高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M=\{x|x^2<9\}$，$N=\{x|\sqrt{x}<2\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{x|-3<x<4\}$　　B. $\{x|-3<x<3\}$　　C. $\{x|0\leqslant x<3\}$　　D. $\{x|0<x<3\}$

2. 已知复数 z 满足 $z^2=-2i$，则 $|\bar{z}|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3. 甲、乙两名射击运动员各射击 6 次的成绩如下：

甲	7	8	9	5	4	9
乙	7	8	a	8	7	7

则下列说法正确的是

A. 若 $a=9$，则甲射击成绩的中位数大于乙射击成绩的中位数

B. 若 $a=8$，则甲射击成绩的极差小于乙射击成绩的极差

C. 若 $a=7$，则乙比甲的平均成绩高，乙比甲的成绩稳定

D. 若 $a=7$，则乙比甲的平均成绩高，甲比乙的成绩稳定

4. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_4a_5=3a_8$，$S_3=39$，则 $a_4=$

A. 64　　B. 81　　C. 128　　D. 192

5. 在区间 $[0,\pi]$ 上随机取一个数 x，则事件"$\sin x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$"的概率为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. 中国古代数学著作《九章算术》中有这样一个问题："某贾人擅营，月入益功疾（注：从第 2 个月开始，每月比前一月多入相同量的铜钱），第 3 月入 25 贯，全年（按 12 个月计）共入 510 贯"，则该人第 12 月营收贯数为

A. 64　　B. 66　　C. 68　　D. 70

7. $(x+y)^5(2x-y^2)^3$ 的展开式中 x^5y^5 的系数为

A. -30　　B. -15　　C. 15　　D. 30

8. 设 $a=\frac{1}{2e}$，$b=\frac{\ln\pi}{2\pi}$，$c=\frac{\ln\sqrt{3}}{3}$，则

A. $b>c>a$　　B. $b>a>c$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

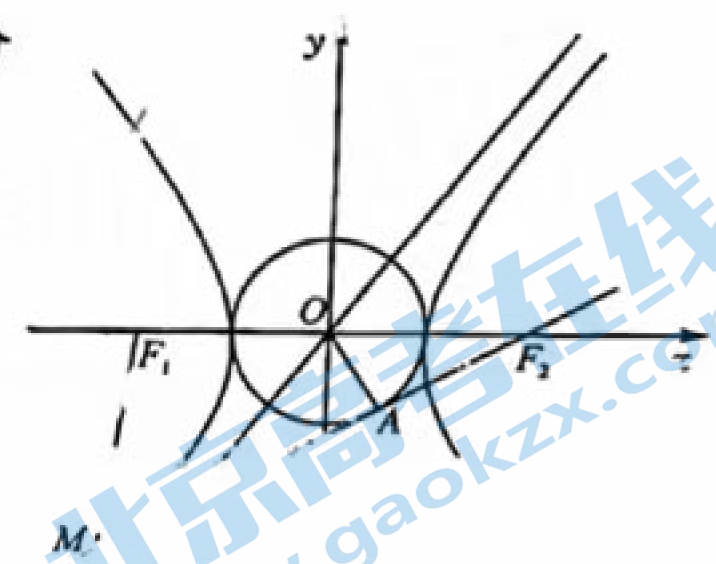
9. 在四面体 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\angle CBD=\frac{\pi}{2}$，$AD=2\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{2}$，$E$ 为 CD 的中点，$\triangle ACE$ 为等边三角形，则异面直线 AC 与 BE 所成角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

10. 已知函数 $f(x)=1-2\cos^2\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 T，且 $\frac{\pi}{4}<T<\frac{2\pi}{3}$，若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，则 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

11. 如图，已知 F_1，F_2 分别为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过 F_2 作圆 $O:x^2+y^2=a^2$ 的切线 F_2A，切点为 A，且切线 F_2A 在第三象限与 C 及 C 的渐近线分别交于点 M，N，则



A. 直线 OA 与双曲线 C 有交点

B. 若 $|MF_1|=2b$，则 $|AM|=2a-b$

C. 若 $|MF_2|=4|AF_2|$，则 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$

D. 若 $|NF_2|=4|AF_2|$，则 C 的离心率为 $\frac{2\sqrt{6}}{}$

12. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 都是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$f(x-1)+2$ 是奇函数，$g(x-2)$ 是偶函数，且 $f(x)-g(x-2)=3$，$g(-2)=1$，则 $\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=$

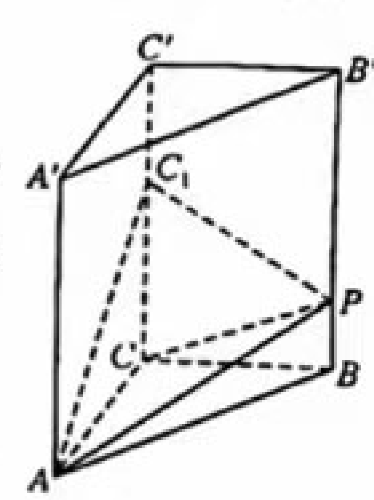
A. $-4\ 052$　　B. $-4\ 050$　　C. $-1\ 012$　　D. $-1\ 010$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是单位向量，且满足 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=-2\sqrt{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$______.

