2023 北京和平街一中高一（上）期中

数　学

班级______ 姓名______ 学号______

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}\,|\,x<3\}$，那么集合 $A\cup B$ 等于（　）

A. $[-1,3)$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{-1,0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2,3\}$

2. 设命题 $P:\exists x\in\mathbf{R},x+1\geq 0$，则 $\neg P$ 为（　）

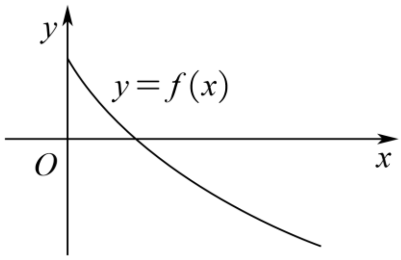
A. $\forall x\in\mathbf{R},x+1\geq 0$　　B. $\exists x\in\mathbf{R},x+1<0$

C. $\forall x\in\mathbf{R},x+1<0$　　D. $\exists x\notin\mathbf{R},x+1\geq 0$

3. 设集合 $A=\{x\,|-1\leq x<2\},B=\{x\,|\,x<a\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则 a 的取值范围是（　）

A. $-1<a\leq 2$　　B. $a>2$　　C. $a\geq -1$　　D. $a>-1$

4. 已知 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，当 $x\geq 0$ 时，$y=f(x)$ 图象如图所示，则下列关系正确的是（　）



A. $f(1)>f(-2)>f(3)$

B. $f(3)>f(1)>f(-2)$

C. $f(1)>f(3)>f(-2)$

D. $f(-2)>f(1)>f(3)$

5. 下列函数中，是奇函数且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　）

A. $y=-x^2$　　B. $y=x^{\frac{1}{2}}$　　C. $y=x^{-1}$　　D. $y=x^3$

6. 已知 $a,b,c\in\mathrm{R}$，且 $a>b$，则下列不等式一定成立的是（　）

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C. $a|c|>b|c|$　　D. $c-a<c-b$

7. 设 $x\in R$，则“$1<x<2$”是“$|x-2|<1$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

8. 从 2015 年到 2020 年，某企业通过持续的技术革新来降低其能源消耗，到了 2020 年该企业单位生产总值能耗降低了 20%.如果这五年平均每年降低的百分率为 x，那么 x 满足的方程是（　）

A. $5x=0.2$　　B. $5(1-x)=0.8$　　C. $x^5=0.2$　　D. $(1-x)^5=0.8$

9. 函数 $f(x)=ax^2+(a-3)x+1$ 在区间$[-1,+\infty)$上是递减的,则实数 a 的取值范围是(　　)

A. [-3,0)　　B. (-∞,-3]

C. [-2,0]　　D. [-3,0]

10. 设 $f(x)$ 为定义在 R 上的函数，函数 $f(x+1)$ 是奇函数.对于下列四个结论：

① $f(1)=0$；

② $f(1-x)=-f(1+x)$；

③函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称；

④函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称；

其中，正确结论的个数为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.把答案填在答题卡上.

11. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ 的定义域是__________.

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x(1+x)$，则 $f(-1)=$______.

13. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\geq 1\\ -x^2+2, x<1\end{cases}$ 的最大值为________.

14. 函数 $f(x)$ 的定义域为 D，给出下列两个条件：

①对于任意 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1\neq x_2$ 时，总有 $f(x_1)\neq f(x_2)$；

② $f(x)$ 在定义域内不是单调函数.

请写出一个同时满足条件①②的函数 $f(x)$，则 $f(x)=$______________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x\geq a,\\ -x^2-2x, x<a.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

①存在实数 a，使函数 $f(x)$ 为奇函数；

②对任意实数 a，函数 $f(x)$ 既无最大值也无最小值；

③对任意实数 a 和 k，函数 $y=f(x)+k$ 总存在零点；

④对于任意给定的正实数 m，总存在实数 a，使函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,m)$ 上单调递减.其中所有正确结论的序号是______________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 设集合 $A=\{x|a-1<x<2a+3\}$，不等式 $x^2-2x-8<0$ 的解集为 B.

（1）当 $a=1$ 时，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_{R}A$；

（2）当 $A\subseteq B$ 时，求实数 a 的取值范围.

