2018 年石景山区高三统一测试

数学（文）试卷

考生须知	1．本试卷共 5 页，共三道大题，20 道小题，满分 150 分．考试时间 120 分钟． 2．试题答案一律填涂或书写在答题卡上，选择题、作图题请用 2B 铅笔作答，其他试题请用黑色字迹签字笔作答，在试卷上作答无效．

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.设集合 $A=\{x\mid(x+1)(x-2)<0\}$，集合 $B=\{x\mid 1<x<3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{x\mid -1<x<3\}$　　　B．$\{x\mid -1<x<1\}$

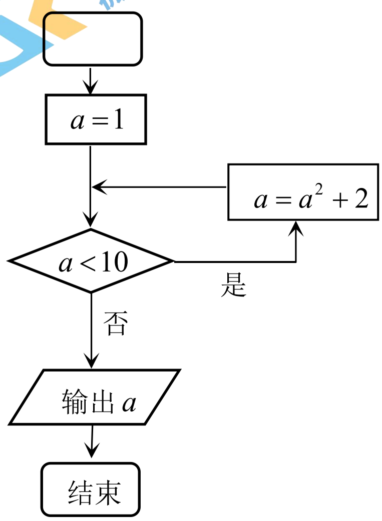
C．$\{x\mid 1<x<2\}$　　　D．$\{x\mid 2<x<3\}$

2.下列函数中既是奇函数，又在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调递减的函数为（　　）

A．$y=\sqrt{x}$　　B．$y=-x^3$　　C．$y=\log_{\frac{1}{2}}x$　　D．$y=x+\frac{1}{x}$

3.执行如图所示的程序框图，输出的结果是（　　）

A．3　　B．11　　C．38　　D．123



4.设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\leqslant 2, \\ 2x-3y\leqslant 9, \\ x\geqslant 0, \end{cases}$ 则下列不等式恒成立的是（　　）

A. $x\geqslant 1$　　B. $y\leqslant 1$　　C. $x-y+2\geqslant 0$　　D. $x-3y-6\leqslant 0$

5.已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $120°$，若 $(\vec{a}+m\vec{b})\perp\vec{a}$，则实数 m 的值为（　　）

A．1　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C．2　　D．3

6.“$a>b>1$”是“$\log_a 3<\log_b 3$”的（　　）

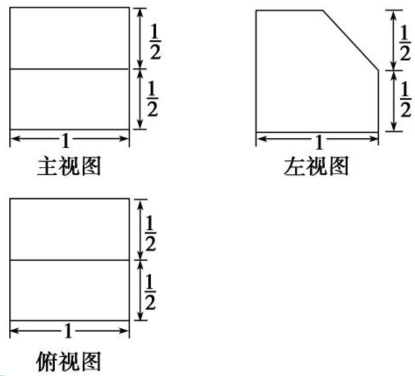
A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

7. 若某多面体的三视图（单位：cm）如图所示，则此多面体的体积是（　　）

A. $\dfrac{7}{8}cm^3$　　B. $\dfrac{2}{3}cm^3$

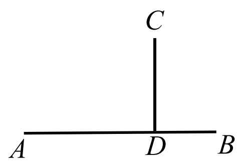
C. $\dfrac{5}{6}cm^3$　　D. $\dfrac{1}{2}cm^3$



8.如图，已知线段 AB 上有一动点 D（D 异于 A、B），线段 $CD\perp AB$，且满足 $CD^2=\lambda AD\cdot BD$（λ 是大于0且不等于1的常数），则点 C 的运动轨迹为（　　）

A．圆的一部分　　B．椭圆的一部分

C．双曲线的一部分　　D．抛物线的一部分



第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9.复数 $\dfrac{\mathrm{i}^3}{1+\mathrm{i}}=$____________.

10.双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 的焦距是_________,渐近线方程是______________.

11.若圆 C 的半径为 1，其圆心与点 $(1,0)$ 关于直线 $y=x$ 对称，则圆 C 的标准方程为

__________________________.

12.在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60°$，$AC=4$，$BC=2\sqrt{3}$，则 $\triangle ABC$ 的面积等于_________.

13.在等差数列 $\{a_n\}$ 中 $a_3=0$，如果 a_k 是 a_6 与 a_{k+6} 的等比中项，那么 $k=$______.

