昌平区 2020－2021 学年第一学期高三年级期末质量抽测

数学试卷　　　　2021.1

本试卷共 5 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将答题卡交回．

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,5\}, B=\{2,3\}$，那么 $A\cup B=$

A. $\{2,3\}$　　B. $\{1,5\}$　　C. $\{1,2,3,5\}$　　D. $\{3\}$

2. 复数 $\dfrac{2i}{1+i}=$

A. $1+i$　　B. $1-i$　　C. i　　D. 2

3. 下列函数中，既是奇函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A. $y=\sin x$　　B. $y=x^3$　　C. $y=2^{-x}$　　D. $y=\ln|x|$

4. $(2+\sqrt{x})^4$ 的展开式中常数项是

A. 8　　B. 16　　C. 24　　D. 32

5. 已知抛物线 $y^2=4x$ 上一点 P 到焦点 F 的距离为 5，那么点 P 到 y 轴的距离是

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

6. 函数 $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{1}{x}$ 的一个零点所在的区间是

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$　　C. $(2,3)$　　D. $(3,4)$

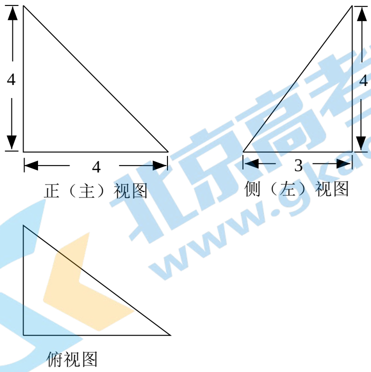
7. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的最长棱的棱长为

A．4

B．5

C．$4\sqrt{2}$

D．$\sqrt{41}$



8. 已知$a\in\mathbf{R}$，则“$a=1$”是“函数$f(x)=\cos^2 ax-\sin^2 ax$ 的最小正周期为π”的

A. 充分而不必要条件　B. 必要而不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知直线$y=kx+1$与圆$x^2-4x+y^2=0$相交于M，N两点，且$|MN|\geqslant 2\sqrt{3}$，那么实数k的取值范围是

A. $-4\leqslant k\leqslant -\frac{1}{3}$　B. $0\leqslant k\leqslant \frac{4}{3}$　C. $k\geqslant 0$或$k\leqslant -\frac{4}{3}$　D. $-\frac{4}{3}\leqslant k\leqslant 0$

10. 斐波那契数列又称“黄金分割数列”，因数学家莱昂纳多 斐波那契以兔子繁殖为例子而引入，故又称为“兔子数列”．此数列在现代物理、准晶体结构、化学等领域都有着广泛的应用. 斐波那契数列$\{a_n\}$可以用如下方法定义：$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3,\ n\in\mathbf{N}^*)$，$a_1=a_2=1$. 若此数列各项除以 4 的余数依次构成一个新数列$\{b_n\}$，则$b_{2021}=$

A. 1　B. 2　C. 3　D. 5

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知$\{a_n\}$是等差数列，若$a_1=1$，$a_7=13$，则$a_4=$______.

12. 已知向量$\boldsymbol{a}=(2,m)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数$m=$______.

13. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1(a>0)$的离心率是$\frac{5}{4}$，则双曲线的右焦点坐标为______.

14. 已知函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，那么函数$f(x)$的最小正周期是______；若函数$f(x)$在$[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]$上具有单调性，且$f(\frac{\pi}{2})=-f(\frac{5\pi}{6})$，则$\varphi=$______.

15. 高中学生要从物理、化学、生物、政治、历史、地理这 6 个科目中，依照个人兴趣、未来职业规划等要素，任选 3 个科目构成“选考科目组合”参加高考．已知某班 37 名学生关于选考科目的统计结果如下：

选考科目名称	物理	化学	生物	历史	地理	政治
选考该科人数	24	28	14	15	a	b

下面给出关于该班学生选考科目的四个结论：

① 若 $a=19$，则 $b=11$；

② 选考科目组合为“历史+地理+政治”的学生一定不超过 9 人；

③ 在选考化学的所有学生中，最多出现 10 种不同的选考科目组合；

④ 选考科目组合为“生物+历史+地理”的学生人数一定是所有选考科目组合中人数最少的.

