

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷 (选择题 共 40 分)

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设集合 $A = \{x \mid |x| \leq 3\}$, $B = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $\{0, 2\}$ (B) $\{-2, 2\}$ (C) $\{-2, 0, 2\}$ (D) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

2. 若复数 z 满足 $z \cdot i = -1 + i$, 则在复平面内 z 对应的点位于

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

3. 下列函数中，值域为 $\mathbf{R}$ 且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是

- (A) $y = -x^3$ (B) $y = x|x|$ (C) $y = x^{-1}$ (D) $y = \sqrt{x}$

4. 抛物线 $x^2 = 4y$ 的准线方程为

- (A) $x = 1$ (B) $x = -1$ (C) $y = 1$ (D) $y = -1$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a : b : c = 4 : 5 : 6$, 则其最大内角的余弦值为

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{3}{5}$

6. 设 $a = 3^{0.2}$, $b = \log_3 2$, $c = \log_{0.2} 3$, 则

- (A) $a > c > b$ (B) $a > b > c$ (C) $b > c > a$ (D) $b > a > c$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，获取更多试题资料及排名分析信息。

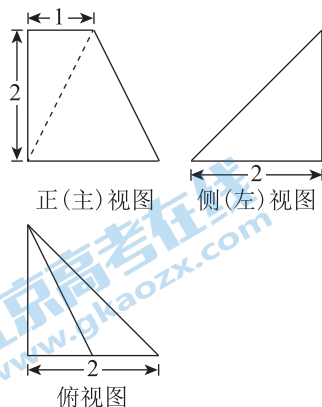
7. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是

(A) 6

(B) 4

(C) 3

(D) 2



8. 若圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + a = 0$ 与 x 轴, y 轴均有公共点, 则实数 a 的取值范围是

(A) $(-\infty, 1]$

(B) $(-\infty, 0]$

(C) $[0, +\infty)$

(D) $[5, +\infty)$

9. 若向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线, 则 “ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ ” 是 “ $2|\mathbf{a} - \mathbf{b}| > |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ ” 的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

10. 设函数 $f(x) = (x-1)e^x$. 若关于 x 的不等式 $f(x) < ax - 1$ 有且仅有一个整数解,

则正数 a 的取值范围是

(A) $(0, e]$

(B) $(0, e^2]$

(C) $(1, \frac{e^2}{2}]$

(D) $(1, \frac{e^2+1}{2}]$

关注北京高考在线官方微信: **北京高考资讯**(ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息。

第 II 卷 (非选择题 共 110 分)

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 设平面向量 $\mathbf{a} = (1, -2)$, $\mathbf{b} = (k, 2)$ 满足 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$ ($a > 0$) 经过点 $(2, 0)$, 则该双曲线渐近线的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设函数 $f(x) = \sin 2x + 2\cos^2 x$. 则函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 若对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) \leq m$ 成立, 则实数 m 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 甲、乙、丙、丁四人参加冬季滑雪比赛, 其中有两人最终获奖. 在比赛结果揭晓之前, 四人的猜测如下表, 其中“ $\checkmark$ ”表示猜测某人获奖, “ $\times$ ”表示猜测某人未获奖, 而“ $\bigcirc$ ”则表示对某人是否获奖未发表意见. 已知四个人中有且只有两个人的猜测是完全正确的, 那么两名获奖者是 $\underline{\hspace{2cm}}$, $\underline{\hspace{2cm}}$.

	甲获奖	乙获奖	丙获奖	丁获奖
甲的猜测	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$
乙的猜测	$\times$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\checkmark$
丙的猜测	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$
丁的猜测	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\checkmark$	$\times$

15. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AB = 4$, E, F, H 分别是棱 PB, BC, PD 的中点, 对于平面 EFH 截四棱锥 $P-ABCD$ 所得的截面多边形, 有以下三个结论:

- ① 截面的面积等于 $4\sqrt{6}$;
- ② 截面是一个五边形;
- ③ 截面只与四棱锥 $P-ABCD$ 四条侧棱中的三条相交.

