机密★启用前(新高考卷)

华中师范大学第一附属中学 2021 年高考押题卷

数 学

本试题卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 M,N 为 $\mathbf{R}$ 的两个不相等的非空子集,若 $(\complement_{\mathbf{R}}N)\subseteq(\complement_{\mathbf{R}}M)$,则下列结论中正确的是

A. $\forall x\in N, x\in M$　　B. $\exists x\in M, x\notin N$　　C. $\exists x\notin N, x\in M$　　D. $\forall x\in M, x\notin \complement_{\mathbf{R}}N$

2. 已知抛物线 $y=mx^2(m>0)$ 上的点 $(x_0,2)$ 到该抛物线焦点 F 的距离为 $\frac{17}{8}$,则 $m=$

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

3. 为了贯彻落实《中共中央国务院全面加强新时代大中小学劳动教育的意见》的文件精神,某学校结合自身实际,推出了《植物栽培》《手工编织》《实用木工》《实用电工》《烹饪技术》五门校本劳动选修课程,要求每个学生从中任选三门进行学习,学生经考核合格后方能获得该学校荣誉毕业证,则甲、乙两人的选课中仅有一门课程相同的概率为

A. $\frac{3}{25}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{3}{5}$

4. 已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若存在 $m\in\mathbf{N}^*$,满足 $\frac{S_{2m}}{S_m}=9$, $\frac{a_{2m}}{a_m}=\frac{5m+1}{m-1}$,则数列 $\{a_n\}$ 的公比为

A. -2　　B. 2　　C. -3　　D. 3

5. 已知大气压强 $p=\frac{\text{压力}}{\text{受力面积}}$,它的单位是"帕斯卡"(Pa,1 Pa=1 N/m^2),大气压强 p(Pa)随海拔高度 h(m)的变化规律是 $p=p_0e^{-kh}$($k=0.000126$),p_0 是海平面大气压强. 已知在某高山 A_1,A_2 两处测得的大气压强分别为 p_1,p_2,且 $\frac{p_1}{p_2}=\frac{1}{2}$,那么 A_1,A_2 两处的海拔高度的差约为(参考数据:$\ln2\approx0.693$)

A. 550m　　B. 1818m　　C. 5500m　　D. 8732m

6. 在平行四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD=60^\circ$,$AB=4$,$AD=3$,且 $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=$

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 10

7. 已知函数 $f(x)=\log_3(9^x+1)-x$，设 $a=f(\frac{1}{10})$，$b=f(-e^{-\frac{9}{10}})$，$c=f(\ln\frac{11}{10})$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

8. 斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线 l 经过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点 F_1，交双曲线两条渐近线于 A,B 两点，F_2 为双曲线的右焦点且 $|AF_2|=|BF_2|$，则双曲线的渐近线方程为

A. $y=\pm x$　　B. $y=\pm\sqrt{2}x$　　C. $y=\pm 2x$　　D. $y=\pm\frac{1}{2}x$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知复数 $z=\cos140^\circ+\mathrm{i}\sin140^\circ$，i 为虚数单位，则下列说法正确的是

A. z 的虚部为 $\mathrm{i}\sin140^\circ$　　B. z 在复平面上对应的点位于第二象限

C. $z=\frac{1}{\bar{z}}$　　D. $z^3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

10. 为庆祝中国共产党成立 100 周年，A、B、C、D 四个兴趣小组举行党史知识竞赛，每个小组各派 10 名同学参赛，记录每名同学失分（均为整数）情况，若该组每名同学失分都不超过 7 分，则该组为"优秀小组"，已知 A、B、C、D 四个小组成员失分数据信息如下，则一定为"优秀小组"的是

A. A 组中位数为 2，极差为 5　　B. B 组平均数为 2，众数为 2

C. C 组平均数为 1，方差大于 0　　D. D 组平均数为 2，方差为 3

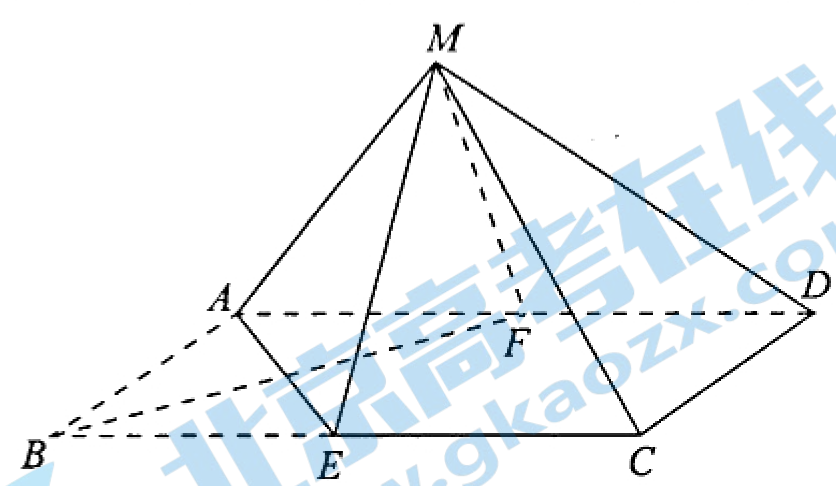
11. 如图，矩形 $ABCD$ 中，已知 $AB=2$，$BC=4$，E 为 BC 的中点. 将△ABE 沿着 AE 向上翻折至△MAE 得到四棱锥 $M-AECD$，平面 AEM 与平面 $AECD$ 所成锐二面角为 α，直线 ME 与平面 $AECD$ 所成角为 β，则下列说法正确的是

