

2018 北京首都师大附中高二（上）期末

数 学（理）

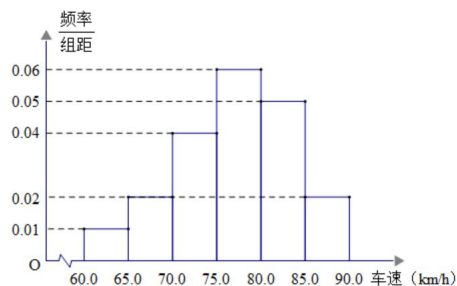
2018.01

本试卷共 8 页，120 分。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

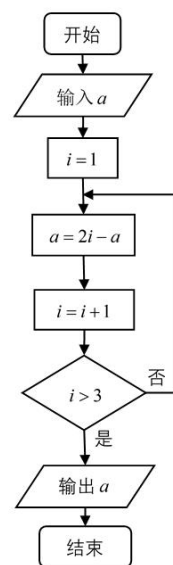
第一部分 （选择题 共 40 分）

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1. 对高速公路某段上汽车行驶速度进行抽样调查, 画出如下频率分布直方图. 根据直方图估计在此路段上汽车行驶速度的众数和行驶速度超过 80km/h 的概率



- (A) 75, 0.25 (B) 80, 0.35
(C) 77.5, 0.25 (D) 77.5, 0.35
2. 某程序框图如图所示, 执行该程序, 若输入的 a 值为 1, 则输出的 a 值为
- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 5
3. 已知点 $F(-6,0)$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1 (m > 0, n > 0)$ 的一个焦点, 且椭圆经过点 $P(5,2)$, 那么 $n =$
- (A) 3 (B) 6
(C) 9 (D) 12
4. 给出下列命题:



①若给定命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}$, 使得 $x^2 + x - 1 < 0$, 则 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}$, 均有 $x^2 + x - 1 \geq 0$;

②若 $p \wedge q$ 为假命题, 则 p, q 均为假命题;

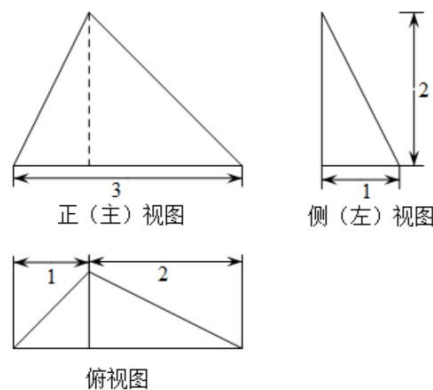
③命题“若 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 则 $x = 2$ ”的否命题为“若 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 则 $x \neq 2$ ”.

其中正确的命题序号是

- (A) ① (B) ①②
(C) ①③ (D) ②③

5. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥四个面的面积中最大的是

- (A) $\sqrt{5}$ (B) 3
(C) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ (D) $3\sqrt{5}$



6. 已知数列 $A: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$, 其中 $a_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4, 5$ 则满足 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3$ 的不同数列 A 一共有

- (A) 15 个 (B) 25 个 (C) 30 个 (D) 35 个

7. 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 点 O 是原点, 如果

$|BF| = 3, |BF| > |AF|, \angle BFO = \frac{2\pi}{3}$, 那么 $|AF|$ 的值为

- (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 3 (D) 6

8. 设 P, Q 为一个正方体表面上的两点, 已知此正方形绕着直线 PQ 旋转 $\theta (0 < \theta < 2\pi)$ 角后能与自身重合, 那么符合条件的直线 PQ 的条数为

- (A) 3 (B) 4 (C) 7 (D) 13

第二部分 (非选择题 共 80 分)

二、填空题(共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

9. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一条渐进线过点 $(1, 2)$, 则 $b =$ _____ ; 其离心率为 _____ .

10. 甲和乙两个城市去年上半年每月的平均气温(单位: $^{\circ}\text{C}$)用茎叶图记录如下, 根据茎叶图可知, 两城市中平均温度较高的城市是 _____, 气温波动较大的城市是 _____.