17.设函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}+3$

（1）求函数 $f(x)$ 的图像与直线 $y=2x$ 交点的坐标：

（2）当 $x\in(0,+\infty)$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值

（3）用单调性定义证明：函数 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

18. 已知函数 $f(x)=ax^2-2ax-3$.

（1）若 $a=1$，求不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集；

（2）已知 $a>0$，且 $f(x)\geq 0$ 在 $[3,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围；

（3）若关于 x 的方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的正实数根 x_1，x_2，求 $x_1^2+x_2^2$ 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x)=x^2+mx-2m+1(m\in\mathrm{R})$.

（1）若 $m=2$，求函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,1]$ 上的最大和最小值；

（2）解不等式 $f(x)<2x+1$.

20. 设某商品的利润只由生产成本和销售收入决定．生产成本 C（单位：万元）与生产量 x（单位：千件）间的函数关系是 $C=3+x$；销售收入 S（单位：万元）与生产量 x 间的函数关系是

$$S=\begin{cases}3x+\dfrac{18}{x-8}+5, 0<x<6\\ 14, x\geq 6\end{cases}.$$

（I）把商品的利润表示为生产量 x 的函数；

（II）为使商品的利润最大化，应如何确定生产量？

21. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\in P\\ -x, x\in M\end{cases}$ 其中 P，M 是非空数集．记 $f(P)=\{y|y=f(x), x\in P\}$，$f(M)=\{y|y=f(x), x\in M\}$.

（I）若 $P=[0, 3]$，$M=(-\infty, -1)$，求 $f(P)\cup f(M)$；

（II）若 $P\cap M=\varnothing$，且 $f(x)$是定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的增函数，求集合 P，M；

（III）判断命题“若 $P\cup M\neq R$，则 $f(P)\cup f(M)\neq R$”的真假，并加以证明.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】C

【分析】先求出 B 集合，再根据并集合的运算求出两个集合的并集.

【详解】$B=\{x\in\mathbf{N}\mid x<3\}=\{0,1,2\}$，所以 $A\cup B\{-1,0,1,2\}$，

故选：C

2.【答案】C

【分析】

特称命题的否定是全称命题，先否定量词，再否定结论.

【详解】命题 $P:\exists x\in\mathbf{R},x+1\geq 0$，则 $\neg P$ 为：$\forall x\in\mathbf{R},x+1<0$

故选：C

3.【答案】D

【分析】根据 $A\cap B\neq\varnothing$，由集合 A，B 有公共元素求解.

【详解】集合 $A=\{x\mid -1\leq x<2\},B=\{x\mid x<a\}$，

因为 $A\cap B\neq\varnothing$，

所以集合 A，B 有公共元素，

所以 $a>-1$.

故选：D

4.【答案】A

【分析】根据函数的奇偶性得到 $f(-2)=f(2)$，再结合当 $x\geq 0$ 时，函数为单调递减函数，即可求解.

【详解】由题意，函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，可得 $f(-2)=f(2)$，

又由当 $x\geq 0$ 时，函数为单调递减函数，所以 $f(1)>(2)>f(3)$，

所以 $f(1)>f(-2)>f(3)$.

故选：A.

5.【答案】C

【分析】

根据函数的单调性和奇偶性对各个选项逐一分析即可.

【详解】对 A，$\because$ 函数 $y=-x^2$ 的图象关于 y 轴对称，

故 $y=-x^2$ 是偶函数，故 A 错误；

对 B，$\because$ 函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$ 不关于原点对称，

故 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 是非奇非偶函数，故 B 错误；

对 C，$\because$ 函数 $y=x^{-1}$ 的图象关于原点对称，

故 $y=x^{-1}$ 是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 C 正确；

对 D，$\because$ 函数 $y=x^{3}$ 的图象关于原点对称，

故 $y=x^{3}$ 是奇函数，但在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 D 错误.

故选：C.

6.【答案】D

【分析】

对 A，B，C，利用特殊值即可判断，对 D，利用不等式的性质即可判断.

【详解】解：对 A，令 $a=1$，$b=-2$，此时满足 $a>b$，但 $a^2<b^2$，故 A 错；

对 B，令 $a=1$，$b=-2$，此时满足 $a>b$，但 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 B 错；

对 C，若 $c=0$，$a>b$，则 $a|c|=b|c|$，故 C 错；

对 D，$\because a>b$

$\therefore -a<-b$，

则 $c-a<c-b$，故 D 正确.