A. 若 F 为 AD 中点，则△ABE 无论翻折到哪个位置都有平面 $AEM\perp$ 平面 MBF

B. 若 Q 为 MD 中点，则△ABE 无论翻折到哪个位置都有 CQ // 平面 AEM

C. $\sqrt{2}\sin\alpha=\sin\beta$

D. 存在某一翻折位置，使 $\sqrt{2}\cos\alpha=\cos\beta$



（第 11 题图）

12. 已知函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|-\sin2x-1$，则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 是以 π 为周期的函数

B. $x=\frac{\pi}{2}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

C. 函数 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 $\sqrt{2}-2$

D. 若函数 $f(x)$ 在 $(0,M\pi)$ 上恰有 2021 个零点，则 $\frac{2021}{2}<M\leqslant1011$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}})^n$ 的展开式中，只有第 9 项的二项式系数最大，则展开式中 x 的幂的指数为整数的项共有________项.

14. 写出一个定义在 $\mathbf{R}$ 上且使得命题"若 $f'(1)=0$，则 1 为函数 $f(x)$ 的极值点"为假命题的函数 $f(x)$

$=$________.

15. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的五个顶点都在球 O 的表面上，若底面 $ABCD$ 是梯形，且 $CD//AB$，$AD=BC=CD=\frac{1}{2}AB=\sqrt{5}$，则当球 O 的表面积最小时，四棱锥 $P-ABCD$ 的高的最大值为________.

16. 设 $a_n=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\cdots+\frac{n^2}{2n-1}$，$b_n=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\cdots+\frac{n^2}{2n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，记最接近 a_n-b_n 的整数为 c_n，则 $c_{505}=$________；$c_n=$________.（用 n 表示）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a$（a 为常数），$a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+3n-1(n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）若 $a=\frac{3}{2}$，$b_n=a_n-2n$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

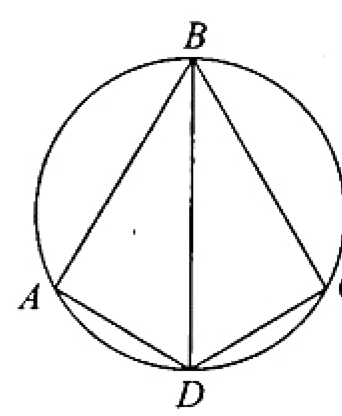
（2）是否存在实数 a，使数列 $\{a_n\}$ 为等差数列？若存在，求出 a 的所有值，若不存在，请说明理由.

18.（12 分）

已知平面四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，$AB=BC=3$，$\angle ABC=60°$.

（1）若 $CD=\sqrt{3}$，求 $\angle ABD$ 所对的圆弧 $\overset{\frown}{AD}$ 的长；

（2）求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.



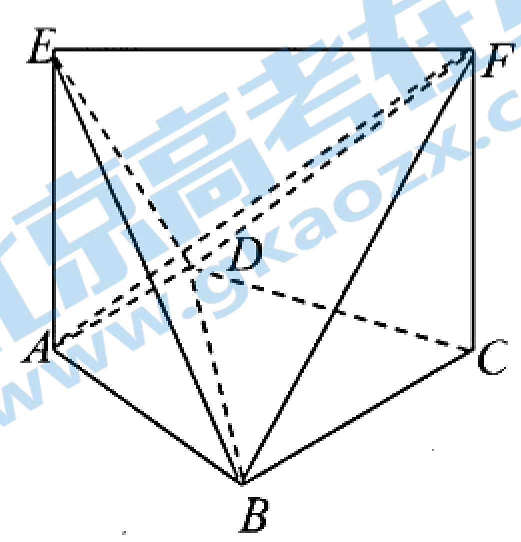
（第 18 题图）

19.（12 分）

七面体玩具是一种常见的儿童玩具. 在几何学中，七面体是指由七个面组成的多面体，常见的七面体有六角锥、五角柱、正三角锥柱、Szilassi 多面体等. 在拓扑学中，共有 34 种拓扑结构明显差异的凸七面体，它们可以看作是由一个长方体经过简单切割而得到的. 在如图所示的七面体 $EABCFD$ 中，$EA\perp$ 平面 $ABCD$，$EA//FC$，$AD//BC$，$AD\perp AB$，$AD=AB=2$，$BC=FC=EA=4$.

（1）在该七面体中，探究以下两个结论是否正确. 若正确，给出证明；若不正确，请说明理由：①$EF//$平面 $ABCD$；②$AF\perp$平面 EBD；

（2）求该七面体的体积.



