{-x}{e^x}$.

当 $x \geq 0$ 时, 有 $g'(x) \leq 0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 单调递减.

故 $g(0) = 1$ 是 $g(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的最大值, 从而对任意 $x > 0, \frac{x+1}{e^x} < 1$ 恒成立.

综上, 实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$ 13 分

(19) (共 13 分)

解: (I) 由椭圆方程 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2} = 1$ 过点 $(2, 1)$, 可得 $a^2 = 8$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 4 分

(II) 直线 AB 与直线 OP 平行. 证明如下:

设直线 $PA: y - 1 = k(x - 2)$, $PB: y - 1 = -k(x - 2)$,

设点 A 的坐标为 (x_A, y_A) , 点 B 的坐标为 (x_B, y_B) .

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = kx - 2k + 1 \end{cases} \text{ 得 } (4k^2 + 1)x^2 + 8k(1 - 2k)x + 16k^2 - 16k - 4 = 0.$$

$$\text{则 } 2 + x_A = -\frac{8k(1 - 2k)}{4k^2 + 1}, \quad x_A = -\frac{16k(1 - 2k)}{4k^2 + 1} - 2 = \frac{8k^2 - 8k - 2}{4k^2 + 1}.$$

$$\text{同理 } x_B = \frac{8k^2 + 8k - 2}{4k^2 + 1}, \text{ 所以 } x_A - x_B = \frac{-16k}{4k^2 + 1}.$$

$$\text{由 } y_A = kx_A - 2k + 1, \quad y_B = -kx_B + 2k + 1,$$

$$\text{有 } y_A - y_B = k(x_A + x_B) - 4k = \frac{-8k}{4k^2 + 1},$$

因为 A 在第四象限, 所以 $k \neq 0$, 且 A 不在直线 OP 上.

$$k_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } k_{op} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } k_{AB} = k_{OP}.$$

所以直线 AB 与直线 OP 平行. 13 分

(20) (共 14 分)

解: (I) 由于数列 $\{a_n\} \in \Omega(2)$, 即 $d = 2$, $a_1 = 1$.

由已知有 $|a_2| = |a_1 + d| = |1 + 2| = 3$, 所以 $a_2 = \pm 3$,

$|a_3| = |a_2 + d| = |a_2 + 2|$,

将 $a_2 = \pm 3$ 代入得 a_3 的所有可能取值为 $-5, -1, 1, 5$ 4 分

(II) 先应用数学归纳法证明数列:

若数列 $\{a_n\} \in \Omega(d)$, 则 a_n 具有 $md \pm 1 (m \in \mathbf{Z})$ 的形式.

① 当 $n = 1$ 时, $a_1 = 0 \cdot d + 1$, 因此 $n = 1$ 时结论成立.

② 假设当 $n = k (k \in \mathbf{N}^*)$ 时结论成立, 即存在整数 m_0 , 使得 $a_k = m_0 d_0 \pm 1$ 成立.

当 $n = k + 1$ 时, $|a_{k+1}| = |m_0 d_0 \pm 1 + d_0| = |(m_0 + 1)d_0 \pm 1|$,

$a_{k+1} = (m_0 + 1)d \pm 1$, 或 $a_{k+1} = -(m_0 + 1)d \pm 1$.

所以当 $n = k + 1$ 时结论也成立.

由①②可知, 若数列 $\{a_n\} \in \Omega(d)$, 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, a_n 具有 $md \pm 1 (m \in \mathbf{Z})$ 的形式.

由于 a_n 具有 $md \pm 1 (m \in \mathbf{Z})$ 的形式, 以及 $d \geq 2$, 可得 a_n 不是 d 的整数倍.

故取整数 $k = d$, 则整数 k 均不是数列 $\{a_n\}$ 中的项. 9 分

(III) 由 $|a_{n+1}| = |a_n + d|$ 可得: $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n d + d^2$.

所以有 $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n d + d^2$,

$$a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} d + d^2,$$

$$a_{n-1}^2 = a_{n-2}^2 + 2a_{n-2} d + d^2,$$

$$a^2_2 = a^2_1 + 2a_1d + d^2.$$

以上各式相加可得 $a^2_{n+1} - 1 = d^2n + 2S_nd$,

$$\text{即 } A_n = \frac{a^2_{n+1}}{2d} - \frac{nd^2 + 1}{2d}. \text{同理 } B_n = \frac{b^2_{n+1}}{2d} - \frac{nd^2 + 1}{2d}.$$

当 $|a_{n+1}| \leq |b_{n+1}|$ 时, 有 $a^2_{n+1} \leq b^2_{n+1}$,

$$\text{由于 } d \in \mathbf{N}^*, \text{ 所以 } \frac{a^2_{n+1}}{2d} \leq \frac{b^2_{n+1}}{2d}, \text{ 于是 } \frac{a^2_{n+1}}{2d} - \frac{nd^2 + 1}{2d} \leq \frac{b^2_{n+1}}{2d} - \frac{nd^2 + 1}{2d},$$

即 $A_n \leq B_n$ 成立.

..... 14 分

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号: bj-gaokao
官方网址: www.gaokzx.com
咨询热线: 010-5751 5980

北京高考资讯微信: bj-gaokao

官方微信公众号: bj-gaokao

咨询热线: 010-5751 5980

官方网站: www.gaokzx.com

微信客服: gaokzx2018