故选：D.

7.【答案】A

【分析】先解不等式，再根据两个解集包含关系得结果.

【详解】$\because |x-2|<1 \therefore -1<x-2<1, 1<x<3$，又 $1,2$ � $(1,3)$，所以“$1<x<2$”是“$|x-2|<1$”的充分不必要条件，选 A.

【点睛】充分、必要条件的三种判断方法.

1．定义法：直接判断“若 p 则 q”、“若 q 则 p”的真假．并注意和图示相结合，例如“$p\Rightarrow q$”为真，则 p 是 q 的充分条件.

2．等价法：利用 $p\Rightarrow q$ 与非 $q\Rightarrow$ 非 p，$q\Rightarrow p$ 与非 $p\Rightarrow$ 非 q，$p\Leftrightarrow q$ 与非 $q\Leftrightarrow$ 非 p 的等价关系，对于条件或结论是否定式的命题，一般运用等价法.

3．集合法：若 A $\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件或 B 是 A 的必要条件；若 A ＝ B，则 A 是 B 的充要条件.

8.【答案】D

【分析】

根据题设逐年列出生产总值能耗后可得正确的选择.

【详解】设 2015 年该企业单位生产总值能耗为 a，则 2016 年该企业单位生产总值能耗 $a(1-x)$，2017 年该企业单位生产总值能耗 $a(1-x)^2$，2018 年该企业单位生产总值能耗 $a(1-x)^3$，

2019 年该企业单位生产总值能耗 $a(1-x)^4$，2020 年该企业单位生产总值能耗 $a(1-x)^5$，

由题设可得 $a(1-x)^5=0.8a$ 即 $(1-x)^5=0.8$，

故选：D.

9.【答案】D

【详解】当 a=0 时,f(x)=-3x+1 显然成立,

当 a≠0 时,需 $\begin{cases} a<0, \\ -\frac{a-3}{2a}\leq -1, \end{cases}$ 解得-3≤a<0,

综上可得-3≤a≤0.

【误区警示】本题易忽视 a=0 这一情况而误选 A,失误的原因是将关于 x 的函数误认为是二次函数.

10.【答案】C

【分析】

令 $g(x)=f(x+1)$，①：根据 $g(0)=0$ 求解出 $f(1)$ 的值并判断；②：根据 $g(x)$ 为奇函数可知 $g(-x)=-g(x)$，化简此式并进行判断；根据 $y=f(x+1)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关系确定出 $f(x)$ 关于点对称的情况，由此判断出③④是否正确.

【详解】令 $g(x)=f(x+1)$，

①因为 $g(x)$ 为 R 上的奇函数，所以 $g(0)=f(0+1)=0$，所以 $f(1)=0$，故正确；

②因为 $g(x)$ 为 R 上的奇函数，所以 $g(-x)=-g(x)$，所以 $f(-x+1)=-f(x+1)$，即 $f(1-x)=-f(1+x)$，故正确；

因为 $y=f(x+1)$ 的图象由 $y=f(x)$ 的图象向左平移一个单位得到的，

又 $y=f(x+1)$ 的图象关于原点对称，所以 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，故③错误④正确，

所以正确的有：①②④，

故选：C.

【点睛】结论点睛：通过奇偶性判断函数对称性的常见情况：

（1）若 $f(x+a)$ 为偶函数，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称；

（2）若 $f(x+a)$ 为奇函数，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 成中心对称.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.把答案填在答题卡上.

11.【答案】$\{x\,|\,x\geq -1 且 x\neq 1\}$

【分析】求使函数有意义的 x 的范围即为定义域，逐项求解即可.

【详解】解：由题意得 $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x-1\neq 0 \end{cases}$，解得 $x\geq -1$ 且 $x\neq 1$，

故函数的定义域为 $\{x|\ x\geq -1 且 x\neq 1\}$.

故答案为：$\{x\,|\,x\ge -1且x\ne 1\}$

12.【答案】-2

【分析】根据题意，结合 $f(-1)=-f(1)$，代入即可求解.

【详解】由函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x(1+x)$，

则 $f(-1)=-f(1)=-1\times(1+1)=-2$.

故答案为：-2.