（第 19 题图）

20.（12 分）

某市消防部门对辖区企业员工进行了一次消防安全知识问卷调查，通过随机抽样，得到参加问卷调查的 500 人（其中 300 人为女性）的得分（满分 100）数据，统计结果如表所示：

得分	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
男性人数	20	60	40	40	30	10
女性人数	10	70	60	75	50	35

（1）把员工分为对消防知识"比较熟悉"（不低于 70 分的）和"不太熟悉"（低于 70 分的）两类，请完成如下

2×2 列联表，并判断是否有 99%的把握认为该企业员工对消防知识的熟悉程度与性别有关？

	不太熟悉	比较熟悉	合计
男性			
女性			
合计			

(2)为增加员工消防安全知识及自救、自防能力，现将企业员工分成两人一组开展“消防安全技能趣味知识”竞赛．在每轮比赛中，小组两位成员各答两道题目，若他们答对题目个数和不少于 3 个，则小组积 1 分，否则积 0 分．已知 A 与 B 在同一小组，A 答对每道题的概率为 p_1，B 答对每道题的概率为 p_2，且 $p_1+p_2=1$，理论上至少要进行多少轮比赛才能使 A、B 所在的小组的积分的期望值不少于 5 分？

附：参考公式及 K^2 检验临界值表

$P(k^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$k^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+mx^2$，$m>0$.

(1)若 $f(x)$在$(1,f(1))$处的切线斜率为$\dfrac{13}{2}$，求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)$g(x)=f(x)-\sin x$，若 $x=0$ 是 $g(x)$的极大值点，求 m 的取值范围.

22.（12 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1$、$F_2$ 分别是椭圆的左、右焦点，P 是椭圆上的动点，直线 PF_1 交椭圆于另一点 M，直线 PF_2 交椭圆于另一点 N，当 P 为椭圆的上顶点时，有 $|PM|=|MF_2|$.

(1)求椭圆 E 的离心率；

(2)求$\dfrac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}$的最大值.

机密★启用前(新高考卷)

华中师范大学第一附属中学 2021 年高考押题卷

数学参考答案和评分标准

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	C	B	C	D	C	D	BCD	AD	ABD	ACD

1.【答案】D

【解析】由已知$(\complement_R N)\subseteq(\complement_R M)$得:$M\subseteq N$,得答案为 D.

2.【答案】B

【解析】点$(x_0,2)$到焦点 F 的距离等于到准线 $y=-\frac{1}{4m}$的距离,则 $2+\frac{1}{4m}=\frac{17}{8}$,解得 $m=2$.

3.【答案】C

【解析】$P=\frac{C_5^1C_4^2}{C_5^3C_5^3}=\frac{3}{10}$.

4.【答案】B

【解析】设数列$\{a_n\}$的公比为 q,若 $q=1$,则$\frac{S_{2m}}{S_m}=2$,与题中条件矛盾,故 $q\neq1$.

$\because\frac{S_{2m}}{S_m}=\frac{\frac{a_1(1-q^{2m})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^m)}{1-q}}=q^m+1=9$,$\therefore q^m=8$. $\because\frac{a_{2m}}{a_m}=\frac{a_1q^{2m-1}}{a_1q^{m-1}}=q^m=8=\frac{5m+1}{m-1}$,$\therefore m=3$,$\therefore q^3=8$,$\therefore q=2$. 故选 B.

5.【答案】

【解析】设 A_1,A_2 两处的海拔高度分别为 h_1,h_2,则$\frac{p_1}{p_2}=\frac{1}{2}=\frac{p_0e^{-kh_1}}{p_0e^{-kh_2}}=e^{k(h_2-h_1)}$,

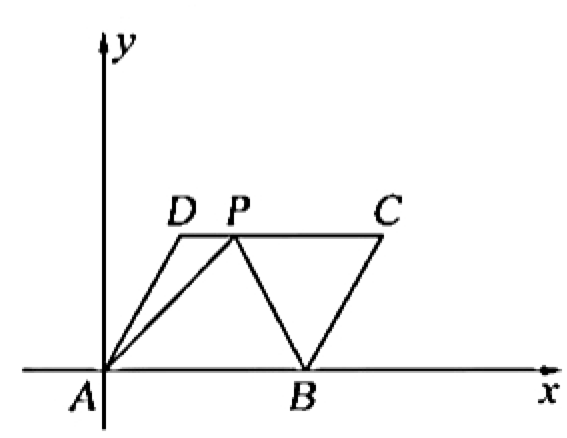
$\therefore h_2-h_1=\frac{-\ln2}{0.000126}\approx\frac{-0.693}{0.000126}=-5500\text{m}$.

6.【答案】D

【解析】方法一:由题知$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$,则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DP}=$

$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos60^\circ+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2=4\times3\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times16=10$. 故选 D.