其中所有正确结论的序号是_______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

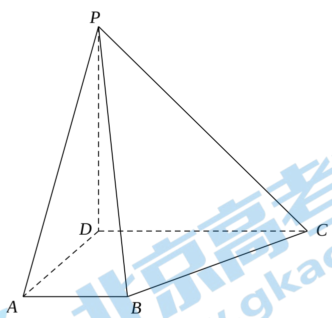
16. (本小题满分 13 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$平面$ABCD$，

$AB\,//\,CD$，$AD\perp CD$，且 $AD=CD=PD=2AB=2$.

（Ⅰ）求证：$AB\perp$平面PAD；

（Ⅱ）求二面角 $P-BC-A$ 的余弦值.



17. (本小题满分 13 分)

在$\triangle ABC$中，$b=7$，$c=5$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

（Ⅰ）$\angle B$的值；

（Ⅱ）$\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$\sin 2B=\sin B$；　　　　条件②：$\cos 2B=\cos B$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

18. (本小题满分 14 分)

智能体温计由于测温方便、快捷，已经逐渐代替水银体温计应用于日常体温检测. 调查发现，使用水银体温计测温结果与人体的真实体温基本一致，而使用智能体温计测量体温可能会产生误差. 对同一人而言，如果用智能体温计与水银体温计测温结果相同，我们认为智能体温计“测温准确”；否则，我们认为智能体温计“测温失误”.

现在某社区随机抽取了 20 人用两种体温计进行体温检测，数据如下：

序号	智能体温计测温（°C）	水银体温计测温（°C）	序号	智能体温计测温（°C）	水银体温计测温（°C）
01	36.6	36.6	11	36.3	36.2
02	36.6	36.5	12	36.7	36.7
03	36.5	36.7	13	36.2	36.2
04	36.5	36.5	14	35.4	35.4
05	36.5	36.4	15	35.2	35.3
06	36.4	36.4	16	35.6	35.6
07	36.2	36.2	17	37.2	37.0
08	36.3	36.4	18	36.8	36.8
09	36.5	36.5	19	36.6	36.6
10	36.3	36.4	20	36.7	36.7

(Ⅰ) 试估计用智能体温计测量该社区 1 人“测温准确”的概率；

(Ⅱ) 从该社区中任意抽查 3 人用智能体温计测量体温，设随机变量 X 为使用智能体温计“测温准确”的人数，求 X 的分布列与数学期望；

(III) 医学上通常认为，人的体温在不低于 $37.3^{\circ}C$ 且不高于 $38^{\circ}C$ 时处于“低热”状态. 该社区某一天用智能体温计测温的结果显示，有 3 人的体温都是 $37.3^{\circ}C$， 能否由上表中的数据来认定这 3 个人中至少有 1 人处于“低热”状态？说明理由.

19.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2-(a+1)x+1$.

(Ⅰ) 当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2，f(2))$ 处的切线方程；

(Ⅱ) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，求实数 a 的取值范围.

20.（本小题满分 15 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的长轴长为 4，且离心率为 $\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设过点 $F(1,0)$ 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 D，判断 $\frac{|AB|}{|DF|}$ 是否为定值？如果是定值，请求出此定值；如果不是定值，请说明理由.

21. （本小题满分 15 分）

已知数列 $\{a_n\}$，从中选取第 i_1 项、第 i_2 项、…、第 i_m 项（$i_1<i_2<\cdots<i_m$），若 $a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_m}$，则称新数列 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_m}$ 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的递增子列．规定：数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的递增子列.

（Ⅰ）写出数列 9，2，6，7，3，5，8 的一个长度为 4 的递增子列；

（Ⅱ）设数列 $\{a_n\}$，$a_n=n$，$1\leqslant n\leqslant 14$．若数列 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列中，任意三项均不构成等差数列，求 p 的最大值；

（Ⅲ）设数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比为 q，项数为 N $(N\geqslant 3)$．判定数列 $\{a_n\}$ 是否存在长度为3的递增子列：1,16,81？若存在，求出 N 的最小值；若不存在，说明理由.