14.已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x, x\leq m \\ x-4, x>m\end{cases}$.

①当 $m=0$ 时，函数 $f(x)$ 的零点个数为___________；

②如果函数 $f(x)$ 恰有两个零点，那么实数 m 的取值范围为___________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上的最小值和最大值.

16．（本小题共 13 分）

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=4$，其前 n 项和 S_n 满足 $S_n=n^2+\lambda n(\lambda\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）求实数 λ 的值，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若数列 $\{\frac{1}{S_n}+b_n\}$ 是首项为 λ，公比为 2λ 的等比数列，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

17．（本小题共 13 分）

抢“微信红包”已经成为中国百姓欢度春节时非常喜爱的一项活动．小明收集班内 20 名同学今年春节期间抢到红包金额 x（元）如下（四舍五入取整数）：

102	52	41	121	72
162	50	22	158	46
43	136	95	192	59
99	22	68	98	79

对这 20 个数据进行分组，各组的频数如下：

组别	红包金额分组	频数
A	$0\leqslant x<40$	2
B	$40\leqslant x<80$	9
C	$80\leqslant x<120$	m
D	$120\leqslant x<160$	3
E	$160\leqslant x<200$	n

（Ⅰ）写出 m，n 的值，并回答这 20 名同学抢到的红包金额的中位数落在哪个组别；

（Ⅱ）记 C 组红包金额的平均数与方差分别为 v_1、s_1^2，E 组红包金额的平均数与方差分别为 v_2、s_2^2，试分别比较 v_1 与 v_2、s_1^2 与 s_2^2 的大小；（只需写出结论）

（Ⅲ）从 A，E 两组所有数据中任取 2 个，求这 2 个数据差的绝对值大于 100 的概率．

18．（本小题共 14 分）

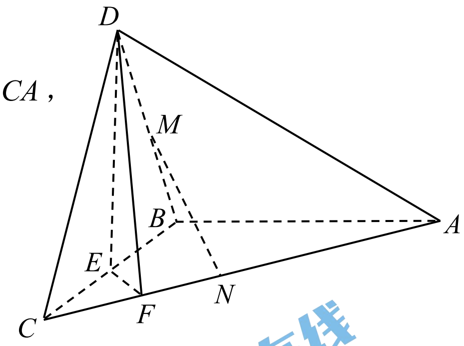
如图，在三棱锥 $D-ABC$ 中，已知 $\triangle BCD$ 是正三角形，$AB\perp$ 平面 BCD，$AB=BC=a$，E 为 BC 的中点，F 在棱 AC 上，且 $AF=3FC$．

（Ⅰ）求三棱锥 $D-ABC$ 的体积；

（Ⅱ）求证：$AC\perp$ 平面 DEF；

（Ⅲ）若 M 为 DB 中点，N 在棱 AC 上，且 $CN=\frac{3}{8}CA$，

求证：MN // 平面 DEF．



19．（本小题共 13 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，焦距为 $2\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）若 C,D 分别是椭圆 E 的左、右顶点，动点 M 满足 $MD\perp CD$，连接 CM，交椭圆

E 于点 P．证明：$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}$ 为定值（O 为坐标原点）．

20．（本小题共 14 分）

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{m}{x}$，$m\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ）当 $m=e$ 时，求函数 $f(x)$ 的极小值；

（Ⅱ）讨论函数 $g(x)=f'(x)-\dfrac{x}{3}$ 零点的个数；

（Ⅲ）若对任意的 $b>a>0$，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．

2018 年石景山区高三统一测试

数学（文）试卷答案及评分参考

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	B	C	D	A	A	B

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

题号	9	10	11	12	13	14
答案	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$	$2\sqrt{3}$ $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$	$x^2+(y-1)^2=1$	$2\sqrt{3}$	9	3 $[-2,0)\cup[4,+\infty)$

三、解答题共 6 小题，共 80 分．

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1$

$=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$

$=2(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x)$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ ………………5 分

所以周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$． ………………6 分

（Ⅱ）因为 $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$，

所以 $\frac{7\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{13\pi}{6}$． ………………7 分

所以当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}$ 时，即 $x=\pi$ 时 $f(x)_{\max}=1$．

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$ 时,即 $x=\frac{2}{3}\pi$ 时 $f(x)_{\min}=-2$． …………13 分

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

因为 $a_2=S_2-S_1=(4+2\lambda)-(1+\lambda)=3+\lambda$， ………………2 分

所以 $3+\lambda=4$，所以 $\lambda=1$． ………………4 分

所以 $a_1=S_1=2$，所以 $d=a_2-a_1=2$.