14. 已知抛物线 C 的顶点在原点，对称轴为坐标轴，且与直线 $y=x+1$ 相切，则抛物线 C 的一个方程是______.

15. 如图，直三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，$AC\perp BC$，$AC=2\sqrt{5}$，$BC=4$，棱柱的侧棱足够长，点 P 在棱 BB' 上，点 C_1 在 CC' 上，且 $PA\perp PC_1$，则当 $\triangle APC_1$ 的面积取最小值时，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的体积为______.



16. 已知函数 $f(x)=a^x-\log_a x(0<a<1)$ 有 3 个零点，则实数 a 的取值范围为______.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17. (12 分)

已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a+b=2c\cos B$.

(1)若 $A=\frac{3\pi}{4}$，求 B；

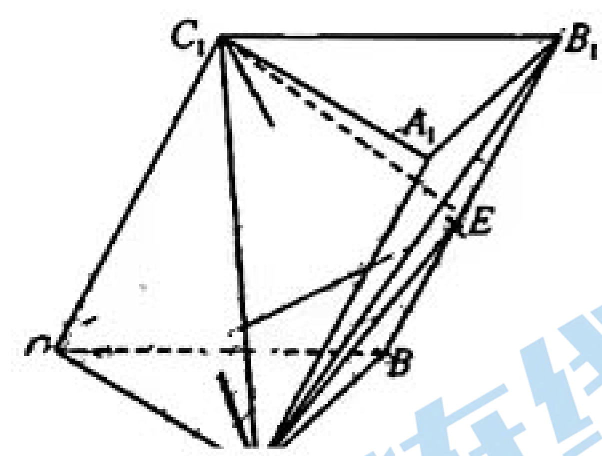
(2)若 $a=2$，$2c=3b$，求△ABC 的面积.

18. (12 分)

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为等边三角形，侧面 BCC_1B_1 为菱形，$\angle BCC_1=60°$，点 D,E 分别为 BC,BB_1 的中点，$AC_1=\sqrt{2}AD$.

(1)求证：$AD\perp$平面 BCC_1B_1；

(2)求二面角 $E-AC_1-B_1$ 的余弦值.



19. (12 分)

第 22 届世界杯足球赛在卡塔尔举办，各地中学掀起足球热. 甲、乙两名同学进行足球点球比赛，每人点球 3 次，射进点球一次得 50 分，否则得 0 分. 已知甲每次射进点球的概率为 $\frac{2}{3}$，且每次是否射进点球互不影响；乙第一次射进点球的概率为 $\frac{2}{3}$，从第二次点球开始，受心理因素影响，若前一次射进点球，则下一次射进点球的概率为 $\frac{3}{4}$，若前一次没有射进点球，则下一次射进点球的概率为 $\frac{1}{2}$.

(1)设甲 3 次点球的总得分为 X，求 X 的概率分布列和数学期望；

(2)求乙总得分为 100 分的概率.

20.(12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点 $A(2,\sqrt{2})$，且 C 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求 C 的方程；

(2)设直线 l 交 C 于不同于点 A 的 M,N 两点，直线 AM,AN 的倾斜角分别为 α,β，若$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=-1$，求 $\triangle AMN$ 面积的最大值.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=ax^2-\frac{b}{x}-\ln x$.

(1)当 $a=0$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x_1)=f(x_2)$，当 $x_1<a<b<x_2$ 时，证明：$a(x_1+x_2)^2+b\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)>\frac{a+b}{a+2b}$.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修 4—4：坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数)，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+1=0$.

(1)求曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程；

(2)若 l 与 C 交于 M,N 两点，点 $P(-1,1)$，求$\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}$的值.

23.[选修 4—5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x-1|-|x+3|$.

(1)求不等式 $f(x)\leqslant 2$ 的解集；

(2)设函数 $f(x)$的最大值为 M，若 a,b,c 均为正数，且 $abc=M$，求$(a+b)^2+c^2$ 的最小值.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. C　因为 $M=\{x|x^2<9\}=\{x|-3<x<3\}$，$N=\{x|\sqrt{x}<2\}=\{x|0\leqslant x<4\}$，所以 $M\cap N=\{x|0\leqslant x<3\}$.

2. B　设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}=-2\mathrm{i}$，根据复数相等的定义，得 $\begin{cases}a^2-b^2=0,\\2ab=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1,\\b=1,\end{cases}$ 所以 $|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$.

3. C　甲射击成绩的中位数为 $\frac{7+8}{2}=7.5$，极差为 $9-4=5$，平均成绩为 $\overline{x_甲}=\frac{7+8+9+5+4+9}{6}=7$，方差为 $s_甲^2=\frac{1}{6}\times[(7-7)^2+(8-7)^2+(9-7)^2+(5-7)^2+(4-7)^2+(9-7)^2]=\frac{11}{3}$；当 $a=9$ 时，乙射击成绩的中位数为 $\frac{7+8}{2}=7.5$，A 错误；当 $a=8$ 时，乙射击成绩的极差为 $8-7=1$，B 错误；当 $a=7$ 时，乙平均成绩为 $\overline{x_乙}=\frac{7+8+7+8+7+7}{6}=\frac{22}{3}$，方差为 $s_乙^2=\frac{1}{6}\left[4\times\left(7-\frac{22}{3}\right)^2+2\times\left(8-\frac{22}{3}\right)^2\right]=\frac{2}{9}$，故 $\overline{x_甲}<\overline{x_乙}$，$s_甲>s_乙^2$，由此可知乙比甲的平均成绩高，乙比甲的成绩稳定，C 正确，D 错误.