方法二:如图,以 A 为原点,AB 所在直线为 x 轴,过点 A 且垂直于 AB 的直线为 y 轴,建立直角坐标系,则 $A(0,0)$,$B(4,0)$,$D\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt3}{2}\right)$,$\because\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$,$\therefore|\overrightarrow{DP}|=1$,$\therefore P\left(\frac{5}{2},\frac{3\sqrt3}{2}\right)$,$\therefore\overrightarrow{AP}=\left(\frac{5}{2},\frac{3\sqrt3}{2}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(4,0)$,$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{5}{2}\times4+\frac{3\sqrt3}{2}\times0=10$. 故选 D.



7.【答案】C

【解析】$\because f(x)=\log_3(9^x+1)-x=\log_3(3^x+3^{-x})$,$\therefore f(x)$为偶函数且在$(0,+\infty)$上为增函数,

则 $b=f(-e^{-\frac{9}{10}})=f(e^{-\frac{9}{10}})$，∵$e^x-x-1\geqslant0$(当且仅当 $x=0$ 时取等号)，∴$e^x>x+1(x\neq0)$，

故 $e^{-\frac{9}{10}}>-\frac{9}{10}+1=\frac{1}{10}$，即 $b>a$；∵$\ln x-x+1\leqslant0$(当且仅当 $x=1$ 时取等号)，

∴$\ln x<x-1(x\neq1)$，∴$\ln\frac{11}{10}<\frac{11}{10}-1=\frac{1}{10}$，∴$a>c$. 综上 $b>a>c$. 故选 C.

8.【答案】D

【解析】设 AB 的中点为 M，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=0\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=0\end{cases}$，∴$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，则 $k_{AB}\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}$，∴$k_{OM}=\frac{3b^2}{a^2}$，设直线 AB 的倾斜角为 θ，∵$|AF_2|=|BF_2|$，

∴$AB\perp MF_2$，∴$|OM|=|OF_1|=|OF_2|$，则 OM 的斜率为 $\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{3}{4}$，∴$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，

∴双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，故选 D.

9.【答案】BCD

【解析】由虚部概念知 A 错误；由 $\cos140°<0$，$\sin140°>0$，B 正确；由 $z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$，C 正确；

∵$z^2=\cos^2140°-\sin^2140°+2i\sin140°\cos140°=\cos280°+i\sin280°$，

∴$z^3=z^2\cdot z=\cos420°+i\sin420°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，D 正确.

10.【答案】AD

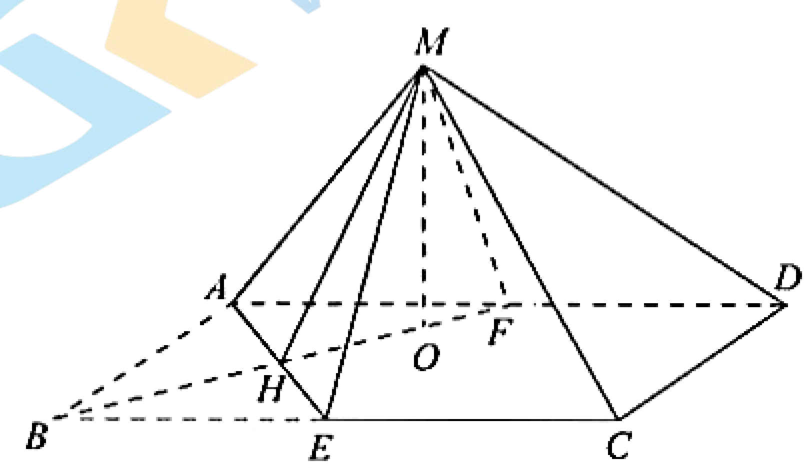
【解析】对 A，因为中位数为 2，极差为 5，故最大值不会大于 $2+5=7$. 故 A 正确；

对 B，失分数据分别为 0,0,0,2,2,2,2,2,2,8，则满足平均数为 2，众数为 2，但不满足每名同学失分都不超过 7 分，故 B 错误；

对 C，失分数据分别为 0,0,0,0,0,0,0,0,1,9，则满足平均数为 1，方差大于 0，但不满足每名同学失分都不超过 7 分，故 C 错误；

对 D，利用反证法，假设有一同学失分超过 7 分，则方差大于 $\frac{1}{10}\times(8-2)^2=3.6>3$. 与题设矛盾，故每名同学失分都不超过 7 分. 故 D 正确.