13.【答案】2

【分析】求出函数在每一段的最大值，再进行比较，即可得答案；

【详解】当 $x>1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为减函数，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值为 $f(1)=1$；

当 $x<1$时，易知函数 $f(x)=-x^2+2$ 在 $x=0$ 处取得最大值为 $f(0)=2$.

故函数 $f(x)$ 的最大值为 2.

故答案为：2.

【点睛】本题考查分段函数的最值，考查运算求解能力，属于基础题.

14.【答案】$f(x)=\dfrac{1}{x}$

【分析】

根据题意写出一个同时满足①②的函数 $f(x)$ 即可.

【详解】解：易知：$f(x)=\dfrac{1}{x}$，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$(0,+\infty)$ 上单调递减，

故对于任意 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1\ne x_2$ 时，总有 $f(x_1)\ne f(x_2)$；

且 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在其定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上不单调.

故答案为：$f(x)=\dfrac{1}{x}$.

15.【答案】①② ④

【分析】

分别作出 $a=0$，$a>0$ 和 $a<0$ 的函数 $f(x)$ 的图象，由图象即可判断① ② ③ ④的正确性，即可得正确答案.

【详解】

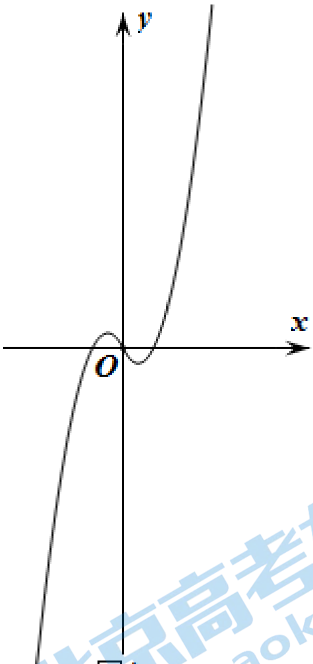


图1

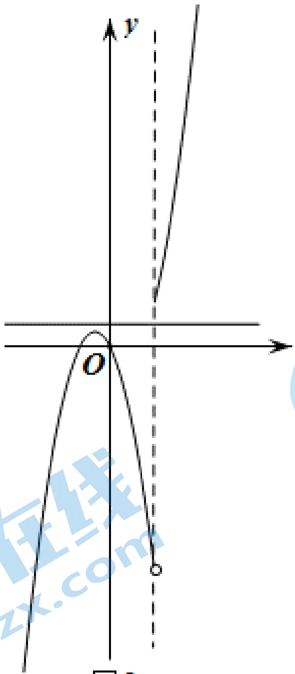


图2

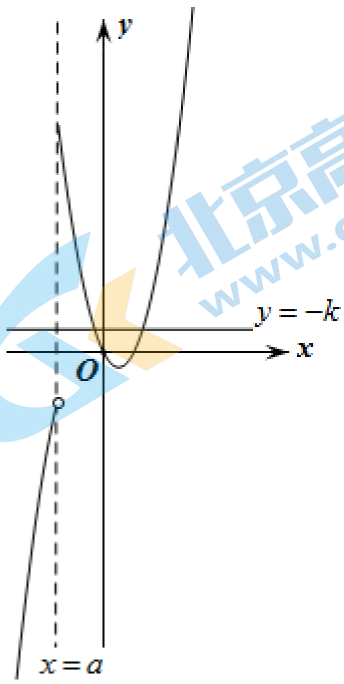


图3

如上图分别为 $a=0$， $a>0$ 和 $a<0$ 时函数 $f(x)$ 的图象，

对于①：当 $a=0$ 时， $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x\geq 0\\ -x^2-2x, x<0\end{cases}$，

$f(x)$ 图象如图1关于原点对称，所以存在 $a=0$ 使得函数 $f(x)$ 为奇函数，故①正确；

对于②：由三个图知当 $x\to-\infty$ 时， $y\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时， $y\to+\infty$，所以函数 $f(x)$ 既无最大值也无最小值；故② 正确；

对于③：如图2和图3中存在实数 k 使得函数 $y=f(x)$ 图象与 $y=-k$ 没有交点，此时函数 $y=f(x)+k$ 没有零点，所以对任意实数 a 和 k，函数 $y=f(x)+k$ 总存在零点不成立；故③ 不正确