4. B　由等比数列的性质可知，$a_4a_5=a_1a_8=3a_8$，所以 $a_1=3$，由 $S_3=39$，得 $a_1(1+q+q^2)=39$，所以 $q^2+q-12=0$，解得 $q=3$ 或 $q=-4$（舍去），所以 $a_4=a_1q^3=81$.

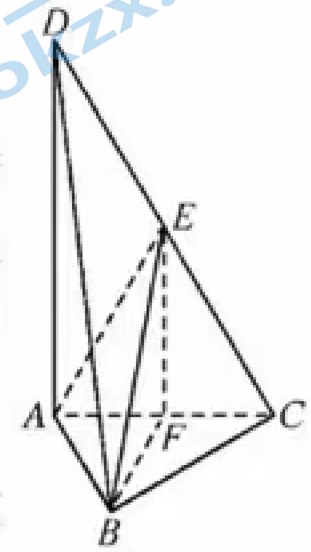
5. B　因为 $x\in[0,\pi]$，$\sin x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$，故所求概率 $P=\frac{\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}}{\pi}=\frac{1}{3}$.

6. D　设每个月的收入为等差数列 $\{a_n\}$，公差为 d，则 $a_3=25$，$S_{12}=510$，于是 $a_1+2d=25$，且 $12a_1+\frac{12\times11}{2}d=510$，解得 $a_1=15$，$d=5$，故 $a_{12}=a_1+11d=15+11\times5=70$.

7. D　$(x+y)^5$ 的通项为 $T_{r+1}=C_5^rx^{5-r}y^r$；$(2x-y^2)^3$ 的通项为 $T_{m+1}=(-1)^m2^{3-m}C_3^mx^{3-m}y^{2m}$；所以 $T_{r+1}\cdot T_{m+1}=(-1)^m2^{3-m}C_5^rC_3^mx^{8-r-m}y^{r+2m}$，令 $\begin{cases}8-r-m=5,\\r+2m=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=2,\\r=1,\end{cases}$ 所以展开式中 x^5y^5 的系数为 $(-1)^2 2^{3-2}C_5^1C_3^2=30$.

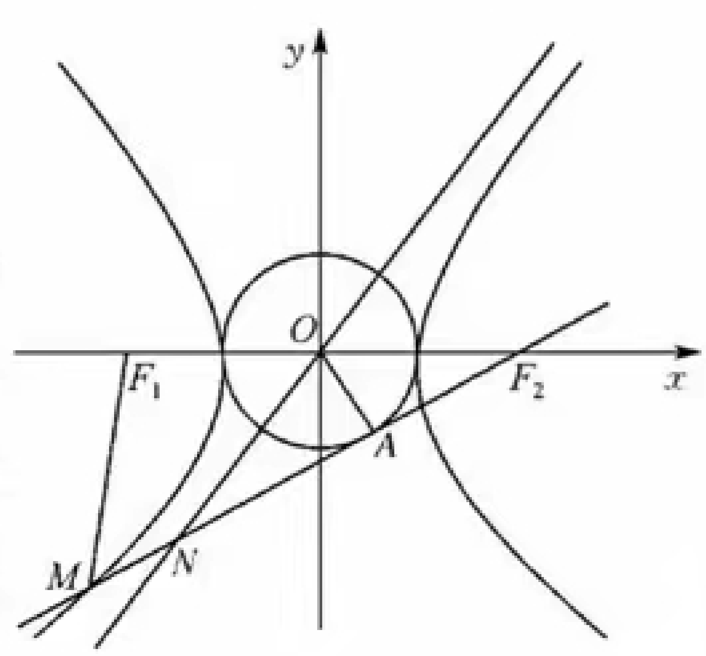
8. D　易知 $a=\frac{1}{2e}=\frac{\ln e}{2e}$，$b=\frac{\ln\pi}{2\pi}$，$c=\frac{\ln\sqrt{3}}{3}=\frac{\ln 3}{2\times3}$；令 $f(x)=\frac{\ln x}{2x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{2x^2}$；而当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，又 $e<3<\pi$，所以 $f(e)>f(3)>f(\pi)$，即 $a>c>b$.

9. C　如图，取 AC 的中点 F，连结 BF，EF，因为 $\triangle ACE$ 为等边三角形，E 是 CD 中点，所以 $AE=CE=ED$，所以 $AC\perp AD$. 在 $Rt\triangle ACD$ 中，由勾股定理，得 $AC^2+AD^2=(2AC)^2$，因为 $AD=2\sqrt{3}$，所以 $AC=2$. 因为 $AD\perp AC$，$AD\perp AB$，所以 $AD\perp$ 平面 ABC，所以 $AD\perp BC$. 又 $BC\perp BD$，所以 $BC\perp$ 平面 ABD，所以 $BC\perp BA$. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC=2$，$BC=\sqrt{2}$，所以 $AB=BC=\sqrt{2}$. 所以 $BF\perp AC$. 又 $\triangle ACE$ 为等边三角形，所以 $EF\perp AC$，因为 $BF\cap EF=F$，所以 $AC\perp$ 平面 BEF，所以 $AC\perp BE$，则直线 AC 与 BE 所成角为 $\frac{\pi}{2}$.