11.【答案】ABD



【解析】若 F 为 AD 中点，连接 BF 交 AE 于点 H，则 $AE\perp$ 面 MBF，又 $AE\subset$ 面 MAE，所以平面 $AEM\perp$ 平面 MBF，A 正确；

取 AM 中点 P，则 $PQ \mathrel{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AD$，又 $CE \mathrel{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AD$，∴$PQ \mathrel{\underline{/\!/}} CE$，

∴$CQ/\!/EP$，B 正确；

过 M 作 $MO\perp$ 平面 $AECD$，则 O 在 BF 上，所以平面 AEM 与平面 $AECD$ 所成锐二面角为 $\angle MHB$(或其补角)，∴$\sin\alpha=\frac{MO}{MH}$，$\sin\beta=\frac{MO}{ME}=\frac{MO}{\sqrt{2}MH}$，∴$\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta$，C 错误；

若 $\sqrt{2}\cos\alpha=\cos\beta$，又 $\cos\alpha=\frac{OH}{MH}$，$\cos\beta=\frac{OE}{ME}=\frac{OE}{\sqrt{2}MH}$，则 $OE=2OH$，D 正确

12.【答案】ACD

【解析】因为 $f(x+\pi)=f(x)$，所以 $f(x)$是以 π 为周期的函数，A 正确；
又 $f(\pi-x)=|\sin x|+|\cos x|+\sin 2x-1\neq f(x)$，B 错误；
由 A 知只需考虑 $f(x)$在$[0,\pi]$上的最大值.

①当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，则 $t\in[1,\sqrt{2}]$，$f(x)=-t^2+t=u(t)$，易知 $u(t)$在区间$[1,\sqrt{2}]$上单调递减，所以，$f(x)$的最大值为 $u(1)=0$，最小值为 $u(\sqrt{2})=\sqrt{2}-2$.

②当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$时，令 $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$，则 $t\in[1,\sqrt{2}]$，$f(x)=t^2+t-2=v(t)$，易知 $v(t)$在区间$[1,\sqrt{2}]$上单调递增，所以，$f(x)$的最大值为 $v(\sqrt{2})=\sqrt{2}$，最小值为 $v(1)=0$.

综合可知：函数 $f(x)$的最大值为$\sqrt{2}$，最小值为$\sqrt{2}-2$，C 正确；
因为 $f(x)$是以 π 为周期的函数，可以先研究函数 $f(x)$在$(0,\pi]$上的零点个数，易知 $f(\pi)=0$.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$时，令 $f(x)=u(t)=-t^2+t=0$，解得 $t=0$ 或 1，

$t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=0$ 在$(0,\frac{\pi}{2}]$上无解，$t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$ 在$(0,\frac{\pi}{2}]$上仅有一解 $x=\frac{\pi}{2}$.

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，令 $f(x)=v(t)=t^2+t-2=0$，解得 $t=-2$ 或 1.

$t=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=-2$ 在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上无解，$t=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=1$ 在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上也无解.

综合可知：函数 $f(x)$在$(0,\pi]$上有两个零点，分别为 $x=\frac{\pi}{2}$和 $x=\pi$.

又因为 $f(x)$是以 π 为周期的函数，所以，若 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $f(x)$在$(0,n\pi]$上恰有 $2n$ 个零点.

又已知函数 $f(x)$在$(0,M\pi)$上恰有 2021 个零点，所以$\frac{2021}{2}<M\leqslant 1011$，D 正确.

13.【答案】5

【解析】由已知 $n=16$，展开式通项 $T_{r+1}=C_n^r(\sqrt{x})^{n-r}(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}})^r=C_n^r(\frac{1}{2})^r x^{\frac{n}{2}-\frac{3r}{4}}$，则 $r=0,4,8,12,16$ 共 5 项.

14.【答案】$(x-1)^3$（答案不唯一）

15.【答案】$\sqrt{5}$

【解析】球心在平面 $ABCD$ 上射影落在四边形 $ABCD$ 外接圆圆心处（即 AB 中点），设球心 O 到平面 $ABCD$ 的距离为 d，则由 $R^2=d^2+\frac{1}{4}AB^2=d^2+5\geqslant 5$ 得，外接球半径最小值为$\sqrt{5}$，当 $PO\perp$面 $ABCD$ 时，高最大为$\sqrt{5}$.

16.【答案】253；$\begin{cases}\frac{n}{2} & n\text{ 为偶数}\\ \frac{n+1}{2} & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

【解析】$a_{505}=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\cdots\frac{505^2}{1009}$，$b_{505}=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\cdots+\frac{504^2}{1009}+\frac{505^2}{1011}$，

$\therefore a_{505}-b_{505}=1+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\cdots+\frac{505^2-504^2}{1009}-\frac{505^2}{1011}=505-\frac{505^2}{1011}=\frac{505\times 506}{505+506}$

$\therefore \frac{2}{506}<\frac{1}{a_{505}-b_{505}}=\frac{1}{505}+\frac{1}{506}<\frac{2}{505}$

$\therefore 252.5<a_{505}-b_{505}<253$

$\therefore c_{505}=253$.