对于④：如图2，对于任意给定的正实数 m，取 $a=m+1$ 即可使函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,m)$ 上单调递减，故④正确；

故答案为：①②④

【点睛】关键点点睛：本题解题的关键点是分段函数图象，涉及二次函数的图象，要讨论 $a=0$， $a>0$ 和 $a<0$ 即明确分段区间，作出函数图象，数形结合可研究分段函数的性质.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1） $A\cap B=\{x\,|\,0<x<4\}$， $A\cup B=\{x\,|\,-2<x<5\}$， $\complement_R A=\{x\,|\,x\leq 0$ 或 $x\geq 5\}$

（2） $a\leq -4$ 或 $-1\leq a\leq\dfrac{1}{2}$

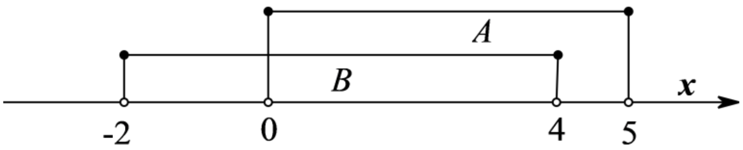
【分析】（1）根据条件，先求出集合 A,B，再借助数轴即可求出结果；

（2）根据 $A\subseteq B$，分 $A=\varnothing$ 和 $A\neq\varnothing$ 两种情况讨论，即可得出结果.

【小问 1 详解】

由 $x^2-2x-8<0$，得到 $-2<x<4$，即 $B=\{x\,|\,-2<x<4\}$，

当 $a=1$ 时，$A=\{x|0<x<5\}$，



由图知，$A\cap B=\{x\,|\,0<x<4\}$，$A\cup B=\{x\,|\,-2<x<5\}$，$\complement_{R}A=\{x\,|\,x\le 0$ 或 $x\ge 5\}$.

【小问 2 详解】

因为 $A\subseteq B$，当 $A=\varnothing$，即 $a-1\ge 2a+3$，得到 $a\le -4$，满足题意，

$A\ne\varnothing$，即 $a>-4$，由 $A\subseteq B$，得到 $\begin{cases}a-1\ge -2\\ 2a+3\le 4\end{cases}$，得到 $-1\le a\le \dfrac{1}{2}$，

综上，实数 a 的取值范围为 $a\le -4$ 或 $-1\le a\le \dfrac{1}{2}$.

17. 【答案】(1) $(4,8)$ 或 $(-1,-2)$　(2) 7　(3)证明见解析.

【分析】

（1）由 $x+\dfrac{4}{x}+3=2x$ 解出方程可得答案.

（2）利用均值不等式 $x+\dfrac{4}{x}+3\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}+3$ 可得答案.

(3)由定义法证明函数单调性的步骤即可证明.

【详解】（1）由 $x+\dfrac{4}{x}+3=2x$，即 $x^2-3x-4=0$，解得 $x=4$ 或 $x=-1$

所以函数 $f(x)$ 的图像与直线 $y=2x$ 交点的坐标为 $(4,8)$ 或 $(-1,-2)$

（2）当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\dfrac{4}{x}+3\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}+3=7$

当且仅当 $x=\dfrac{4}{x}$,即 $x=2$ 时，取得等号.

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 7.

(3) 任取 $x_1,x_2>2$，且 $x_1<x_2$

则 $f(x_2)-f(x_1)=\left(x_2+\dfrac{4}{x_2}+3\right)-\left(x_1+\dfrac{4}{x_2}+3\right)$

$=(x_2-x_1)+\left(\dfrac{4}{x_2}-\dfrac{4}{x_1}\right)=(x_2-x_1)+\dfrac{4(x_1-x_2)}{x_1x_2}$

$=\left(x_2-x_1\right)\left(1-\frac{4}{x_1x_2}\right)=\left(x_2-x_1\right)\frac{x_1x_2-4}{x_1x_2}$

由 $x_1,x_2>2$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1x_2>4$， $x_2-x_1>0$

所以 $x_1x_2-4>0$，则 $\left(x_2-x_1\right)\frac{x_1x_2-4}{x_1x_2}>0$

所以 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)>0$，即 $f\left(x_2\right)>f\left(x_1\right)$

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 上单调递增

【点睛】思路点睛：本题考查利用函数的奇偶性求参数，证明函数的单调性和利用单调性解不等式.证明函数的单调性的基本步骤为：

(1)在给定的区间内任取变量 x_1,x_2，且设 $x_1<x_2$.