10. A　$f(x)=1-2\cos^2\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}$，由 $\frac{\pi}{4}<T<\frac{2\pi}{3}$ 得，$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{\omega}<\frac{2}{3}\pi$，所以 $\frac{3}{2}<\omega<4$，由 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称可知，$2\omega\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=3k-1$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\omega=2$，所以 $f(x)=-\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$，故 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. D　设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，由题意可知 $OA\perp AF_2$，$|OA|=a$，所以 $|AF_2|=\sqrt{|OF_2|^2-|OA|^2}=b$，从而直线 AF_2 的斜率为 $\tan\angle OF_2A=\frac{a}{b}$，由此，直线 OA 的斜率为 $k=-\frac{b}{a}$，其方程为 $y=-\frac{b}{a}x$，恰好是 C 的一条渐近线，所以直线 OA 与双曲线 C 无交点，A 错误；由双曲线的定义及 $|MF_1|=2b$，$|MF_2|=2b+2a$，又 $|AF_2|=b$，则 $|AM|=2a+b$，B 错误；由 $|AF_2|=b$，得 $|MF_2|=4|AF_2|=4b$，再由双曲线的定义，得 $|MF_1|=4b-2a$；在 $\triangle MF_1F_2$ 中，由余弦定



理，得$(4b-2a)^2=(4b)^2+(2c)^2-2\times4b\times2c\times\frac{b}{c}$，化简得$\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，所以$C$的渐近线方程为$y=\pm\frac{4}{3}x$，C错误；由$|NF_2|=4|AF_2|$及$|AF_2|=b$，得$|AN|=3b$；设直线$ON$的倾斜角为$\alpha$，则$\tan\alpha=\frac{b}{a}$，又$\angle AON=\pi-2\alpha$，

$\tan\angle AON=\tan(\pi-2\alpha)=-\tan2\alpha=-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{\frac{2b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，又$\tan\angle AON=\frac{3b}{a}$，所以$-\frac{\frac{2b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{3b}{a}$，解得

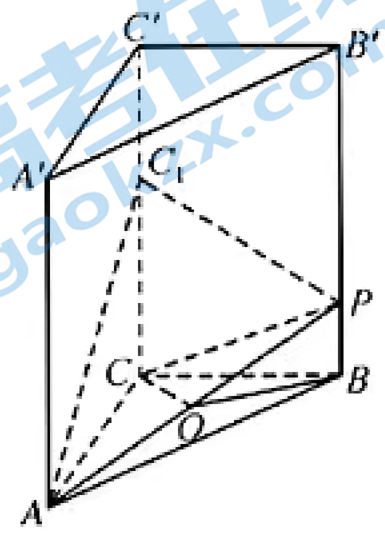
$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，所以$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，D正确.

12. A　因为$g(x-2)$是偶函数，所以$g(-2-x)=g(-2+x)$. 由$f(x)-g(-2+x)=3$知，$f(-x)-g(-2-x)=3$，所以$f(-x)=f(x)$，则$f(x)$为偶函数. 由$f(x-1)+2$是奇函数可知，$f(-x-1)+2=-[f(x-1)+2]$，所以$f(-x-1)+f(x-1)=-4$，则$f(-2-x)+f(x)=-4$，则$f(-2+x)+f(-x)=-4$，所以$f(-2+x)+f(x)=-4$，所以$f(-2-x)=f(-2+x)$，则$f(-x)=f(-4+x)$，所以$f(x)=f(-4+x)$，则4为$f(x)$的一个周期. 由$f(-x-1)+f(x-1)=-4$得，$f(-1)+f(-1)=-4$，则$f(1)+f(1)=-4$，所以$f(1)=-2$，由$f(-x-1)+f(x-1)=-4$得，$f(-3)+f(1)=-4$，即$f(3)+f(1)=-4$，所以$f(3)=-2$. 由$f(x)-g(x-2)=3$，得$f(0)-g(-2)=3$，又$g(-2)=1$，所以$f(0)=f(4)=4$；在$f(-2+x)+f(x)=-4$中，令$x=4$，得$f(2)+f(4)=-4$，所以$f(2)=-4-f(4)=-8$. $\sum_{k=1}^{2023}f(k)=505[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)+f(3)=505\times(-8)-12=-4052$.

13. $-\frac{1}{2}$　由$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=-2\sqrt{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，显然$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$；两边平方，得$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=12(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$，整理，得$12(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-5=0$，解得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{5}{6}$（舍）或$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$.