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n$. ………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\lambda=1$，

所以 $\frac{1}{S_n}+b_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$.

所以 $b_n=2^{n-1}-\frac{1}{n(n+1)}=2^{n-1}-(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$. ………………9 分

所以 $T_n=(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})-[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]$

$=\frac{1-2^n}{1-2}-(1-\frac{1}{n+1})$

$=2^n-\frac{2n+1}{n+1}$ ………………13 分

17.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）m=4，n=2，B； ………………3 分

（Ⅱ）$v_1<v_2$，$s_1^2<s_2^2$； ………………6 分

（Ⅲ）A 组两个数据为 22，22，E 组两个数据为 162，192

任取两个数据，可能的组合为

(22，22)，(22，162)，(22，192)，(22，162)，(22，192)，(162，192)，

共 6 种结果

记数据差的绝对值大于 100 为事件 A，事件 A 包括 4 种结果

所以 $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. ……………… 13 分

18.（本小题 14 分）

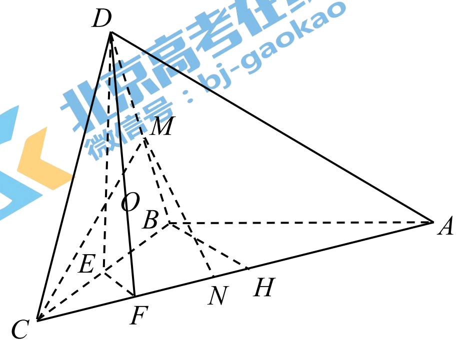
解：（Ⅰ）因为 $\triangle BCD$ 是正三角形，且 $AB=BC=a$，

所以 $S_{\triangle BCD}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. ………………2 分

又 $AB\perp$ 平面 BCD， ………………3 分

故 $V_{D-ABC}=V_{A-BCD}=\frac{1}{3}\cdot AB\cdot S_{\triangle BCD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot a=\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$． ………………4 分

（Ⅱ）在底面 ABC 中，取 AC 的中点 H，连接 BH，



因 $AB=BC$，故 $BH\perp AC$．

因 $AF=3FC$，故 F 为 CH 的中点.

又 E 为 BC 的中点，故 $EF\ /\!/\ BH$，

故 $EF\perp AC$． ……5 分

因 $AB\perp$ 平面 BCD， $AB\subset$ 平面 ABC，

故平面 $ABC\perp$ 平面 BCD.

$\triangle BCD$ 是正三角形， E 为 BC 的中点，

故 $DE\perp BC$，

故 $DE\perp$ 平面 ABC． ………………7 分

$AC\subset$ 平面 ABC，故 $DE\perp AC$． ………………8 分

又 $DE\cap EF=E$，故 $AC\perp$ 平面 DEF． ………………9 分

（Ⅲ）当 $CN=\frac{3}{8}CA$ 时，连 CM，设 $CM\cap DE=O$，连 OF．

因 E 为 BC 的中点， M 为 DB 中点，

故 O 为$\triangle BCD$ 的重心， $CO=\frac{2}{3}CM$． ………………10 分

因 $AF=3FC$， $CN=\frac{3}{8}CA$，故 $CF=\frac{2}{3}CN$，

所以 $MN\ /\!/\ OF$． ………………12 分

又 $OF\subset$ 平面 DEF， $MN\not\subset$ 平面 DEF，所以 $MN\ /\!/$ 平面 DEF． ……14 分

19.（本小题 13 分）

（Ⅰ）解：因为 $2c=2\sqrt{2}$，　　所以 $c=\sqrt{2}$． ………………1 分

因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $b=c=\sqrt{2}$． ………………3 分

因为 $a^2=b^2+c^2$， 所以 $a^2=4$． ………………4 分

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$． ………………5 分

（Ⅱ）方法一：

证明：$C(-2，0)$，$D(2，0)$，

设 $M\left(2,y_0\right),P\left(x_1,y_1\right)$，

则 $\overrightarrow{OP}=\left(x_1,y_1\right)$， $\overrightarrow{OM}=\left(2,y_0\right)$． ……………………7 分