甲城市					乙城市			
			9	0				
8	7	7	3	1	2	4	7	
			2	2	0	4	7	

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

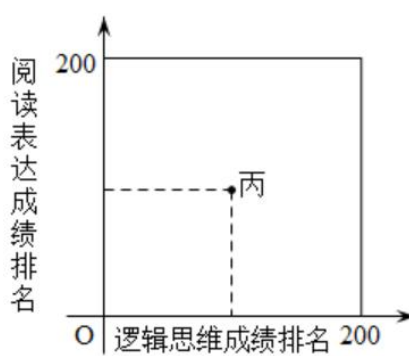
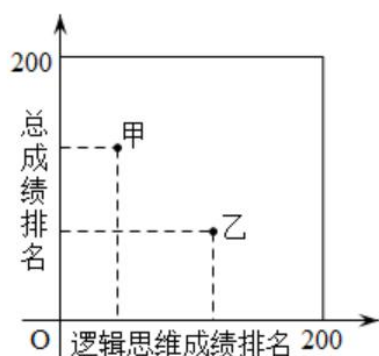
11. 设不等式组 $\begin{cases} x - 2y + 2 \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \geq -2 \end{cases}$ 表示的平面区域为 D . 在区域 D 内随机取一个点, 则此点到直线 $y + 2 = 0$ 的距离大于

2 的概率是 _____.

12. 在某班进行的演讲比赛中, 共有 5 位选手参加, 其中 3 位女生, 2 位男生. 如果 2 位男生不能连续出场, 且女生甲不能排在第一个, 那么出场顺序的排法种数为 _____.

13. 某大学进行自主招生时, 需要进行逻辑思维和阅读表达两项能力的测试. 学校对参加测试的 200 名学生的逻辑思维成绩、阅读表达成绩以及这两项的总成绩进行了排名. 其中甲、乙、丙三位同学的排名情况如下图所示:

得出下面三个结论:



①甲同学的阅读表达成绩排名比他的逻辑思维成绩排名更靠前

②乙同学的逻辑思维成绩排名比他的阅读表达成绩排名更靠前

③甲、乙、丙三位同学的逻辑思维成绩排名中, 甲同学更靠前

④乙同学的总成绩排名比丙同学的总成绩排名更靠前

则所有正确结论的序号是 _____.

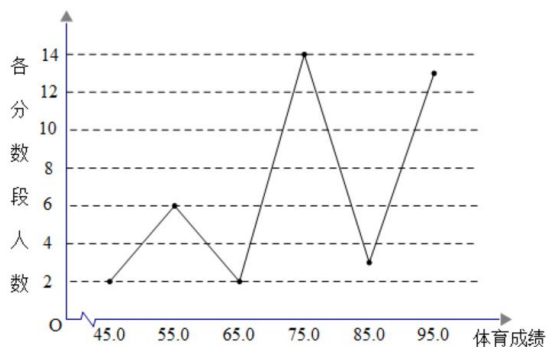
14. 直线 $l: ax + \frac{1}{a}y - 1 = 0$ 与 x, y 轴的交点分别是 A, B , 直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的交点为 C, D . 给出下面三个结论:

① $\forall a \geq 1, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$; ② $\exists a \geq 1, |AB| < |CD|$; ③ $\exists a \geq 1, S_{\triangle ABC} < \frac{1}{2}$.

则所有正确结论的序号是 _____ .

三、解答题(共 4 小题，共 50 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

15. 某校高一年级学生全部参加了体育科目的达标测试, 现从中随机抽取 40 名学生的测试成绩, 整理数据并按分数段 $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100)$ 进行分组, 假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替, 则得到体育成绩的折线图 (如下):



- (I) 体育成绩大于或等于 70 分的学生常被称为“体育良好”. 已知该校高一年级有 10 名学生, 试估计高一全年级中“体育良好”的学生人数;
- (II) 为分析学生平时的体育活动情况, 现从体育成绩在 $[60, 70)$ 和 $[80, 90)$ 的样本学生中随机抽取 2 人, 求在抽取的 2 名学生中, 至少有 1 人体育成绩在 $[60, 70)$ 的概率;
- (III) 假设甲、乙、丙三人的体育成绩分别为 a, b, c 且分别在 $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100)$ 三组中, 其中 $a, b, c \in \mathbf{N}$. 当数据 a, b, c 的方差 s^2 最小时, 写出 a, b, c 的值. (结论不要求证明)

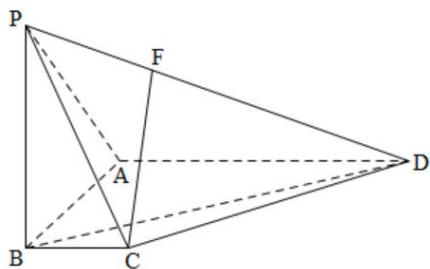
(注: $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$, 其中 $\bar{x}$ 为数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均数)

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PB \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为梯形, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, 且 $PB = AB = AD = 3, BC = 1$.