14. $y^2=4x$（也可以是$x^2=-4y$）　因为抛物线C与直线$y=x+1$相切，所以抛物线C的方程为$y^2=2px(p>0)$或$x^2=-2qy(q>0)$；由$\begin{cases}y^2=2px,\\y=x+1,\end{cases}$得$x^2+(2-2p)x+1=0$，所以$\Delta_1=(2-2p)^2-4=0$，解得$p=2$，所以抛物线$C$的方程可以为$y^2=4x$；由$\begin{cases}x^2=-2qy,\\y=x+1,\end{cases}$得$x^2+2qx+2q=0$，所以$\Delta=(2q)^2-4\times2q=0$，解得$q=2$，所以抛物线$C$的方程可以为$x^2=-4y$.

15. $20\sqrt{15}\pi$　如图，取AP的中点为O，连接CO,OB. 因为三棱柱$ABC-A'B'C'$为直棱柱，故$CC_1\perp$平面ABC，而$AC\subset$平面ABC，故$CC_1\perp AC$，又$CB\perp AC$，$CC_1\cap BC=C$，故$AC\perp$平面$BCC'B'$，因为$C_1P\subset$平面$BCC'B'$，故$AC\perp C_1P$，因为$PA\perp PC_1$，$AC\cap PA=A$，故$PC_1\perp$平面ACP，因为$CP\subset$平面ACP，故$PC_1\perp PC$. 设$PB=x$，$CC_1=h$，在直角三角形PCB中，$CP^2=16+x^2$，同理$C_1P^2=16+(h-x)^2$，所以$h^2=32+x^2+(h-x)^2$，整理得到$h-x=\frac{16}{x}$. 又$S_{\triangle AC_1P}=\frac{1}{2}\sqrt{36+x^2}\times\sqrt{16+(h-x)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(36+x^2)\left(16+\frac{16^2}{x^2}\right)}=2\sqrt{52+x^2+\frac{36\times16}{x^2}}\geqslant 2\sqrt{52+2\times6\times4}=20$，当且仅当$x=2\sqrt{6}$时等号成立，也就是$PB=2\sqrt{6}$时，$\triangle APC_1$的面积取最小值. 因为$AC\perp$平面$BCC'B'$，$CP\subset$平面$BCC'B'$，故$AC\perp CP$，故$OA=OP=OC$，而$\triangle PAB$为直角三角形，故$OP=OB$，故$O$为三棱锥$P-ABC$的外接球的球心，故外接球的直径为$\sqrt{36+24}=2\sqrt{15}$，所以外接球的体积为$\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{15})^3=20\sqrt{15}\pi$.



16. $\left(0,\frac{1}{e^e}\right)$　设$a=e^{-t}(t>0)$，则$f(x)=e^{-tx}+\frac{\ln x}{t}=e^{-tx}\left(1+\frac{e^{tx}\ln x}{t}\right)(x>0)$，设$h(x)=1+\frac{e^{tx}\ln x}{t}(x>0)$，则$h'(x)=e^{tx}\left(\ln x+\frac{1}{tx}\right)$，设$\varphi(x)=\ln x+\frac{1}{tx}(x>0)$，则$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{tx^2}=\frac{tx-1}{tx^2}$，当$x\in\left(0,\frac{1}{t}\right)$时，$\varphi'(x)<0$，当$x\in\left(\frac{1}{t},+\infty\right)$时，$\varphi'(x)>0$，所以$\varphi(x)$在$\left(0,\frac{1}{t}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{t},+\infty\right)$上单调递增，则$\varphi(x)_{\min}=\varphi\left(\frac{1}{t}\right)=-\ln t+1$，当$0<t\leqslant e$时，$\varphi(x)\geqslant0$，则$h'(x)\geqslant0$，所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上至多一个零点，所以$f(x)$至多有一个零点；当$t>e$时，$\varphi(x)_{\min}=-\ln t+1<0$，又$e^{-t}<\frac{1}{t}\Leftrightarrow e^t>t$，而$e^t>t$，所以$e^{-t}<\frac{1}{t}$，且$t>e$，$\varphi(e^{-t})=\frac{e^t-t^2}{t}>0$，$\frac{1}{t}<\frac{1}{e}$，$\varphi\left(\frac{1}{e}\right)<0$，$\varphi(1)>0$，所以存在$x_1\in\left(0,\frac{1}{t}\right)$，使得$\varphi(x_1)=0$；存在$x_2\in\left(\frac{1}{t},1\right)$，使得$\varphi(x_2)=0$，所以$x\in(0,x_1)$时，$\varphi(x)>0$，$x\in(x_1,x_2)$时，$\varphi(x)<0$，$x\in(x_2,+\infty)$时，$\varphi(x)>0$，所以$h(x)$在$(0,x_1)$上单

调递增，在(x_1,x_2)上单调递减，在$(x_2,+\infty)$上单调递增. 又$h(e^{-t})=1-e^{te^{-t}}<0$，当$y=\frac{\ln t}{t}$时，$y'=\frac{1-\ln t}{t^2}<0$，所以$y=\frac{\ln t}{t}$在$(e,+\infty)$上单调递减，所以$\frac{\ln t}{t}<\frac{1}{e}$，所以$h(x_1)>h\left(\frac{1}{t}\right)=1-\frac{e\ln t}{t}>1-e\times\frac{1}{e}=0$，则$h(x)$在$(0,x_1)$上有一个零点. 又$h(x_2)<h\left(\frac{1}{e}\right)=1-\frac{e^{\frac{t}{e}}}{t}<0$，所以$h(x)$在$(x_1,x_2)$上有一个零点. 由$h(1)>0$得，$h(x)$在$(x_2,+\infty)$上有一个零点，综上可知，$f(x)$在$(0,x_1)$，$(x_1,x_2)$，$(x_2,+\infty)$上各有一个零点，因此$0<a<e^{-e}$，故实数$a$的取值范围为$\left(0,\frac{1}{e^e}\right)$.