直线 CM： $y=\dfrac{y_0}{4}\left(x+2\right)$，即 $y=\dfrac{y_0}{4}x+\dfrac{y_0}{2}$． ……………………8 分

代入椭圆方程 $x^2+2y^2=4$，

得 $\left(1+\dfrac{y_0{}^2}{8}\right)x^2+\dfrac{1}{2}y_0{}^2x+\dfrac{1}{2}y_0{}^2-4=0$，

所以 $x_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\left(y_0{}^2-8\right)}{y_0{}^2+8}=-\dfrac{2\left(y_0{}^2-8\right)}{y_0{}^2+8}$． ……………………10 分

所以 $y_1=\dfrac{8y_0}{y_0{}^2+8}$．

所以 $\overrightarrow{OP}=\left(-\dfrac{2\left(y_0{}^2-8\right)}{y_0{}^2+8},\dfrac{8y_0}{y_0{}^2+8}\right)$． ……………………12 分

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}=-\dfrac{4\left(y_0{}^2-8\right)}{y_0{}^2+8}+\dfrac{8y_0{}^2}{y_0{}^2+8}=\dfrac{4y_0{}^2+32}{y_0{}^2+8}=4$．

即 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}$ 为定值． ……………………13 分

方法二：设 $P(x,y),M(2,t)$，

由 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CM}$ 可得 $\dfrac{y}{x+2}=\dfrac{t}{4}$，即 $t=\dfrac{4y}{x+2}$．

∵点 $P(x,y)$ 在 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上

∴ $4y^2=2(4-x^2)$．

∴ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}=2x+ty=2x+\dfrac{4y^2}{x+2}=2x+\dfrac{2(2+x)(2-x)}{2+x}=4$．

∴ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}$ 为定值 4．

方法三：因为直线 CM 不在 x 轴上，故可设 $l_{CM}:x=my-2$．

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ x=my-2\end{cases}$得$(m^2+2)y^2-4my=0$，

$\therefore y_P=\dfrac{4m}{m^2+2},x_P=\dfrac{2m^2-4}{m^2+2}$，即$P(\dfrac{2m^2-4}{m^2+2},\dfrac{4m}{m^2+2})$.

在直线$x=my-2$中令$x=2$，则$y_M=\dfrac{4}{m}$，即$M(2,\dfrac{4}{m})$.

$\therefore \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}=\dfrac{4m^2-8}{m^2+2}+\dfrac{16}{m^2+2}=4$.

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}$为定值4.

20.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为$f'(x)=\dfrac{x-e}{x^2}(x>0)$，

所以当$x\in(0,e)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,e)$上单调递减；

当$x\in(e,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(e,+\infty)$上单调递增；

所以当$x=e$时，$f(x)$取得极小值$f(e)=\ln e+\dfrac{e}{e}=2$.　　………………3 分

（Ⅱ）$g(x)=f'(x)-\dfrac{x}{3}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{m}{x^2}-\dfrac{x}{3}\ (x>0)$，

令$g(x)=0$，得$m=-\dfrac{1}{3}x^3+x(x>0)$.

设$\varphi(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x(x>0)$，则$\varphi'(x)=-x^2+1=-(x-1)(x+1)$.

所以当$x\in(0,1)$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递增；

当$x\in(1,+\infty)$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减；

所以$\varphi(x)$的最大值为$\varphi(1)=-\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{2}{3}$，又$\varphi(0)=0$，可知：

①当$m>\dfrac{2}{3}$时，函数$g(x)$没有零点；

②当$m=\dfrac{2}{3}$或$m\le 0$时，函数$g(x)$有且仅有 1 个零点；

③当$0<m<\dfrac{2}{3}$时，函数$g(x)$有 2 个零.　　　　……………9 分

（III）原命题等价于$f(b)-b<f(a)-a$恒成立.　$(*)$.

设$h(x)=f(x)-x=\ln x+\dfrac{m}{x}-x(x>0)$，

则$(*)$等价于$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

即$h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{m}{x^2}-1\le 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

所以$m\ge -x^2+x=-(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}\ (x>0)$恒成立，

所以$m\ge\dfrac{1}{4}$.

即m的取值范围是$[\dfrac{1}{4},+\infty)$.　　　　………………14 分

【注：若有其它解法，请酌情给分】