(2)作差 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$ 变形，注意变形要彻底，变形的手段通常有通分、因式分解、配方、有理化等.

(3)判断符号，得出 $f\left(x_1\right)$，$f\left(x_2\right)$ 的大小.

(4)得出结论.

18. 【答案】（1） $\{x|x\le-1$ 或 $x\ge3\}$

（2） $\left[1,+\infty\right)$

（3） $\left(2,4\right)$

【分析】（1）由题意得 $x^2-2x-3\ge0$，求解即可得出答案；

（2）函数 $f(x)=ax^2-2ax-3=a(x-1)^2-a-3(a>0)$，可得二次函数 $f(x)$ 图象的开口向上，且对称轴为 $x=1$，题意转化为 $f(x)_{\min}\geqslant0$，利用二次函数的图象与性质，即可得出答案；

（3）利用一元二次方程的根的判别式和韦达定理，即可得出答案.

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时， $f(x)=x^2-2x-3$，

$f(x)\ge0$，即 $x^2-2x-3\ge0$，解得 $x\le-1$ 或 $x\ge3$，

$\therefore$ 不等式的解集为 $\{x|x\le-1$ 或 $x\ge3\}$；

【小问 2 详解】

$f(x)=ax^2-2ax-3=a(x-1)^2-a-3(a>0)$， $x\in[3,+\infty)$

则二次函数 $f(x)$ 图象的开口向上，且对称轴为 $x=1$，

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore$ $f(x)_{\min}=f(3)=3a-3$，

$f(x)\ge0$ 在 $[3,+\infty)$ 上恒成立，转化为 $f(x)_{\min}\geqslant0$，

$\therefore 3a-3\ge0$，解得 $a\ge1$，故实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$；

【小问 3 详解】

关于 x 的方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的正实数根 x_1,x_2，

$\because$ $f(x)=ax^2-2ax-3$， $x_1+x_2>0$， $x_1x_2>0$，

$\therefore a\neq 0$ 且 $\begin{cases}\Delta=4a^2+12a>0\\ x_1+x_2=2>0\\ x_1\cdot x_2=-\dfrac{3}{a}>0\end{cases}$，解得 $a<-3$，

$\therefore x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=4+\dfrac{6}{a}$，

令 $g(a)=4+\dfrac{6}{a}$（$a<-3$），

$\because g(a)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上单调递减，

$\therefore \dfrac{6}{a}\in(-2,0)$，$\therefore g(a)\in(2,4)$，

故 $x_1^2+x_2^2$ 的取值范围为 $(2,4)$.

19.【答案】（1）最大值为 0，最小值为 -4

（2）答案见解析

【分析】（1）当 $m=2$ 时，可得 $f\left(x\right)=x^2+2x-3$，结合二次函数的图象与性质，即可求解；

（2）把不等式转化为 $x^2+(m-2)x-2m<0$，结合一元二次不等式的解法，即可求解.

【小问 1 详解】

解：当 $m=2$ 时，可得 $f\left(x\right)=x^2+2x-3$，

则函数 $y=f\left(x\right)$ 表示开口向上的抛物线，且对称轴为 $x=-1$，

所以函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left[-2,-1\right]$ 上单调递减，在 $[-1,1]$ 上单调递增，

所以，当 $x=-1$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 取得最小值，最小值为 $f\left(-1\right)=-4$，

又因为 $f\left(-2\right)=-3, f\left(1\right)=0$，所以函数的最大值为 0，

综上可得，函数 $y=f\left(x\right)$ 的最大值为 0，最小值为 -4 .

【小问 2 详解】

解：由不等式 $f\left(x\right)<2x+1$，即 $x^2+mx-2m+1<2x+1$，

即不等式 $x^2+(m-2)x-2m=(x+m)(x-2)<0$，

当 $m=-2$ 时，不等式即为 $(x-2)^2<0$，此时不等式的解集为空集；

当 $-m<2$ 时，即 $m>-2$ 时，不等式的解集为 $-m<x<2$；

当 $-m>2$ 时，即 $m<-2$ 时，不等式的解集为 $2<x<-m$，

综上可得：当 $m=-2$ 时，不等式的解集为空集；

当 $m>-2$ 时，不等式的解集为 $(-m,2)$；当 $m<-2$ 时，不等式的解集为 $(2,-m)$.