17. 解：(1)由条件与正弦定理得，$\sin A+\sin B=2\sin C\cos B$，………… 1分

由$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$得，

$\sin B=\sin C\cos B-\sin B\cos C=\sin(C-B)$，………… 3分

又$B\in(0,\pi)$，$C-B\in(-\pi,\pi)$，所以$B=C-B$，或$B+C-B=\pi$，

所以$C=2B$，或$C=\pi$(舍去)，………… 4分

当$A=\frac{3\pi}{4}$时，$3B=\pi-\frac{3}{4}\pi=\frac{\pi}{4}$，所以$B=\frac{\pi}{12}$. ………… 5分

(2)法一：由(1)知，$\sin C=\sin 2B=2\sin B\cos B$，

由正弦定理，得$\cos B=\frac{c}{2b}=\frac{3}{4}$，则$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$. ………… 6分

由余弦定理，得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即$b^2=4+\frac{9}{4}b^2-2\times2\times\frac{3}{2}b\times\frac{3}{4}$，

整理得$\frac{5}{4}b^2-\frac{9}{2}b+4=0$，解得$b=\frac{8}{5}$或$b=2$. ………… 8分

当$b=2$时，$c=\frac{3}{2}b=3$，此时$a=b=2$，所以$A=B$，又因为$C=2B$，所以$B=\frac{\pi}{4}$与$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$矛盾，舍去；………… 10分

当$b=\frac{8}{5}$时，$c=\frac{3}{2}b=\frac{12}{5}$，

此时$\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times\frac{12}{5}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{5}$. ………… 12分

法二：由(1)知，$\sin C=\sin 2B=2\sin B\cos B$，………… 6分

由正弦定理，得$\cos B=\frac{c}{2b}=\frac{3}{4}$，………… 7分

结合$a=2$，$2c=3b$，代入$a+b=2c\cos B$，

解得$b=\frac{8}{5}$，从而$c=\frac{3}{2}b=\frac{12}{5}$，………… 10分

此时$\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times\frac{12}{5}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{5}$. ………… 12分

18. (1)证明：连接BC_1，C_1D，因为侧面BCC_1B_1为菱形，$\angle BCC_1=60^\circ$，

所以$\triangle BCC_1$为等边三角形，

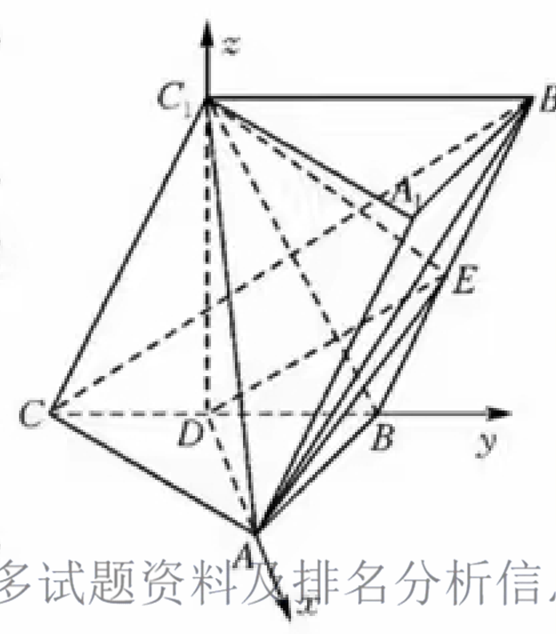
因为点D为BC的中点，所以$C_1D\perp BC$，………… 1分

设$BC=2$，则$C_1D=\sqrt{3}$，

因为$\triangle ABC$为等边三角形，所以$AD\perp BC$，则$AD=\sqrt{3}$.

因为$AC_1=\sqrt{2}AD=\sqrt{6}$，所以$AC_1^2=AD^2+C_1D^2$，则$AD\perp C_1D$.