其中, 所有正确结论的序号是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

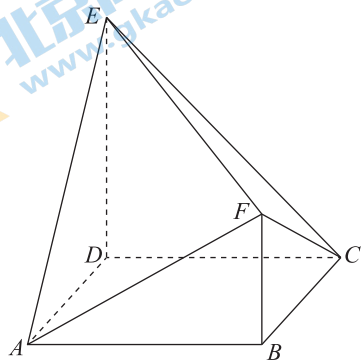
关注北京高考在线官方微信: **北京高考资讯 (ID:bj-gaokao)**, 获取更多试题资料及排名分析信息。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 14 分)

如图，在几何体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， $DE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $DE \parallel BF$ ，且 $DE = 2BF = 2$ 。

- (I) 求证：平面 $BCF \parallel$ 平面 ADE ；
(II) 求钝二面角 $D-AE-F$ 的余弦值。



17. (本小题满分 14 分)

从①前 n 项和 $S_n = n^2 + p$ ($p \in \mathbf{R}$)，② $a_n = a_{n+1} - 3$ ，③ $a_6 = 11$ 且 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 这三个条件中任选一个，补充到下面的问题中，并完成解答。

在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ，_____，其中 $n \in \mathbf{N}^*$ 。

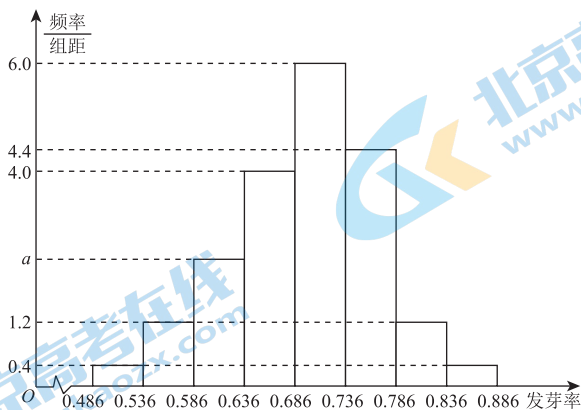
- (I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；
(II) 若 a_1, a_n, a_m 成等比数列，其中 $m, n \in \mathbf{N}^*$ ，且 $m > n > 1$ ，求 m 的最小值。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，获取更多试题资料及排名分析信息。

18. (本小题满分 14 分)

某花卉企业引进了数百种不同品种的康乃馨，通过试验田培育，得到了这些康乃馨种子在当地环境下的发芽率，并按发芽率分为 8 组： $[0.486, 0.536)$ ， $[0.536, 0.586)$ ， $\dots$ ， $[0.836, 0.886)$ 加以统计，得到如图所示的频率分布直方图。



企业对康乃馨的种子进行分级，将发芽率不低于 0.736 的种子定为“A 级”，发芽率低于 0.736 但不低于 0.636 的种子定为“B 级”，发芽率低于 0.636 的种子定为“C 级”。

- (I) 现从这些康乃馨种子中随机抽取一种，估计该种子不是“C 级”种子的概率；
- (II) 该花卉企业销售花种，且每份“A 级”、“B 级”、“C 级”康乃馨种子的售价分别为 20 元、15 元、10 元。某人在市场上随机购买了该企业销售的康乃馨种子两份，共花费 X 元，以频率为概率，求 X 的分布列和数学期望；
- (III) 企业改进了花卉培育技术，使得每种康乃馨种子的发芽率提高到原来的 1.1 倍，那么对于这些康乃馨的种子，与旧的发芽率数据的方差相比，技术改进后发芽率数据的方差是否发生变化？若发生变化，是变大了还是变小了？(结论不需要证明)。

19. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，右焦点为 F ，点 $A(a, 0)$ ，且 $|AF| = 1$ 。

- (I) 求椭圆 C 的方程；
- (II) 过点 F 的直线 l (不与 x 轴重合) 交椭圆 C 于点 M, N ，直线 MA, NA 分别与直线 $x = 4$ 相交于点 P, Q 。求 $\angle PFQ$ 的大小。

20. (本小题满分 15 分)

设函数 $f(x) = a e^x + \cos x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(I) 已知函数 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值;

(II) 若 $a=1$, 证明: 当 $x>0$ 时, $f(x)>2$;

(III) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 内有两个不同的零点, 求 a 的取值范围.