昌平区 2020－2021 学年第一学期高三年级期末质量抽测

数学试卷参考答案及评分标准　　　　2021.1

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	B	B	C	B	C	A	D	A

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 7　　　　12. -1　　　　13. $(5,0)$

14. π ；$-\dfrac{\pi}{3}$　　　　15. ①②③

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$， $AB\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD\perp AB$. …………2 分

因为 $AB//CD$，$AD\perp CD$，

所以 $AD\perp AB$. …………4 分

因为 $PD\cap AD=D$， …………5 分

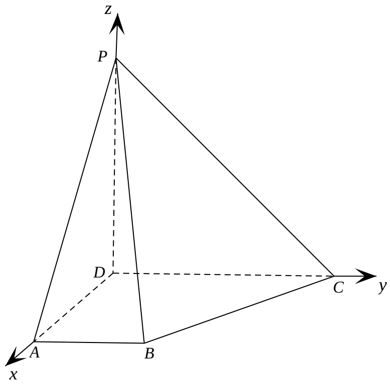
所以 $AB\perp$ 平面 PAD. …………6 分

（II）因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$, $AD\perp CD$， …………7 分

所以 以 D 为原点，分别以 DA，DC，DP 为 x， y，z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$.

则 $D(0,0,0), A(2,0,0), B(2,1,0), C(0,2,0), P(0,0,2)$, …………8 分

所以 $\overrightarrow{PB}=(2,1,-2), \overrightarrow{BC}=(-2,1,0)$.



设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

因为 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+y-2z=0,\\ -2x+y=0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}z=2x,\\ y=2x.\end{cases}$

令 $x=1$，于是 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$. ………… 10 分

因为 $PD\perp$平面$ABCD$，

所以 平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$， ………… 11 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2}{3}$. ………… 12 分

由题知 二面角 $P-BC-A$ 为锐角，所以其余弦值是 $\dfrac{2}{3}$. ………… 13 分

17. （本小题满分 13 分）

解：选择条件①：

（Ⅰ）因为 $\sin 2B=\sin B$，

所以 $\sin B(2\cos B-1)=0$， ………… 3 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B>0$. …………4 分

所以 $\cos B=\dfrac{1}{2}$. ………… 5 分

所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. ………… 6 分

（Ⅱ）由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ ， ………… 7 分

得 $7^2=a^2+5^2-2\times a\times 5\times\cos\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $a^2-5a-24=0$. ………… 9 分

解得 $a=8$ 或 $a=-3$（舍负）.

所以 $a=8$. ………… 10 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=10\sqrt{3}$. ………… 13 分

选择条件 ②：

（Ⅰ）因为 $\cos 2B=\cos B$，

所以 $2\cos^2 B-\cos B-1=0$， ………… 3 分

解得 $\cos B=1$ 或 $\cos B=-\dfrac{1}{2}$. …………4 分

因为 $0<B<\pi$，

所以 $\cos B=-\dfrac{1}{2}$. …………5 分

所以 $B=\dfrac{2\pi}{3}$. …………6 分

（Ⅱ）由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ ， …………7 分

得 $7^2=a^2+5^2-2\times a\times 5\times\cos\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $a^2+5a-24=0$， …………9 分

解得 $a=3$ 或 $a=-8$(舍负).

所以 $a=3$. …………10 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{15}{4}\sqrt{3}$. …………13 分

18.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）表中 20 人的体温数据中，用智能体温计与水银体温计测温结果相同的序号是 01，04，06，07，09，12，13，14，16，18，19，20，共有 12 种情况. …………2 分

由此估计所求概率为 $\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$. …………4 分

（Ⅱ）随机变量 X 的所有可能取值为 $X=0,1,2,3$. …………5 分

由（Ⅰ）可知，用智能体温计测量该社区 1 人“测温准确”的概率为 $\dfrac{3}{5}$.

