

数学试卷

考生须知

1. 本试卷总分 150 分,考试用时 120 分钟。
2. 本试卷共 6 页,分为选择题(40 分)和非选择题(110 分)两个部分。
3. 试卷所有答案必须填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答;第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
4. 考试结束后,请将答题卡交回,试卷自己保留。

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | -3 < x < 2\}$, $B = \{-3, -2, 0\}$, 那么 $A \cap B =$

- (A) $\{-2\}$ (B) $\{0\}$ (C) $\{-2, 0\}$ (D) $\{-2, 0, 2\}$

(2) 在复平面内,复数 $z = i(1+i)$ 对应的点位于

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

(3) 下列函数中,既是偶函数,又在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数的是

- (A) $y = -x^2$ (B) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (C) $y = \cos x$ (D) $y = (\frac{1}{2})^x$

(4) 抛物线 $y^2 = 4x$ 上的点与其焦点的距离的最小值为

- (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$

(5) 若角 α 的终边经过点 $P(1, -2)$, 则 $\sin \alpha$ 的值为

- (A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (C) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

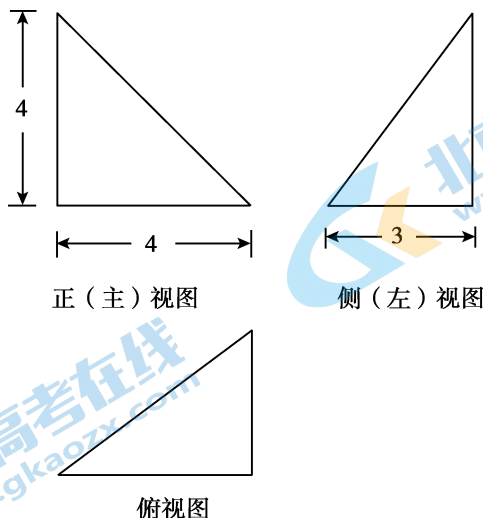
(6) 某三棱锥的三视图如图所示,则该三棱锥的体积是

(A) 6

(B) 8

(C) 12

(D) 24



(7) 若 α 为任意角,则满足 $\cos(\alpha + k \cdot \frac{\pi}{4}) = \cos \alpha$ 的一个 k 值为

(A) 2

(B) 4

(C) 6

(D) 8

(8) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 在下列条件中,使得 $a < b$ 成立的一个充分而不必要条件是

(A) $a^3 < b^3$

(B) $ac^2 < bc^2$

(C) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(D) $a^2 < b^2$

(9) 设 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, S_n 为其前 n 项和, 已知 $a_1 \cdot a_3 = 16$, $S_3 = 14$, 若存在 n_0 使得 $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$ 的乘积最大, 则 n_0 的一个可能值是

(A) 4

(B) 5

(C) 6

(D) 7

(10) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x + 1|, & x < 0 \\ x^2 - 2x, & x \geq 0 \end{cases}$, 若实数 $m \in [-2, 0]$, 则 $|f(x) - f(-1)|$ 在区间 $[m, m + 2]$

上的最大值的取值范围是

(A) $[1, 4]$

(B) $[2, 4]$

(C) $[1, 3]$

(D) $[1, 2]$

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

第二部分(非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分。

(11) 已知向量 $\mathbf{a}=(-1,2)$, $\mathbf{b}=(m,1)$, 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则实数 $m=$ _____.

(12) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1=2, a_2+a_4=8$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

(13) 若将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 则平移后得到的函数图象的解析式为_____.

(14) 若直线 $l: y=x+a$ 将圆 $C: x^2+y^2=1$ 的圆周分成长度之比为 $1:3$ 的两段弧, 则实数 a 的所有可能取值是_____.

(15) 曲线 C 是平面内到定点 $F(\frac{3}{2}, 0)$ 和定直线 $l: x=-\frac{3}{2}$ 的距离之和等于 5 的点的轨迹, 给出下列三个结论:

① 曲线 C 关于 y 轴对称;

② 若点 $P(x, y)$ 在曲线 C 上, 则 y 满足 $|y| \leq 4$;

③ 若点 $P(x, y)$ 在曲线 C 上, 则 $1 \leq |PF| \leq 5$.

其中, 正确结论的序号是_____.

注: 本题给出的结论中, 有多个符合题目要求。全部选对得 5 分, 不选或有错选得 0 分, 其他得 3 分。

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

三、解答题共 6 小题,共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 14 分)

已知 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, a+b=5, c=3$, _____, 是否存在以 a, b, c 为边的三角形? 如果存在, 求出 $\triangle ABC$ 的面积; 若不存在, 说明理由.

从① $\cos C = \frac{1}{3}$; ② $\cos C = -\frac{1}{3}$; ③ $\sin C = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 这三个条件中任选一个, 补充在上面问题中并作答.

