

高二数学（文科）

2018.1

试卷满分：150 分 考试时间：120 分钟

题号	一	二	三						本卷总分
			15	16	17	18	19	20	
分数									

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1. 直线 $x - y + \sqrt{3} = 0$ 的倾斜角为 ()			
(A) 30	(B) 45	(C) 60	(D) 135
2. 命题 “对任意 $x > 3$ ，都有 $\ln x > 1$ ” 的否定是 ()			
(A) 存在 $x > 3$, 使得 $\ln x > 1$		(B) 对任意 $x > 3$, 都有 $\ln x \leq 1$	
(C) 存在 $x > 3$, 使得 $\ln x \leq 1$		(D) 对任意 $x \leq 3$, 都有 $\ln x > 1$	
3. 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的焦点到其渐近线的距离为 ()			
(A) 1	(B) $\sqrt{2}$	(C) 2	(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. 设 α, β 是两个不同的平面， a, b, c 是三条不同的直线，()			
(A) 若 $a \perp b$ ， $b \perp c$ ，则 $a \parallel c$		(B) 若 $a \parallel \alpha$ ， $b \parallel \alpha$ ，则 $a \parallel b$	
(C) 若 $a \perp b$ ， $a \perp \alpha$ ，则 $b \parallel \alpha$		(D) 若 $a \perp \alpha$ ， $a \perp \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$	
5. “方程 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$ 表示的曲线为椭圆” 是 “ $m > n > 0$ ” 的 ()			
(A) 充分不必要条件		(B) 必要不充分条件	
(C) 充要条件		(D) 既不充分也不必要条件	
6. 设 α, β 是两个不同的平面， l 是一条直线，若 $l \parallel \alpha$ ， $l \parallel \beta$ ， $\alpha \cap \beta = m$ ，则 ()			
(A) l 与 m 平行	(B) l 与 m 相交	(C) l 与 m 异面	(D) l 与 m 垂直

7. 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，直线 $l: x = -\frac{3}{2}$ ，若过焦点 F 的直线与抛物线 C 相交于 A, B 两点，则以线段 AB 为直径的圆与直线 l 的位置关系为 ()

(A) 相交

(B) 相切

(C) 相离

(D) 以上三个答案均有可能

8. 设 a 为空间中的一条直线，记直线 a 与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的六个面所在的平面相交的平面个数为 m ，则 m 的所有可能取值构成的集合为 ()

(A) $\{2, 4\}$

(B) $\{2, 6\}$

(C) $\{4, 6\}$

(D) $\{2, 4, 6\}$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。把答案填在题中横线上。

9. 命题“若 $a^2 - b^2 = 0$ ，则 $a = b$ ”的逆否命题为_____。

10. 经过点 $M(2, 1)$ 且与直线 $3x - y + 8 = 0$ 垂直的直线方程为_____。

11. 一个四棱锥的三视图如图所示，那么这个四棱锥的体积为_____。

12. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ， $AB \perp BC$ 。以 BC 所在的直线为轴将 $\triangle ABC$ 旋转一周，则旋转所得圆锥的侧面积为_____。

13. 若双曲线 C 的一个焦点在直线 $l: 4x - 3y + 20 = 0$ 上，一条渐近线与 l 平行，且双曲线 C 的焦点在 x 轴上，则双曲线 C 的标准方程为_____；离心率为_____。

14. 在平面直角坐标系中，曲线 C 是由到两个定点 $A(1, 0)$ 和点 $B(-1, 0)$ 的距离之积等于 2 的所有点组成的。对于曲线 C ，有下列四个结论：

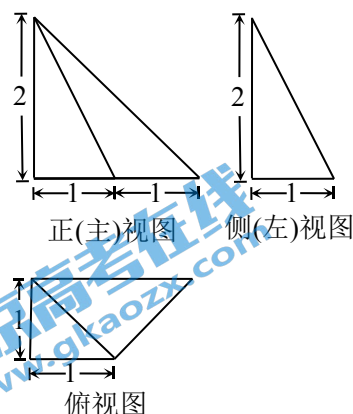
① 曲线 C 是轴对称图形；

② 曲线 C 是中心对称图形；

③ 曲线 C 上所有的点都在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 内；

④ 曲线 C 上所有的点的纵坐标 $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 。

其中，所有正确结论的序号是_____。



长按识别关注

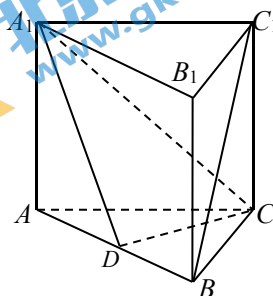
三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， D 为 AB 的中点.