(I) 若点 F 为 PD 上一点且 $PF = \frac{1}{3}PD$, 证明: $CF \parallel$ 平面 PAB ;

(II) 求直线 BD 与平面 PDA 所成的角;

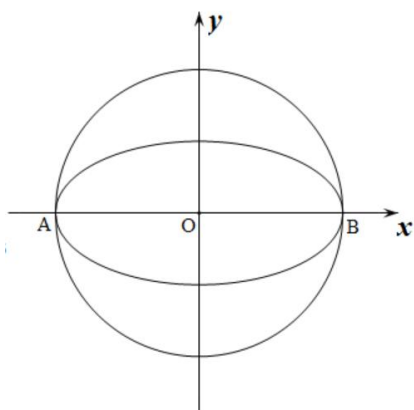
(III) 在线段 PD 上是否存在一点 M , 使得 $CM \perp PA$? 若存在, 求出 PM 的长; 若不存在, 说明理由.



17. 在已知椭圆 $W: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 其左顶点 A 在圆 $O: x^2 + y^2 = 16$ 上.

(I) 求椭圆 W 的方程;

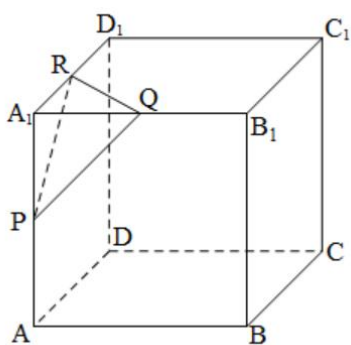
(II) 若点 P 为椭圆 W 上不同于点 A 的点, 直线 AP 与圆 O 的另一个交点为 Q . 是否存在点 P , 使得 $\frac{|PQ|}{|AP|} = 3$? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.



18. 正方形 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 点 P, Q, R 分别是棱 A_1A, A_1B_1, A_1D_1 的中点.

(I) 求二面角 $P - RQ - C_1$ 的余弦值;

(II) 以 $\triangle PQR$ 为底面作正三棱柱, 若此三棱柱另一底面三个顶点也都在该正方体的表面上, 求这个正三棱柱的高.



数学试题答案

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	A	A	C	A	A	D

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

9. $2; \sqrt{5}$

10. 乙;甲

11. $\frac{9}{25}$

12. 60

13. ③④

14. ①②

三、解答题:

15.

解: (I) 体育成绩大于或等于 70 分的学生有 30 人

$$1000 \times \frac{30}{40} = 750 \text{ 人}$$

$\therefore$ “体育良好” 大约为 750 人

(II) 总共有 C_5^2 种组合

$$P = \frac{C_5^2 - C_3^2}{C_5^2} = \frac{7}{10}$$

(III) $a = 70, b = 80, c = 90$

16.

解: (I) 在 PA 上取一点 E , $PE = \frac{1}{3}PA$, 连接 EF .

$$\because PF = \frac{1}{3}PD, \therefore EF \parallel AD, EF = \frac{1}{3}AD = 1, BC = 1,$$

$\therefore AD \parallel BC \therefore EF \parallel BC \therefore$ 四边形 $EFCB$ 为平行四边形

$\therefore FC \parallel EB \therefore FC \parallel$ 面 PAB .

(II) 建立以 A 为原点, $\overrightarrow{AB}$ 为 x 轴, $\overrightarrow{AD}$ 为 y 轴, $\overrightarrow{AE}$ 为 z 轴的空间直角坐标系

$$B(3,0,0), D(0,3,0), P(3,0,3), A(0,0,0), C(3,1,0)$$

$$\overrightarrow{BD} = (-3,3,0), \overrightarrow{AP} = (3,0,3), \overrightarrow{AD} = (0,3,0)$$

设面 PAD 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$

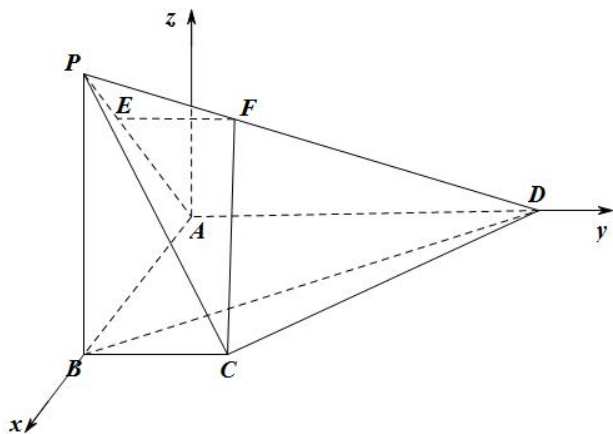
$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, 0, -1) \quad \cos \theta = \left| \frac{-3}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}$$

$\therefore \vec{n}_1$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 BD 与面 PDA 夹角为 $\frac{\pi}{6}$.