21. (本小题满分 14 分)

设 N 为正整数, 区间 $I_k = [a_k, a_k + 1]$ (其中 $a_k \in \mathbf{R}, k=1, 2, \dots, N$) 同时满足下列两个条件:

① 对任意 $x \in [0, 100]$, 存在 k 使得 $x \in I_k$;

② 对任意 $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, 存在 $x \in [0, 100]$, 使得 $x \notin I_i$ (其中 $i=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, N$).

(I) 判断 $a_k (k=1, 2, \dots, N)$ 能否等于 $k-1$ 或 $\frac{k}{2}-1$; (结论不需要证明)

(II) 求 N 的最小值;

(III) 研究 N 是否存在最大值, 若存在, 求出 N 的最大值; 若不存在, 说明理由.

关注北京高考在线官方微信: **北京高考资讯**(ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息.

西城区高三诊断性测试

数学参考答案

2020.5

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. C 2. A 3. B 4. D 5. A
6. B 7. D 8. A 9. A 10. D

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. $2\sqrt{5}$ 12. $y = \pm 2x$ 13. $\pi, \sqrt{2} + 1$
14. 乙, 丁 15. ② ③

注：第 14 题全部选对得 5 分，其他得 0 分；第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

16. (本小题满分 14 分)

解：(I) 因为 $DE \parallel BF$, $DE \subset$ 平面 ADE , $BF \not\subset$ 平面 ADE ,

所以 $BF \parallel$ 平面 ADE 3 分

同理，得 $BC \parallel$ 平面 ADE .

又因为 $BC \cap BF = B$, $BC \subset$ 平面 BCF , $BF \subset$ 平面 BCF ,

所以平面 $BCF \parallel$ 平面 ADE 6 分

(II) 由 $DE \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为正方形,

得 DA, DC, DE 两两垂直，故分别以 DA, DC, DE 为 x 轴, y 轴, z 轴，如图建立

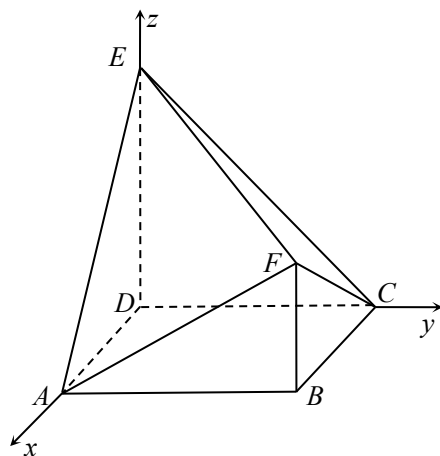
空间直角坐标系， 7 分

则 $D(0,0,0)$, $E(0,0,2)$, $F(2,2,1)$, $A(2,0,0)$,

所以 $\overrightarrow{AE} = (-2, 0, 2)$, $\overrightarrow{AF} = (0, 2, 1)$ 8 分

设平面 AEF 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n} = 0, \overrightarrow{AF} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ 得 } \begin{cases} -2x + 2z = 0, \\ 2y + z = 0, \end{cases}$$



令 $y=1$, 得 $\boldsymbol{n}=(-2,1,-2)$11 分

平面 DAE 的法向量 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$.

设钝二面角 $D-AE-F$ 的平面角为 θ ,

$$\text{则 } |\cos \theta| = |\cos \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle| = \left| \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}| \cdot |\boldsymbol{n}|} \right| = \frac{1}{3},$$

所以 $\cos \theta = -\frac{1}{3}$, 即钝二面角 $D-AE-F$ 的余弦值为 $-\frac{1}{3}$ 14 分

17. (本小题满分 14 分)

解: 选择 ①:

(I) 当 $n=1$ 时, 由 $S_1=a_1=1$, 得 $p=0$ 2 分

当 $n \geq 2$ 时, 由题意, 得 $S_{n-1}=(n-1)^2$, 3 分

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$ ($n \geq 2$). 5 分

经检验, $a_1=1$ 符合上式,

所以 $a_n=2n-1$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 6 分

(II) 由 a_1, a_n, a_m 成等比数列, 得 $a_n^2=a_1 a_m$, 8 分

即 $(2n-1)^2=1 \times (2m-1)$ 9 分

化简, 得 $m=2n^2-2n+1=2(n-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$, 11 分

因为 m, n 是大于 1 的正整数, 且 $m > n$,

所以当 $n=2$ 时, m 有最小值 5. 14 分

选择 ②:

(I) 因为 $a_n=a_{n+1}-3$, 所以 $a_{n+1}-a_n=3$ 2 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差 $d=3$ 的等差数列. 4 分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3n-2$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 6 分

(II) 由 a_1, a_n, a_m 成等比数列, 得 $a_n^2=a_1 a_m$, 8 分

即 $(3n-2)^2=1 \times (3m-2)$ 9 分

化简, 得 $m=3n^2-4n+2=3(n-\frac{2}{3})^2+\frac{2}{3}$, 11 分

因为 m, n 是大于 1 的正整数, 且 $m > n$,

所以当 $n = 2$ 时, m 取到最小值 6.

..... 14 分

选择 ③:

(I) 由 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 得 $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

..... 2 分

又因为 $a_1 = 1, a_6 = a_1 + 5d = 11$,

所以 $d = 2$.

..... 4 分

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1 (n \in \mathbb{N}^*)$.

..... 6 分

(II) 因为 a_1, a_n, a_m 成等比数列, 所以 $a_n^2 = a_1 a_m$,

..... 8 分

即 $(2n-1)^2 = 1 \times (2m-1)$.

..... 9 分

化简, 得 $m = 2n^2 - 2n + 1 = 2(n - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$,

..... 11 分

因为 m, n 是大于 1 的正整数, 且 $m > n$,

所以当 $n = 2$ 时, m 有最小值 5.

..... 14 分

18. (本小题满分 14 分)

解: (I) 设事件 M 为: “从这些康乃馨种子中随机抽取一种, 且该种子不是“C 级”种子”,

..... 1 分

由图表, 得 $(0.4 + 1.2 + a + 4.0 + 6.0 + 4.4 + 1.2 + 0.4) \times 0.05 = 1$,

解得 $a = 2.4$.

..... 2 分

由图表, 知“C 级”种子的频率为 $(0.4 + 1.2 + 2.4) \times 0.05 = 0.2$,

..... 3 分

故可估计从这些康乃馨种子中随机抽取一种, 该种子是“C 级”的概率为 0.2.

因为事件 M 与事件“从这些康乃馨种子中随机抽取一种, 且该种子是“C 级”种子”

为对立事件,

所以事件 M 的概率 $P(M) = 1 - 0.2 = 0.8$.

..... 5 分

(II) 由题意, 任取一种种子, 恰好是“A 级”康乃馨的概率为 $(4.4 + 1.2 + 0.4) \times 0.05 = 0.3$,

恰好是“B 级”康乃馨的概率为 $(4.0 + 6.0) \times 0.05 = 0.5$,

恰好是“C 级”的概率为 $(0.4 + 1.2 + 2.4) \times 0.05 = 0.2$.

..... 7 分

随机变量 X 的可能取值有 20, 25, 30, 35, 40,

且 $P(X=20)=0.2 \times 0.2=0.04$,

$P(X=25)=0.2 \times 0.5+0.5 \times 0.2=0.2$,

$P(X=30)=0.5 \times 0.5+0.3 \times 0.2+0.2 \times 0.3=0.37$,

$P(X=35)=0.3 \times 0.5+0.5 \times 0.3=0.3$,

$P(X=40)=0.3 \times 0.3=0.09$.

..... 9 分

所以 X 的分布列为:

X	20	25	30	35	40
P	0.04	0.2	0.37	0.3	0.09

..... 10 分

故 X 的数学期望 $E(X)=20 \times 0.04+25 \times 0.2+30 \times 0.37+35 \times 0.3+40 \times 0.09=31$.