所以 $P(X=0)=C_3^0\left(\dfrac{3}{5}\right)^0\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{8}{125}$； …………6 分

$P(X=1)=C_3^1\left(\dfrac{3}{5}\right)^1\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{36}{125}$； …………7 分

$P(X=2)=C_3^2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^1=\dfrac{54}{125}$； …………8 分

$P(X=3)=C_3^3\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^0=\dfrac{27}{125}$； …………9 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{8}{125}$	$\dfrac{36}{125}$	$\dfrac{54}{125}$	$\dfrac{27}{125}$

…………10 分

故 X 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{8}{125}+1\times\dfrac{36}{125}+2\times\dfrac{54}{125}+3\times\dfrac{27}{125}=\dfrac{225}{125}=\dfrac{9}{5}$. …………11 分

（Ⅲ）设这 3 人中至少有 1 人处于“低热”状态为事件 N.

表中 20 人的体温数据中，用智能体温计的测温结果，高于其真实体温的序号为 02，05，11，17，共计 4 种情况，由此估计从社区任意抽查 1 人，用智能体温计的测温结果高于其真实体温的概率为 $\frac{1}{5}$. 由此估计，这 3 人中至少有 1 人处于“低热”状态的概率为

$P(N)=1-(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5})=\frac{124}{125}$. ………… 12 分

结论 1：因为 $P(N)=\frac{124}{125}$，接近于1，由此可以认定这 3 人中至少有 1 人处于“低热”状态.

………… 14 分

结论 2：因为 $P(N)=\frac{124}{125}<1$，所以有可能这 3 人都不处于“低热”状态. ………… 14 分

19.（本小题满分 15 分）

解：（Ⅰ）当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$. ………… 1 分

所以 $f'(x)=x-1$， ………… 3 分

所以 $k=f'(2)=1$， ………… 4 分

因为 $f(2)=\frac{1}{2}\times 2^2-2+1=1$. ………… 5 分

所以 切线方程为 $y=x-1$. ………… 6 分

（Ⅱ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

因为 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2-(a+1)x+1$ ………… 7 分

所以 $f'(x)=\frac{a}{x}+x-a-1=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x}$. ………… 9 分

令 $f'(x)=0$，即 $x^2-(a+1)x+a=0$，解得 $x=1$ 或 $x=a$. …………10 分

（1）当 $a\leqslant 0$ 时，

当 x 变化时，$f'(x), f(x)$ 的变化状态如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值.

所以 $a\leqslant 0$ 成立 . ………… 11 分

（2）当$0<a<1$时，

当x变化时，$f'(x),f(x)$的变化状态如下表：

x	$(0,a)$	a	$(a,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以当$x=1$时，$f(x)$取得极小值.

所以$0<a<1$成立. ………… 12 分

（3）当$a=1$时，$f'(x)\geqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，没有极小值，不成立. ………… 13 分

（4）当$a>1$时，

当x变化时，$f'(x),f(x)$的变化状态如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,a)$	a	$(a,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以当$x=1$时，$f(x)$取得极大值.

所以 $a>1$不成立 . ………… 14 分

综上所述，$a<1$. ………… 15 分

20. （本小题满分 15 分）

解：（Ⅰ）依题意得$\begin{cases}2a=4,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$

解得 $a^2=4$，$b^2=3$. ………… 4 分

故 椭圆C的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………… 5 分

（Ⅱ）$\dfrac{|AB|}{|DF|}$是定值. ……………6 分

由已知得直线$l:y=k(x-1)$. ……………7 分

由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ 3x^2+4y^2-12=0 \end{cases}$ 消去 y 得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$. …………8 分

所以 $\Delta=(-8k^2)^2-4(4k^2+3)(4k^2-12)=144k^2+144>0$. …………9 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}$. …………10 分

所以 $|AB|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$

$$=(1+k^2)\left[\left(\frac{8k^2}{4k^2+3}\right)^2-\frac{4(4k^2-12)}{4k^2+3}\right]=\left(\frac{12(1+k^2)}{4k^2+3}\right)^2.$$

所以 $|AB|=\dfrac{12(1+k^2)}{4k^2+3}$. …………11 分

因为 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=k(\dfrac{8k^2}{4k^2+3}-2)=\dfrac{-6k}{4k^2+3}$，