(I) 求证： $CD \perp$ 平面 ABB_1A_1 ；

(II) 求证： $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD .



16. (本小题满分 13 分)

已知圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 8y + m = 0$ ，其中 $m \in \mathbf{R}$.

(I) 如果圆 C 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相外切，求 m 的值；

(II) 如果直线 $x + y - 3 = 0$ 与圆 C 相交所得的弦长为 $2\sqrt{7}$ ，求 m 的值.

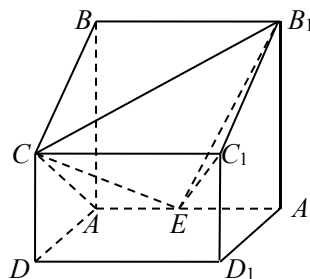
17. (本小题满分 13 分)

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp AD$ ， $AD = CD = 1$ ， $AA_1 = AB = 2$ ， E 为 AA_1 的中点.

(I) 求四棱锥 $C-AEB_1B$ 的体积；

(II) 求证： $BC \perp C_1E$ ；

(III) 判断线段 B_1C 上是否存在一点 M (与点 C 不重合)，使得 C, D, E, M 四点共面？(结论不要求证明)



18. (本小题满分 13 分)

设 F 为抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点, A, B 是抛物线 C 上的两个动点.

(I) 若直线 AB 经过焦点 F , 且斜率为 2, 求 $|AB|$;

(II) 若直线 $l: x - y + 4 = 0$, 求点 A 到直线 l 的距离的最小值.

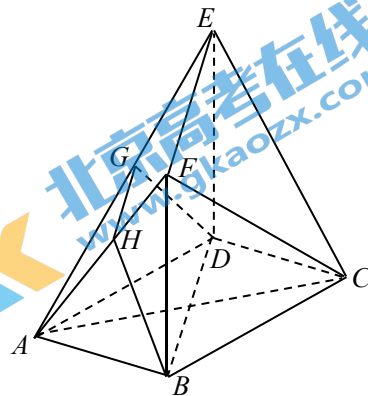
19. (本小题满分 14 分)

如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 四边形 $BDEF$ 是矩形, 平面 $BDEF \perp$ 平面 $ABCD$.

(I) 求证: 平面 $ACF \perp$ 平面 $BDEF$;

(II) 若过直线 BD 的一个平面与线段 AE 和 AF 分别相交于点 G 和 H (点 G 与点 A, E 均不重合), 求证: $EF \parallel GH$;

(III) 判断线段 CE 上是否存在一点 M , 使得平面 $BDM \parallel$ 平面 AEF ? 若存在, 求 $\frac{EM}{EC}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



20. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$. 点 P 为圆 $M: x^2 + y^2 = 13$ 上任意一点, O 为坐标原点.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 设直线 l 经过点 P 且与椭圆 C 相切, l 与圆 M 相交于另一点 A , 点 A 关于原点 O 的对称点为 B , 证明: 直线 PB 与椭圆 C 相切.

高二数学（文科）参考答案及评分标准

2018.1

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. B 2. C 3. A 4. D 5. B 6. A 7. C 8. D

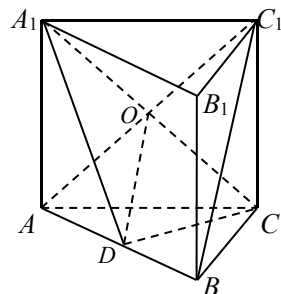
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 若 $a \neq b$ ，则 $a^2 - b^2 \neq 0$ 10. $x + 3y - 5 = 0$ 11. 112. 15π 13. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, $\frac{5}{3}$ 14. ① ②

注：第 13 题第一空 3 分；第二空 2 分；第 14 题多选、少选或错选均不得分。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。

15. (本小题满分 13 分)

(I) 证明：因为正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ， D 为 AB 的中点，所以 $CD \perp AB$ ， $AA_1 \perp$ 底面 ABC1 分又因为 $CD \subset$ 底面 ABC ，所以 $AA_1 \perp CD$3 分又因为 $AA_1 \cap AB = A$ ， $AB \subset$ 平面 ABB_1A_1 ， $AA_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 ，所以 $CD \perp$ 平面 ABB_1A_16 分(II) 证明：连接 AC_1 ，设 $A_1C \cap AC_1 = O$ ，连接 OD ，7 分由正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ，得 $AO = OC_1$ ，又因为在 $\triangle ABC_1$ 中， $AD = DB$ ，所以 $OD \parallel BC_1$10 分又因为 $BC_1 \not\subset$ 平面 A_1CD ， $OD \subset$ 平面 A_1CD ，所以 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD13 分