..... 11 分

(III) 与旧的发芽率数据的方差相比, 技术改进后发芽率数据的方差变大了. 14 分

19. (本小题满分 14 分)

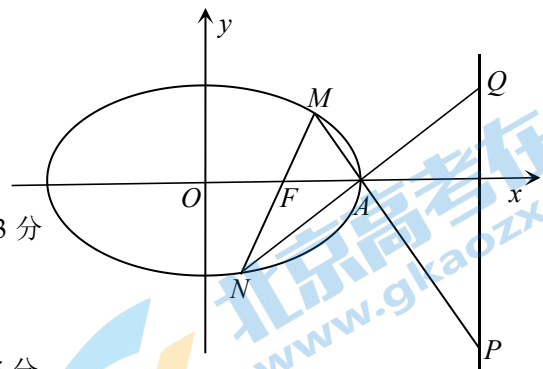
解: (I) 由题意得 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ a - c = 1, \end{cases}$

解得 $a=2, c=1$,

..... 3 分

从而 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 5 分



(II) 当直线 l 的斜率不存在时, 有 $M(1, \frac{3}{2}), N(1, -\frac{3}{2}), P(4, -3), Q(4, 3), F(1, 0)$,

则 $\overrightarrow{FP}=(3, -3), \overrightarrow{FQ}=(3, 3)$, 故 $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FQ}=0$, 即 $\angle PFQ=90^\circ$ 6 分

当直线 l 的斜率存在时, 设 $l: y=k(x-1)$, 其中 $k \neq 0$ 7 分

联立 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ 3x^2+4y^2=12, \end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$ 8 分

由题意, 知 $\Delta > 0$ 恒成立,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}, x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$ 9 分

直线 MA 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$ 10 分

令 $x = 4$, 得 $y_P = \frac{2y_1}{x_1 - 2}$, 即 $P(4, \frac{2y_1}{x_1 - 2})$ 11 分

同理可得 $Q(4, \frac{2y_2}{x_2 - 2})$ 12 分

所以 $\overrightarrow{FP} = (3, \frac{2y_1}{x_1 - 2})$, $\overrightarrow{FQ} = (3, \frac{2y_2}{x_2 - 2})$.

$$\begin{aligned} \text{因为 } \overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FQ} &= 9 + \frac{4y_1y_2}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = 9 + \frac{4k^2(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = 9 + \frac{4k^2[x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1]}{x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} \\ &= 9 + \frac{4k^2(\frac{4k^2 - 12}{4k^2 + 3} - \frac{8k^2}{4k^2 + 3} + 1)}{\frac{4k^2 - 12}{4k^2 + 3} - \frac{16k^2}{4k^2 + 3} + 4} = 9 + \frac{4k^2[(4k^2 - 12) - 8k^2 + (4k^2 + 3)]}{(4k^2 - 12) - 16k^2 + 4(4k^2 + 3)} = 0, \end{aligned}$$

所以 $\angle PFQ = 90^\circ$.

综上, $\angle PFQ = 90^\circ$ 14 分

20. (本小题满分 15 分)

解: (I) 函数 $f(x)$ 为偶函数,

所以 $f(-\pi) = f(\pi)$, 即 $ae^{-\pi} - 1 = ae^{\pi} - 1$, 2 分

解得 $a = 0$.

验证知 $a = 0$ 符合题意. 4 分

(II) $f'(x) = e^x - \sin x$ 6 分

由 $x > 0$, 得 $e^x > 1$, $\sin x \in [-1, 1]$, 7 分

则 $f'(x) = e^x - \sin x > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数.

故 $f(x) > f(0) = 2$, 即 $f(x) > 2$ 9 分

(III) 由 $f(x) = ae^x + \cos x = 0$, 得 $a = -\frac{\cos x}{e^x}$.

设函数 $h(x) = -\frac{\cos x}{e^x}$, $x \in [0, \pi]$, 10 分

则 $h'(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$ 11 分

令 $h'(x) = 0$, 得 $x = \frac{3\pi}{4}$.