因为$BC\cap C_1D=D$，所以$AD\perp$平面BCC_1B_1；………… 4分



(2)解：由(1)知$C_1D\perp BC$，$AD\perp C_1D$，$BC\cap AD=D$，

所以$C_1D\perp$平面ABC. ………… 5分

所以AD，BC，C_1D互相垂直，以D为原点，直线DA，CB，DC_1分别为x轴，y轴，z轴建立如图所示的空间直角坐标系，

设$BC=2$，则$D(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$E\left(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C_1(0,0,\sqrt{3})$，$B_1(0,2,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AC_1}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AE}=\left(-\sqrt{3},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(0,2,0)$，………… 7分

设平面 AC_1E 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

$\begin{cases}\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ -\sqrt{3}x_1+\frac{3}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=1$,则 $\boldsymbol{m}=(1,\frac{\sqrt{3}}{3},1)$, ………… 9 分

设平面 AB_1C_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

$\begin{cases}\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{C_1B_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ 2y_2=0,\end{cases}$ 取 $x_2=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$, ………… 10 分

于是 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{2}{\sqrt{\frac{7}{3}}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$, ………… 11 分

又由题知二面角 $E-AC_1-B_1$ 为锐角,

所以二面角 $E-AC_1-B_1$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$. ………… 12 分

19. 解:(1)设甲 3 次点球射进的次数为 Y,则 $Y\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$,

Y 的可能取值为 0,1,2,3,且 $X=50Y$,则 X 的所有可能的取值为 0,50,100,150. ………… 1 分

$P(X=0)=P(Y=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$;

$P(X=50)=P(Y=1)=C_3^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$;

$P(X=100)=P(Y=2)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$;

$P(X=150)=P(Y=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$, ………… 4 分

所以 X 的概率分布列为

X	0	50	100	150
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

………… 5 分

$E(X)=0\times\frac{1}{27}+50\times\frac{2}{9}+100\times\frac{4}{9}+150\times\frac{8}{27}=100$,

(或 $E(X)=E(50Y)=50E(Y)=50\times3\times\frac{2}{3}=100$). ………… 6 分

(2)设"乙第 i 次射进点球"为事件 $A_i(i=1,2,3)$,则乙总得分为 100 分的事件为 $B=A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$.

………… 8 分

因为 $A_1A_2\overline{A_3}$,$A_1\overline{A_2}A_3$,$\overline{A_1}A_2A_3$ 互斥.

所以 $P(B)=P(A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{2}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{3}$. ………… 11 分

故乙总得分为 100 分的概率为 $\frac{1}{3}$. ………… 12 分

20. 解:(1)因为 C 过点 $A(2,\sqrt{2})$,所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$, ………… 1 分

设 C 的焦距为 $2c$,由 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $c^2=\frac{1}{2}a^2$,所以 $b^2=a^2-c^2=\frac{1}{2}a^2$, ………… 2 分

代入上式,解得 $a^2=8$,$b^2=4$, ………… 3 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ………… 4 分

(2)设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,易知直线 l 的斜率不为 0,设直线 l 的方程为 $x=my+t$,

由 $\begin{cases}x=my+t,\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2+2mty+t^2-8=0$,

则 $\Delta=4m^2t^2-4(m^2+2)(t^2-8)=-8(t^2-4m^2-8)>0$，

$y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+2}, y_1y_2=\dfrac{t^2-8}{m^2+2}$， ………………………………………… 5 分

由 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}=-1$ 得，$\cos\alpha=-\cos\beta=\cos(\pi-\beta)$.

又 $\alpha\in[0,\pi)$，$\pi-\beta\in(0,\pi]$，所以 $\alpha=\pi-\beta$，则 $\alpha+\beta=\pi$， ………………………………………… 6 分

由题意知直线 AM，AN 的斜率存在，所以 $k_{AM}+k_{AN}=0$.

则 $\dfrac{y_1-\sqrt{2}}{x_1-2}+\dfrac{y_2-\sqrt{2}}{x_2-2}=\dfrac{(y_1-\sqrt{2})(x_2-2)+(y_2-\sqrt{2})(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$， ………………………………………… 7 分

所以 $(y_1-\sqrt{2})(my_2+t-2)+(y_2-\sqrt{2})(my_1+t-2)=0$，

则 $2my_1y_2+(t-2-\sqrt{2}m)(y_1+y_2)-2\sqrt{2}(t-2)=0$，

即 $\dfrac{2m(t^2-8)}{m^2+2}+(t-2-\sqrt{2}m)(-\dfrac{2mt}{m^2+2})-2\sqrt{2}(t-2)=0$.

整理得，$4(m-\sqrt{2})(\sqrt{2}m+t-2)=0$，

又知 l 不过点 $A(2,\sqrt{2})$，则 $\sqrt{2}m+t-2\neq0$.

所以 $m=\sqrt{2}$. ………………………………………… 8 分

所以直线 l 的方程为 $x=\sqrt{2}y+t$，则 $\Delta=-8(t^2-16)>0$，所以 $-4<t<4$，

$y_1+y_2=-\dfrac{\sqrt{2}t}{2}, y_1y_2=\dfrac{t^2-8}{4}$，

则点 $A(2,\sqrt{2})$ 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|t|}{\sqrt{3}}$， ………………………………………… 9 分

$|MN|=\sqrt{3[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\sqrt{3\left[\left(-\dfrac{\sqrt{2}t}{2}\right)^2-4\times\dfrac{t^2-8}{4}\right]}=\sqrt{3(8-\dfrac{1}{2}t^2)}$，

则 $S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{|t|}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3(8-\dfrac{1}{2}t^2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}t^2(8-\dfrac{1}{2}t^2)}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\dfrac{1}{2}t^2+(8-\dfrac{1}{2}t^2)}{2}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\dfrac{1}{2}t^2=8-\dfrac{1}{2}t^2$，即 $t=\pm2\sqrt{2}$ 时取等号， ………………………………………… 11 分