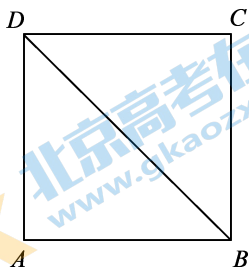
注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分。

(17) (本小题 14 分)

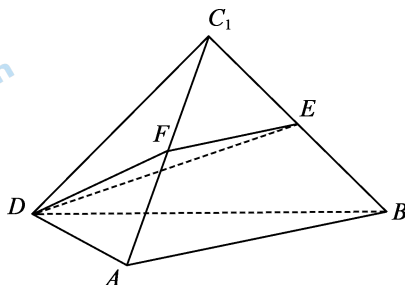
如图一所示, 四边形 $ABCD$ 是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形, 沿 BD 将 C 点翻折到 C_1 点位置 (如图二所示), 使得二面角 $A-BD-C_1$ 成直二面角. E, F 分别为 BC_1, AC_1 的中点.

(I) 求证: $BD \perp AC_1$;

(II) 求平面 DEF 与平面 ABD 所成的锐二面角的余弦值.



图一

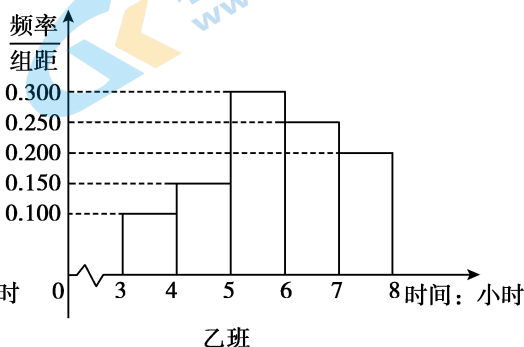
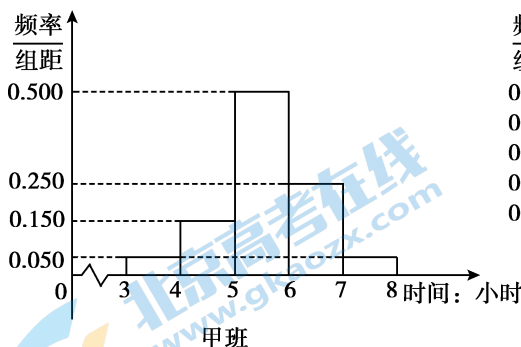


图二

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

(18)(本小题 15 分)

在全民抗击新冠肺炎疫情期间,北京市开展了“停课不停学”活动,此活动为学生提供了多种网络课程资源以供选择使用.活动开展一个月后,某学校随机抽取了高三年级的甲、乙两个班级进行网络问卷调查,统计学生每天的学习时间,将样本数据分成 $[3,4), [4,5), [5,6), [6,7), [7,8]$ 五组,并整理得到如下频率分布直方图:



- (I) 已知该校高三年级共有 600 名学生,根据甲班的统计数据,估计该校高三年级每天学习时间达到 5 小时及以上的学生人数;
- (II) 已知这两个班级各有 40 名学生,从甲、乙两个班级每天学习时间不足 4 小时的学生中随机抽取 3 人,记从甲班抽到的学生人数为 X ,求 X 的分布列和数学期望;
- (III) 记甲、乙两个班级学生每天学习时间的方差分别为 D_1, D_2 ,试比较 D_1 与 D_2 的大小.(只需写出结论)

(19)(本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax^2, a \in \mathbf{R}$.

- (I) 当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (II) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,求实数 a 的取值范围;
- (III) 当 $a=-1$ 时,试写出方程 $f(x)=1$ 根的个数.(只需写出结论)

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

(20)(本小题 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距和长半轴长都为 2. 过椭圆 C 的右焦点 F 作

斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 P, Q 两点.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设点 A 是椭圆 C 的左顶点, 直线 AP, AQ 分别与直线 $x=4$ 相交于点 M, N .

求证: 以 MN 为直径的圆恒过点 F .

(21)(本小题 14 分)

给定数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$. 对 $i=1, 2, \dots, n-1$, 该数列前 i 项 $a_1, a_2, \dots, a_i$ 的最小值记为 A_i , 后 $n-i$ 项 $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$ 的最大值记为 B_i , 令 $d_i = B_i - A_i$.

(I) 设数列 $\{a_n\}$ 为 $2, 1, 6, 3$, 写出 d_1, d_2, d_3 的值;

(II) 设 $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 4)$ 是等比数列, 公比 $0 < q < 1$, 且 $a_1 > 0$, 证明: $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ 是等比数列;

(III) 设 $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ 是公差大于 0 的等差数列, 且 $d_1 > 0$, 证明: $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 是等差数列.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!