所以 线段 AB 的中点为 $\left(\dfrac{4k^2}{4k^2+3},\dfrac{-3k}{4k^2+3}\right)$. …………12 分

（1）当 $k=0$ 时，$|AB|=4$，$|DF|=1$．所以 $\dfrac{|AB|}{|DF|}=4$. …………13 分

（2）当 $k\neq 0$ 时，线段 AB 的垂直平分线方程为 $y+\dfrac{3k}{4k^2+3}=-\dfrac{1}{k}\left(x-\dfrac{4k^2}{4k^2+3}\right)$，

令 $y=0$，得 $x=\dfrac{k^2}{4k^2+3}$，即 $D(\dfrac{k^2}{4k^2+3},0)$.

所以 $|DF|=\left|1-\dfrac{k^2}{4k^2+3}\right|=\dfrac{3(k^2+1)}{4k^2+3}$. …………14 分

所以 $\dfrac{|AB|}{|DF|}=\dfrac{\dfrac{12(1+k^2)}{4k^2+3}}{\dfrac{3(1+k^2)}{4k^2+3}}=4$.

综上所述，$\dfrac{|AB|}{|DF|}$ 为定值 4. …………15 分

21. （本小题满分 15 分）

解：（Ⅰ）长度为 4 的一个递增子列为：2，6，7，8（或 2，3，5，8）. …………4 分

（Ⅱ）设数列 $\{a_n\}$ 的长度为 P 的递增子列为 $a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_p}$，$i_1<i_2<\cdots<i_p$.

因为数列 $\{a_n\}$：1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13，14，各项均为正整数.

所以 $a_{i_3}-a_{i_1}\geqslant 3$．（若 $a_{i_3}-a_{i_1}=2$，则 a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3} 成等差数列）． …………6 分

同理 $a_{i_5}-a_{i_3}\geqslant 3$，且 $a_{i_5}-a_{i_3}\neq a_{i_3}-a_{i_1}$， …………7 分

所以 $a_{i_5}-a_{i_1}\geqslant 7$．

同理 $a_{i_9}-a_{i_5}\geqslant 7$， …………8 分

又因为 $a_{i_9}-a_{i_5}\neq a_{i_5}-a_{i_1}$， ………… 9 分

所以 $a_{i_9}-a_{i_1}\geqslant 15$ 与已知条件矛盾.

所以 $i_p\leqslant 8$． …………10 分

构造数列 $\{a_n\}$ 的递增子列：1，2，4，5，10，11，13，14，其中任意三项均不构成等差数列，

所以 p 的最大值为 8. …………11 分

（III）不存在. 理由如下：

由题意，假设数列 $\{a_n\}$ 存在长度为 3 的递增子列：1,16,81，

则存在 $1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant N$，使 $a_{i_1}=1,a_{i_2}=16,a_{i_3}=81$．

所以 $a_{i_2}=a_{i_1}q^{i_2-i_1}$，得 $q^{i_2-i_1}=16$．

同理 $a_{i_3}=a_{i_1}q^{i_3-i_1}$，得 $q^{i_3-i_1}=81$．

所以 $\dfrac{i_3-i_1}{i_2-i_1}=\dfrac{\log_2 81}{\log_2 16}=\log_2 3$（*）． …………13 分

下面证明 $\log_2 3$ 为无理数：

假设 $\log_2 3=\dfrac{k}{m}$ 为有理数，k，$m\in\mathbf{N}^*$，且 k，m 互质，

所以 $2^k=3^m$．

因为 2^k 是偶数，3^m 是奇数，

所以 $2^k\neq 3^m$，与事实矛盾，故假设不成立.

所以 $\log_2 3$ 为无理数.

又因为 $i_2-i_1,i_3-i_1\in\mathbf{N}^*$，$\dfrac{i_3-i_1}{i_2-i_1}$ 为有理数，

所以（*）式不成立.

所以 数列 $\{a_n\}$ 不存在长度为 3 的递增子列：1，16，81． …………15 分

[以上答案仅供参考]

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。