$a_n-b_n=n-\frac{n^2}{2n+1}=\frac{n^2+n}{2n+1}$

$\therefore \frac{1}{a_n-b_n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\in\left(\frac{2}{n+1},\frac{2}{n}\right)$

$\therefore \frac{n}{2}<a_n-b_n<\frac{n+1}{2}$

若 $n=2k(k\in N^*)$，则 $c_n=k=\frac{n}{2}$，

若 $n=2k-1(k\in N^*)$，则 $c_n=k=\frac{n+1}{2}$，

$\therefore c_n=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\text{ 为偶数}\\ \frac{n+1}{2} & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

17.【解析】

(1) $\because a_n-2n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+n-1=-\frac{1}{2}(a_{n-1}-2n+2)(n\geqslant2)$，……（1 分）

$\therefore b_n=-\frac{1}{2}b_{n-1}(n\geqslant2)$，又 $b_1=a_1-2=-\frac{1}{2}\neq0$，……（2 分）

则数列 $\{b_n\}$ 是以 $-\frac{1}{2}$ 为首项，$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

$\therefore a_n=b_n+2n=(-\frac{1}{2})^n+2n$，……（3 分）

$\therefore S_n=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+n(n+1)=\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right]+n(n+1)$. ……（5 分）

(2) $\because b_n=-\frac{1}{2}b_{n-1}(n\geqslant2)$，$b_1=a-2$，

若 $a=2$，则 $b_n=0$，$\therefore a_n=2n$，$\therefore a_{n+1}-a_n=2$，此时数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；……（7 分）

若 $a\neq2$，则数列 $\{b_n\}$ 为以 $a-2$ 为首项，$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，$\therefore a_1=a$，$a_2=-\frac{1}{2}a+5$，$a_3=\frac{1}{4}a+\frac{11}{2}$，

$\therefore a_1+a_3\neq2a_2$，此时数列 $\{a_n\}$ 不可能为等差数列. ……（9 分）

综上，存在实数 $a=2$，使数列 $\{a_n\}$ 为等差数列. ……（10 分）

18.【解析】

(1) 连接 AC，$AB=BC=3$，$\angle ABC=60^\circ$，$\therefore AC=3$ ……（1 分）

又 $\angle ADC=120^\circ$，在 $\triangle ACD$ 中由余弦定理，$\cos120^\circ=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$，即 $-\frac{1}{2}=\frac{AD^2-6}{2\sqrt{3}AD}$，$\therefore AD=\sqrt{3}$

……（3 分）

又 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R=\frac{AC}{2\sin60^\circ}=\sqrt{3}$ ……（4 分）

$\therefore \triangle OAD$ 为正三角形，$\angle AOD=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \angle ABD$ 所对的圆弧 $\overset{\frown}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$. ……（6 分）

(2) 在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理 $\cos\angle ADC=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$

即 $AD^2+CD^2+AD\cdot CD=9$，……（8 分）

又 $AD^2+CD^2\geqslant 2AD\cdot CD$，$\therefore 9-AD\cdot CD\geqslant 2AD\cdot CD$

$\therefore AD\cdot CD\leqslant 3$ 当且仅当 $AD=CD=\sqrt{3}$ 时等号成立 ……………… ……………………（10 分）

$\therefore S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}AD\cdot DC\cdot\sin 120^\circ\leqslant\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=$

$3\sqrt{3}$，

所以四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $3\sqrt{3}$. … ……………………（12 分）

19.【解析】

(1)结论①正确，结论②错误，理由如下：…… ………………………（1 分）

对于结论①，因为 $EA//FC$ 且 $FC=EA=4$，连接 AC，所以四边形 $EACF$ 是平行四边形，

所以 $EF//AC$，因为 $EF\not\subset$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore EF//$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ 结论①正确 … ……………………………………………………（3 分）

对于结论②，若 $AF\perp$ 平面 EBD，则 $AF\perp BD$，

因为 $EA\perp$ 平面 $ABCD$，$EA//FC$，所以 $FC\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $FC\perp BD$，又因为 $AF\cap FC=F$，所以 $BD\perp$ 平面 AFC，

所以 $BD\perp AC$，而在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$AD\perp AB$，

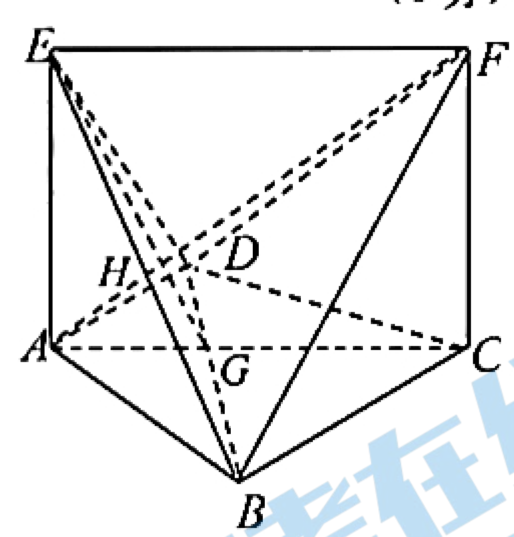
$AD=AB=2$，$BC=4$，所以 $CD=2\sqrt{2}\neq BC$，与 $BD\perp AC$ 矛盾

所以结论②错误. ……………………………………………………………………………（6 分）

(2)方法一：连接 AC，交 BD 于点 G，连接 EG，则在平面 $EACF$ 中，AF 与 EG 相交，设交点为 H，则由 $AC//EF$ 可得：$\frac{AG}{EF}=\frac{AH}{HF}$，又 $\because\frac{AG}{EF}=\frac{AG}{AC}=\frac{AD}{AD+BC}$