16. (本小题满分 13 分)

(I) 解：将圆 C 的方程配方，得 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 - m$ ，1 分所以圆 C 的圆心为 $(3, 4)$ ，半径 $r = \sqrt{25 - m}$ ($m < 25$).3 分

因为圆 C 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相外切,

所以两圆的圆心距等于其半径和, 即 $\sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 1 + \sqrt{25-m}$,5 分

解得 $m=9$7 分

(II) 解: 圆 C 的圆心到直线 $x+y-3=0$ 的距离 $d = \frac{|3+4-3|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$9 分

因为直线 $x+y-3=0$ 与圆 C 相交所得的弦长为 $2\sqrt{7}$,

所以由垂径定理, 可得 $r^2 = 25 - m = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2$,11 分

解得 $m=10$13 分

17. (本小题满分 13 分)

(I) 解: 因为 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AA_1 \perp AD$.

又因为 $AB \perp AD$, $AA_1 \cap AB = A$,

所以 $AD \perp$ 平面 ABB_1A_11 分

因为 $AB \parallel CD$,

所以四棱锥 $C-AEB_1B$ 的体积 $V_{C-AEB_1B} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{四边形}AEB_1B} \cdot AD$ 2 分

$$= \frac{1}{3} \times \left[\frac{1}{2} \times (1+2) \times 2 \right] \times 1 = 1. \quad \text{.....4 分}$$

(II) 证明: 在底面 $ABCD$ 中, 因为 $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $AD = CD = 1$, $AB = 2$,

所以 $AC = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{2}$,

所以 $AB^2 = AC^2 + BC^2$, 即 $BC \perp AC$6 分

因为在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $CC_1 \perp BC$,

又因为 $CC_1 \cap AC = C$,

所以 $BC \perp$ 平面 $CAEC_1$,8 分

又因为 $C_1E \subset$ 平面 $CAEC_1$,

所以 $BC \perp C_1E$10 分

(III) 答: 对于线段 B_1C 上任意一点 M (与点 C 不重合), C, D, E, M 四点都不共面.

.....13 分

18. (本小题满分 13 分)

(I) 解: 由题意, 得 $F(\frac{1}{2}, 0)$, 则直线 AB 的方程为 $y = 2(x - \frac{1}{2})$2 分

$$\text{由} \begin{cases} y = 2(x - \frac{1}{2}), \\ y^2 = 2x, \end{cases} \text{消去 } y, \text{得 } 4x^2 - 6x + 1 = 0. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

设点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } \Delta > 0, \text{ 且 } x_1 + x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{4}, \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{5} |x_1 - x_2| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{5}{2}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(II) 解: 设 $A(x_0, y_0)$,

$$\text{则点 } A \text{ 到直线 } l \text{ 距离 } d = \frac{|x_0 - y_0 + 4|}{\sqrt{2}}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由 } A \text{ 是抛物线 } C \text{ 上的动点, 得 } y_0^2 = 2x_0, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } d = \frac{\sqrt{2}}{2} |\frac{1}{2} y_0^2 - y_0 + 4| = \frac{\sqrt{2}}{4} |(y_0 - 1)^2 + 7|, \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以当 } y_0 = 1 \text{ 时, } d_{\min} = \frac{7\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{即点 } A \text{ 到直线 } l \text{ 的距离的最小值 } \frac{7\sqrt{2}}{4}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

19. (本小题满分 14 分)

(I) 证明: 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以 $AC \perp BD$ 1 分

又因为平面 $BDEF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $BDEF \cap$ 平面 $ABCD = BD$,

且 $AC \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AC \perp$ 平面 $BDEF$ 3 分

又因为 $AC \subset$ 平面 ACF ,

所以平面 $ACF \perp$ 平面 $BDEF$ 5 分

(II) 证明: 由题意, $EF \parallel BD$, $EF \not\subset$ 平面 $BDGH$, $BD \subset$ 平面 $BDGH$,

所以 $EF \parallel$ 平面 $BDGH$, 7 分

又因为 $EF \subset$ 平面 AEF , 平面 $AEF \cap$ 平面 $BDGH = GH$,

所以 $EF \parallel GH$ 9 分

(III) 答: 线段 CE 上存在一点 M , 使得平面 $BDM \parallel$ 平面 AEF , 此时 $\frac{EM}{EC} = \frac{1}{2}$10 分

以下给出证明过程.