(III) 假设存在点 M , 设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PD} = (-3\lambda, 3\lambda, -3\lambda)$

$$\therefore \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PM} = (0, -1, 3) + (-3\lambda, 3\lambda, -3\lambda) = (-3\lambda, 3\lambda - 1, 3 - 3\lambda)$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} = (-3, 0, -3), \text{ 若 } CM \perp PA, \text{ 则 } \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{PA} = 0, \text{ 即 } 9\lambda - 3(3 - 3\lambda) = 0, \lambda = \frac{1}{2}$$



$$\therefore \text{存在点 } M, PM = \frac{1}{2}PD = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

17.

$$\text{解: (I)} \begin{cases} e = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = 4 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ c = 2\sqrt{3} \end{cases} \therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

(II) 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 设直线 AP 为 $y = k(x+4)$

$$\begin{cases} y = k(x+4) \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow (4k^2 + 1)x^2 + 32k^2x + 64k^2 - 16 = 0$$

$$x_1 + (-4) = \frac{-32k^2}{1+4k^2} \Rightarrow x_1 = \frac{4-16k^2}{4k^2+1}, y_1 = \frac{8k}{4k^2+1}$$

$$|AP| = \sqrt{y_1^2 + (x_1+4)^2} = \frac{8\sqrt{1+k^2}}{4k^2+1}$$

$$\text{圆心到直线的距离 } d = \frac{|4k|}{\sqrt{k^2+1}}, |AQ| = 2\sqrt{16-d^2} = \frac{8}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$|PQ| = |AQ| - |AP|$$

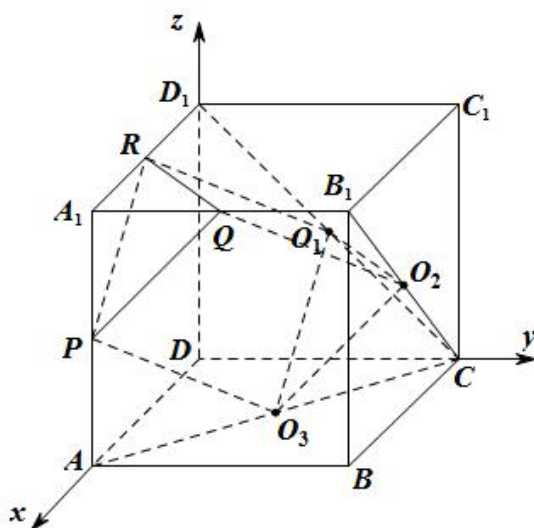
$$\frac{|PQ|}{|AP|} = \frac{|AQ| - |AP|}{|AP|} = \frac{|AQ|}{|AP|} - 1, \text{ 代入 } |AQ|, |AP| \text{ 可得}$$

$$\frac{|PQ|}{|AP|} = \frac{3k^2}{k^2+1} \neq 3 \therefore \text{不存在点 } P, \text{ 使得 } \frac{|PQ|}{|AP|} = 3.$$

18.

解: (I) 以 D 为原点, 以 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$ 的方向分别为
方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,

则点 $D(0,0,0)$, $P(1,0,\frac{1}{2})$, $Q(1,\frac{1}{2},1)$, $R(\frac{1}{2},0,1)$



x 轴, y 轴的正

$$\text{所以 } \overrightarrow{RP} = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{QP} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

设平面 RPQ 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{RP} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} = 0. \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z = 0, \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0. \end{cases}$$

解得 $\vec{n} = (1, -1, 1)$.

平面 CPQ 的法向量为 $\vec{m} = (0, 0, 1)$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ 由图可知, 二面角为钝角, } \therefore \text{余弦值为 } -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(II) 连接 D_1C, B_1C, AC_1 , 分别取他们中点记为 O_1, O_2, O_3 , 分别连接 O_1O_2, O_2O_3, O_1O_3

$\therefore O_1O_2$ 是 $\triangle CB_1D_1$ 的中位线,

$$\therefore O_1O_2 = \frac{1}{2}B_1D_1 \text{ 且 } O_1O_2 \parallel B_1D_1, \quad RQ = \frac{1}{2}B_1D_1 \text{ 且 } RQ \parallel B_1D_1, \therefore O_1O_2 \parallel RQ \text{ 且 } O_1O_2 = RQ.$$

同理可证 $O_1O_3 \parallel RP$ 且 $O_1O_3 = RP$, $O_2O_3 \parallel PQ$ 且 $O_2O_3 = PQ$, 此时 PO_3 即为三棱柱高

$$PA = \frac{1}{2}, AO_3 = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore PQ = \sqrt{PA^2 + AO_3^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用

户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980