$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

$\therefore\frac{AH}{HF}=\frac{1}{3}$，



该七面体的体积等于 $V_{E-ABD}+V_{F-BED}+V_{F-BCD}$

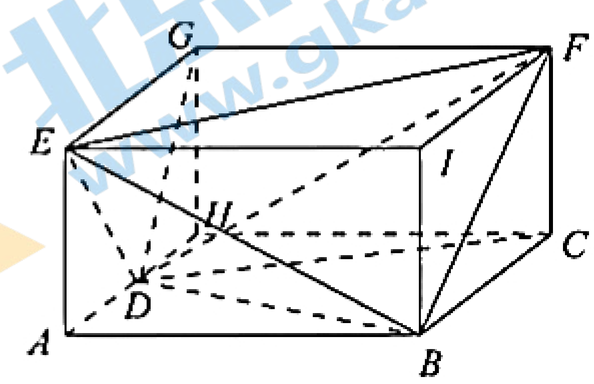
$=V_{E-ABD}+3V_{A-BED}+2V_{E-ABD}=6V_{E-ABD}$

$=6\times\frac{1}{3}\times 4\times\frac{1}{2}\times 2\times 2=16.$ ……………………………… （12 分）

方法二：将该七面体补成如图所示的长方体；

$V_{ABCH-EIFG}-V_{B-EFI}-V_{F-BCD}-V_{D-FCHG}=2\times 4\times 4-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 4\times 4-$

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4\times 4\times 2-\frac{1}{3}\times 4\times 2\times 2=32-\frac{16}{3}-\frac{16}{3}-\frac{16}{3}=16$



方法三：建立空间直角坐标系，利用空间向量求点 F 到平面 BED 的距离后求三棱锥 $F-BED$ 的体积.（参照给分）

20.【解析】

(1)

	不太熟悉	比较熟悉	合计
男性	120	80	200
女性	140	160	300
合计	260	240	500

……………………（2 分）

$\therefore K^2=\frac{500(120\times 160-140\times 80)^2}{260\times 240\times 200\times 300}\approx 8.547>6.635.$

$\therefore$ 有 99% 的把握认为该企业员工对消防知识的了解程度与性别有关. ……………………………（5 分）

(2)A、B 在一轮比赛中积 1 分的概率为：

$P=C_2^1P_1(1-P_1)C_2^2(P_2)^2+C_2^2(P_1)^2C_2^1P_2(1-P_2)+C_2^2(P_1)^2C_2^2(P_2)^2$

$=2P_1P_2(P_1+P_2)-3(P_1P_2)^2$，…………………………………………………………　……………（7 分）

又∵$P_1+P_2=1$，$0\leqslant P_2\leqslant 1$，则 $P_1P_2=(1-P_2)P_2\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$

∴$P=2P_1P_2-3(P_1P_2)^2=-3\left(P_1P_2-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$，且 $0\leqslant P_1P_2\leqslant\frac{1}{4}$，…　……………（8 分）

∴$P_{\max}=\frac{5}{16}$，此时 $P_1P_2=\frac{1}{4}$，…………　………………（10 分）

设 A、B 所在的小组在 n 轮比赛中的积分为 ξ，则 $\xi\sim B(n,p)$，

∴$E\xi=\frac{5}{16}n\geqslant 5$，∴$n\geqslant 16$，所以理论上至少要进行 16 轮比赛. ……………………………………………（12 分）

21.【解析】

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x+1}+2mx$，…………………………………………………（1 分）

∴$f'(1)=\frac{1}{2}+2m=\frac{13}{2}$，∴$m=3$，………………………………………………………………………（2 分）

∴$f'(x)=\frac{1}{x+1}+6x=\frac{6x^2+6x+1}{x+1}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{-3-\sqrt{3}}{6}>-1$，$x_2=\frac{-3+\sqrt{3}}{6}$，

令 $f'(x)>0$，得 $-1<x<x_1$ 或 $x>x_2$；令 $f'(x)<0$，得 $x_1<x<x_2$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，在 (x_1,x_2) 上单调递减

即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-1,\frac{-3-\sqrt{3}}{6}\right)$ 和 $\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{6},+\infty\right)$，

单调递减区间为 $\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{6},\frac{-3+\sqrt{3}}{6}\right)$. ……………………………　……（6 分）

(2) 由题意知 $g(x)=\ln(x+1)+mx^2-\sin x$，$g(0)=0$，$g'(x)=\frac{1}{1+x}+2mx-\cos x$，$g'(0)=0$，

令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=2m-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x$，$h'(0)=2m-1$　……………（7 分）

若 $0<m<\frac{1}{2}$，因为当 $x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$y=-\frac{1}{(1+x)^2}$ 单调递增，所以 $h'(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

又因为 $h'(0)=2m-1<0$，$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2m+1-\frac{1}{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2}>0$，

因此存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $h'(x_0)=0$，

所以当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$h'(x)<h'(x_0)=0$，$g'(x)=h(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 上单调递减，又 $g'(0)=h(0)=0$，