随着 x 变化, $h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表所示:

x	$(0, \frac{3\pi}{4})$	$\frac{3\pi}{4}$	$(\frac{3\pi}{4}, \pi)$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	↗	极大值	↘

所以 $h(x)$ 在 $(0, \frac{3\pi}{4})$ 上单调递增, 在 $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$ 上单调递减. 13 分

又因为 $h(0) = -1$, $h(\pi) = e^{-\pi}$, $h(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}}$,

所以当 $a \in [e^{-\pi}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}})$ 时, 方程 $a = -\frac{\cos x}{e^x}$ 在区间 $[0, \pi]$ 内有两个不同解, 且在区间 $[0, \frac{3\pi}{4})$ 与 $(\frac{3\pi}{4}, \pi]$ 上各有一个解.

即所求实数 a 的取值范围为 $[e^{-\pi}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}})$ 15 分

21. (本小题满分 14 分)

解: (I) a_k 可以等于 $k-1$, 但 a_k 不能等于 $\frac{k}{2}-1$ 3 分

(II) 记 $b-a$ 为区间 $[a, b]$ 的长度,

则区间 $[0, 100]$ 的长度为 100, I_k 的长度为 1.

由①, 得 $N \geq 100$ 6 分

又因为 $I_1 = [0, 1]$, $I_2 = [1, 2]$, $\dots$, $I_{100} = [99, 100]$ 显然满足条件①, ②.

所以 N 的最小值为 100. 8 分

(III) N 的最大值存在, 且为 200. 9 分

解答如下:

(1) 首先, 证明 $N \leq 200$.

由②, 得 $I_1, I_2, \dots, I_N$ 互不相同, 且对于任意 k , $I_k \cap [0, 100] \neq \emptyset$.

不妨设 $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$.

如果 $a_2 \leq 0$, 那么对于条件②, 当 $k=1$ 时, 不存在 $x \in [0, 100]$, 使得

$x \notin I_i (i=2,3,\cdots,N)$.

这与题意不符, 故 $a_2 > 0$.

..... 10 分

如果 $a_{k+1} \leq a_{k-1} + 1$, 那么 $I_k \subseteq I_{k-1} \cup I_{k+1}$,

这与条件②中“存在 $x \in [0,100]$, 使得 $x \notin I_i (i=1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,N)$ ”矛盾,

故 $a_{k+1} > a_{k-1} + 1$.

所以 $a_4 > a_2 + 1 > 1$, $a_6 > a_4 + 1 > 2$, $\cdots$, $a_{200} > a_{198} + 1 > 99$,

则 $a_{200} + 1 > 100$.

故 $I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_{200} \supseteq [0,100]$.

若存在 I_{201} , 这与条件②中“存在 $x \in [0,100]$, 使得 $x \notin I_i (i=1,2,\cdots,200)$ ”矛盾,

所以 $N \leq 200$.

..... 12 分

(2) 给出 $N = 200$ 存在的例子.

令 $a_k = -\frac{1}{2} + \frac{100}{199}(k-1)$, 其中 $k=1,2,\cdots,200$, 即 $a_1, a_2, \cdots, a_{200}$ 为等差数列, 公差

$$d = \frac{100}{199}.$$

由 $d < 1$, 知 $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$, 则易得 $I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_{200} = [-\frac{1}{2}, \frac{201}{2}]$,

所以 $I_1, I_2, \cdots, I_{200}$ 满足条件①.

又公差 $d = \frac{100}{199} > \frac{1}{2}$,

所以 $\frac{100}{199}(k-1) \in I_k$, $\frac{100}{199}(k-1) \notin I_i (i=1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,N)$. (注: $\frac{100}{199}(k-1)$

为区间 I_k 的中点对应的数)

所以 $I_1, I_2, \cdots, I_{200}$ 满足条件②.

综合 (1) (2) 可知 N 的最大值存在, 且为 200.

..... 14

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID: bj-gaokao）
扫码关注获取更多



关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯](https://www.gaokzx.com) (ID:bj-gaokao)，获取更多试题资料及排名分析信息。