证明: 设 CE 的中点为 M , 连接 DM , BM ,

因为 $BD \parallel EF$, $BD \not\subset$ 平面 AEF , $EF \subset$ 平面 AEF ,

所以 $BD \parallel$ 平面 AEF 11 分

设 $AC \cap BD = O$, 连接 OM ,

在 $\triangle ACE$ 中, 因为 $OA = OC$, $EM = MC$,

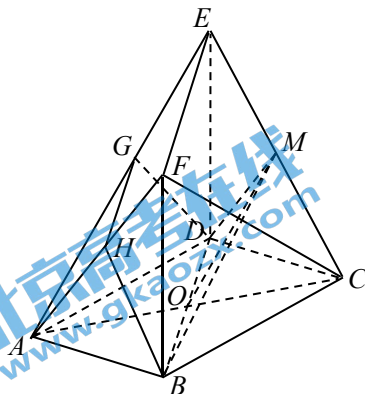
所以 $OM \parallel AE$,

又因为 $OM \not\subset$ 平面 AEF , $AE \subset$ 平面 AEF ,

所以 $OM \parallel$ 平面 AEF 13 分

又因为 $OM \cap BD = O$, $OM, BD \subset$ 平面 BDM ,

所以平面 $BDM \parallel$ 平面 AEF 14 分



20. (本小题满分 14 分)

(I) **解:** 由题意, 知 $c = \sqrt{5}$, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 1 分

所以 $a = 3$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2$, 3 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 4 分

(II) **证明:** 由题意, 点 B 在圆 M 上, 且线段 AB 为圆 M 的直径, 5 分
所以 $PA \perp PB$.

当直线 $PA \perp x$ 轴时, 易得直线 PA 的方程为 $x = \pm 3$,

由题意, 得直线 PB 的方程为 $y = \pm 2$,

显然直线 PB 与椭圆 C 相切.

同理当直线 $PA \parallel x$ 轴时, 直线 PB 也与椭圆 C 相切. 7 分

当直线 PA 与 x 轴既不平行也不垂直时,

设点 $P(x_0, y_0)$, 直线 PA 的斜率为 k , 则 $k \neq 0$, 直线 PB 的斜率 $-\frac{1}{k}$,

所以直线 PA : $y - y_0 = k(x - x_0)$, 直线 PB : $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$, 9 分

$$\text{由} \begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0), \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases} \quad \text{消去 } y,$$

得 $(9k^2 + 4)x^2 + 18(y_0 - kx_0)kx + 9(y_0 - kx_0)^2 - 36 = 0$11 分

因为直线 PA 与椭圆 C 相切,

所以 $\Delta_1 = [18(y_0 - kx_0)k]^2 - 4(9k^2 + 4)[9(y_0 - kx_0)^2 - 36] = 0$,

整理, 得 $\Delta_1 = -144[(x_0^2 - 9)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 4] = 0$. (1)12 分

同理, 由直线 PB 与椭圆 C 的方程联立,

得 $\Delta_2 = -144[(x_0^2 - 9)\frac{1}{k^2} + 2x_0y_0\frac{1}{k} + y_0^2 - 4]$. (2)

因为点 P 为圆 $M: x^2 + y^2 = 13$ 上任意一点,

所以 $x_0^2 + y_0^2 = 13$, 即 $y_0^2 = 13 - x_0^2$.

代入 (1) 式, 得 $(x_0^2 - 9)k^2 - 2x_0y_0k + (9 - x_0^2) = 0$,

代入 (2) 式, 得 $\Delta_2 = \frac{144}{k^2}[(x_0^2 - 9) + 2x_0y_0k + (y_0^2 - 4)k^2]$
 $= -\frac{144}{k^2}[(x_0^2 - 9) + 2x_0y_0k + (9 - x_0^2)k^2]$
 $= \frac{144}{k^2}[(x_0^2 - 9)k^2 - 2x_0y_0k + (9 - x_0^2)]$
 $= 0$.

所以此时直线 PB 与椭圆 C 相切.

综上, 直线 PB 与椭圆 C 相切.14 分