所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,x_0)$ 上单调递减，符合题意　（10 分）

若 $m\geqslant\frac{1}{2}$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)=2m-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x\geqslant 1-\frac{\quad}{(1+x)^2}+\sin x>0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，$g'(x)>g'(0)=0$，$g(x)$ 在 $0,\frac{\pi}{2}$ 上单调递增，因此 $x=0$ 不可能是 $g(x)$ 的极大值点. …………　……………（11 分）

综上，当 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极大值点时，m 的取值范围为 $0,\frac{\quad}{2}$. ………………………………（12 分）

22.【解析】

(1)当 P 为椭圆 E 的上顶点时,$|PF_1|=a$,$\therefore |MF_2|=|PM|=|MF_1|+a$,

又因为 $|MF_1|+|MF_2|=2a$,$\therefore |MF_1|=\frac{a}{2}$,$|PM|=|MF_2|=\frac{3a}{2}$

所以 $\cos\angle MPN=\frac{PM^2+PF_2^2-MF_2^2}{2PM\cdot PF_2}=\frac{\left(\frac{3}{2}a\right)^2+a^2-\left(\frac{3}{2}a\right)^2}{2\cdot\frac{3}{2}a\cdot a}=\frac{1}{3}$

所以 $\cos\angle MPN=1-2\sin^2\angle MPO=\frac{1}{3}$,$\therefore \sin\angle MPO=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore e=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……… ………………………………………… (5 分)

(2)方法一:设 $P(x_0,y_0)$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,$PF_1=\lambda F_1M$,$PF_2=\mu\overrightarrow{F_2N}$,$(\lambda,\mu>0)$

$\therefore(-c-x_0,-y_0)=\lambda(x_1+c,y_1)$,$(c-x_0,-y_0)=\mu(x_2-c,y_2)$,

$\therefore x_1=-\left(\frac{x_0+c}{\lambda}+c\right)$,$y_1=-\frac{y_0}{\lambda}$,

又$\because$点 P 在椭圆上,则 $\frac{\left(\frac{x_0+c}{\lambda}+c\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{y_0}{\lambda}\right)^2}{b^2}=1$,

$\therefore\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)+\frac{2c(1+\lambda)x_0+c^2(1+\lambda)^2}{a^2}=\lambda^2$,又 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,

$\therefore 2c(1+\lambda)x_0+c^2(1+\lambda)^2=(\lambda^2-1)a^2=3c^2(\lambda^2-1)$,

$\therefore\lambda=\frac{x_0+2c}{c}$,同理 $\mu=\frac{x_0-2c}{-c}=\frac{2c-x_0}{c}$(用"$-c$"代替"$c$"),

$\therefore\lambda+\mu=4$, …… …………… (10 分)

$\therefore\frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}=\frac{|PF_1|\cdot|PF_2|}{|PM|\cdot|PN|}=\frac{\lambda\mu}{(\lambda+1)(\mu+1)}=\frac{\lambda\mu}{\lambda\mu+5}=\frac{1}{1+\frac{5}{\lambda\mu}}$

又 $\lambda+\mu\geqslant 2\sqrt{\lambda\mu}$,$\therefore\lambda\mu\leqslant 4$,所以 $\frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}$ 的最大值为 $\frac{4}{9}$. ………………………………………………… (12 分)

方法二:设 $P(x_0,y_0)$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,$\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1M}$,$\overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2N}$,

$\therefore\begin{cases}x_0+\lambda x_1=-c(1+\lambda)\\y_0+\lambda y_1=0\end{cases}$,$\begin{cases}x_0+\mu x_2=c(1+\mu)\\y_0+\mu y_2=0\end{cases}$,

由 $\begin{cases}2x_0^2+3y_0^2=3b^2\\2x_1^2+3y_1^2=3b^2\end{cases}$,得 $2x_0^2+3y_0^2-\lambda^2(2x_1^2+3y_1^2)=3b^2(1-\lambda^2)$,

即 $2(x_0+\lambda x_1)(x_0-\lambda x_1)+3(y_0+\lambda y_1)(y_0-\lambda y_1)=3b^2(1-\lambda^2)$,

$\therefore 2(-c-\lambda c)(x_0-\lambda x_1)=3b^2(1-\lambda^2)$,即 $x_0-\lambda x_1=\frac{3b}{\sqrt{2}}(\lambda-1)$,同理 $x_0-\lambda x_2=\frac{3b}{\sqrt{2}}(1-\mu)$,

$\therefore\lambda x_1-\mu x_2=\frac{3b}{\sqrt{2}}(1-\mu)+\frac{3b}{\sqrt{2}}(1-\lambda)=3c(2-\lambda-\mu)$,

又$\because\lambda x_1-\mu x_2=-c(1+\lambda)-c(1+\mu)=c(-2-\lambda-\mu)$,

$\therefore c(-2-\lambda-\mu)=3c(2-\lambda-\mu)$,$\therefore\lambda+\mu=4$,以下同解法一

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。