故 $\triangle AMN$ 面积的最大值为 $2\sqrt{2}$. ………………………………………… 12 分

21. (1)解：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\dfrac{b}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{b-x}{x^2}$， ………………………………………… 1 分

当 $b\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………………… 2 分

当 $b>0$ 时，$x\in(0,b)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(b,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,b)$ 上单调递增，在 $(b,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………………… 4 分

(2)证明：由 $f(x_1)=f(x_2)$ 得，$ax_1^2-\dfrac{b}{x_1}-\ln x_1=ax_2^2-\dfrac{b}{x_2}-\ln x_2$，

所以 $\ln x_2-\ln x_1=a(x_2^2-x_1^2)+b\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)=a(x_2^2-x_1^2)+\dfrac{b(x_2-x_1)}{x_1x_2}$，

则 $\dfrac{\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}=a(x_2+x_1)+\dfrac{b}{x_1x_2}$， ………………………………………… 5 分

要证 $a(x_1+x_2)^2+b\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)>\dfrac{a+b}{a+2b}$，需证 $(x_1+x_2)\left[a(x_1+x_2)+\dfrac{b}{x_1x_2}\right]>\dfrac{a+b}{a+2b}$

即证 $\dfrac{(x_1+x_2)\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}>\dfrac{a+b}{a+2b}$，

需证 $\dfrac{1+\dfrac{x_2}{x_1}}{\dfrac{x_2}{x_1}-1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}>\dfrac{a+b}{a+2b}$. ………………………………………… 6 分

令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$，设 $g(t)=\dfrac{1+t}{t-1}\ln t\,(t>1)$，则 $g'(t)=\dfrac{t-\dfrac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$，

设 $h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>1)$，则 $h'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\left(\frac{1}{t}-1\right)^2>0$，

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $h(t)>h(1)=0$，

所以 $g'(t)>0$，$g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. …………………………………………………………… 8 分

由 $x_1<a<b<x_2$，得 $\frac{x_2}{x_1}>\frac{b}{a}>1$，所以 $g\left(\frac{x_2}{x_1}\right)>g\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}-1}\ln\frac{b}{a}=\frac{a+b}{b-a}\ln\frac{b}{a}$，

所以需证 $\frac{a+b}{b-a}\ln\frac{b}{a}>\frac{a+b}{a+2b}$，即证 $\ln\frac{b}{a}>\frac{b-a}{a+2b}=\frac{\frac{b}{a}-1}{1+2\left(\frac{b}{a}\right)}$. …………………………… 9 分

令 $m=\frac{b}{a}>1$，且 $\varphi(m)=\ln m-\frac{m-1}{1+2m}(m>1)$，

则 $\varphi'(m)=\frac{1}{m}-\frac{3}{(1+2m)^2}=\frac{4m^2+m+1}{m(1+2m)^2}>0$，

所以 $\varphi(m)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $\varphi(m)>\varphi(1)=0$，

所以 $\ln m>\frac{m-1}{1+2m}$ 成立，…………………………………………………………………………………… 11 分

故 $a(x_1+x_2)^2+b\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)>\frac{a+b}{a+2b}$，得证. ………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 由 $\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$，消去参数 t，得 $x-y+2=0$.

将 $\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\ \rho\sin\theta=y\end{cases}$ 代入 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+1=0$，得 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$；

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$，直线 l 的普通方程为 $x-y+2=0$. ……………… 5 分

(2) 依题意，点 $P(-1,1)$ 在 l 上，

将 l 的参数方程代入 C 的直角坐标方程并整理，得 $t^2-3\sqrt{2}t+1=0$，首先 $\Delta=(-3\sqrt{2})^2-4\times1\times1=14>0$，

设 M,N 对应的参数分别是 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=3\sqrt{2}$，$t_1t_2=1$，显然 t_1,t_2 均为正数，

所以 $\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=3\sqrt{2}$. ………………………………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=\begin{cases}-4(x\geqslant1),\\ -2x-2(-3<x<1),\\ 4(x\leqslant-3),\end{cases}$

当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)\leqslant2$ 化为 $-4\leqslant2$，解得 $x\geqslant1$；

当 $-3<x<1$ 时，$f(x)\leqslant2$ 化为 $-2x-2\leqslant2$，解得 $-2\leqslant x<1$；

当 $x\leqslant-3$ 时，$f(x)\leqslant2$ 化为 $4\leqslant2$，无解；

综上所述，$f(x)\leqslant2$ 的解集为 $\{x|x\geqslant-2\}$；……………………………………………………………… 5 分

(2) 由 (1) 知，$abc=4$，

因为 $(a+b)^2+c^2\geqslant4ab+c^2$（当且仅当 $a=b$ 时，等号成立），

$4ab+c^2=2ab+2ab+c^2\geqslant3\sqrt[3]{(2ab)\times(2ab)\times c^2}=3\sqrt[3]{4(abc)^2}=3\sqrt[3]{4\times4^2}=12$（当且仅当 $2ab=c^2$，即 $a=b=\sqrt{2}$，$c=2$ 时，等号成立），

所以 $(a+b)^2+c^2$ 的最小值为 12. …………………………………………………………………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〞精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。