20.【答案】(I) $y=\begin{cases}2x+\dfrac{18}{x-8}+2,0<x<6\\11-x,x\geq 6\end{cases}$；(II) 确定为 5 千件时，利润最大.

【分析】

(I)用销售收入减去生产成本即得利润；

(II)分段求出利润函数的最大值可得生产产量.

【详解】(I)设利润是 y (万元)，则 $y=S-C=\begin{cases}3x+\dfrac{18}{x-8}+5-(3+x),0<x<6\\14-(3+x),x\geq 6\end{cases}$，

$\therefore y=\begin{cases}2x+\dfrac{18}{x-8}+2,0<x<6\\11-x,x\geq 6\end{cases}$；

(II) $0<x<6$ 时，$y=2x+\dfrac{18}{x-8}+2=-2[(8-x)+\dfrac{9}{8-x}]+18$，

由"对勾函数"知，当 $8-x=\dfrac{9}{8-x}$，即 $x=5$ 时，$y_{\max}=6$，

当 $x\geq 6$ 时，$y=11-x$ 是减函数，$x=6$ 时，$y_{\max}=5$，

$\therefore x=5$ 时，$y_{\max}=6$，

∴生产量为 5 千件时，利润最大.

【点睛】本题考查分段函数模型的应用，解题关键是列出函数解析式．属于基础题.

21.【答案】(I) $[0，+\infty)$；(II) $P=(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$，$M=\{0\}$；(III) 真命题，证明见解析

【分析】

(I)求出 $f(P)=[0，3]$，$f(M)=(1，+\infty)$，由此能过求出 $f(P)\cup f(M)$.

(II)由 $f(x)$ 是定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的增函数，且 $f(0)=0$，得到当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，$(-\infty，0)\subseteq P$．同理可证 $(0，+\infty)\subseteq P$．由此能求出 P，M.

(III)假设存在非空数集 P，M，且 $P\cup M\neq R$，但 $f(P)\cup f(M)=R$．证明 $0\in P\cup M$．推导出 $f(-x_0)=-x_0$，且 $f(-x_0)=-(-x_0)=x_0$，由此能证明命题"若 $P\cup M\neq R$，则 $f(P)\cup f(M)\neq R$"是真命题.

【详解】(I)因为 $P=[0，3]$，$M=(-\infty，-1)$，

所以 $f(P)=[0，3]$，$f(M)=(1，+\infty)$，

所以 $f(P)\cup f(M)=[0，+\infty)$.

(II)因为 $f(x)$ 是定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的增函数，且 $f(0)=0$，

所以当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，

所以 $(-\infty，0)\subseteq P$．同理可证 $(0，+\infty)\subseteq P$.

因为 $P\cap M=\varnothing$，

所以 $P=(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$，$M=\{0\}$．

(III)该命题为真命题．证明如下：

假设存在非空数集 P，M，且 $P\cup M\neq R$，但 $f(P)\cup f(M)=R$．

首先证明 $0\in P\cup M$．否则，若 $0\notin P\cup M$，则 $0\notin P$，且 $0\notin M$，

则 $0\notin f(P)$，且 $0\notin f(M)$，

即 $0\notin f(P)\cup f(M)$，这与 $f(P)\cup f(M)=R$ 矛盾．

若 $\exists x_0\notin P\cup M$，且 $x_0\neq 0$，则 $x_0\notin P$，且 $x_0\notin M$，

所以 $x_0\notin f(P)$，且 $-x_0\notin f(M)$．

因为 $f(P)\cup f(M)=R$，

所以 $-x_0\in f(P)$，且 $x_0\in f(M)$．

所以 $-x_0\in P$，且 $-x_0\in M$．

所以 $f(-x_0)=-x_0$，且 $f(-x_0)=-(-x_0)=x_0$，

根据函数的定义，必有 $-x_0=x_0$，即 $x_0=0$，这与 $x_0\neq 0$ 矛盾．

综上，该命题为真命题．

【点睛】本题考查函数新定义问题，考查学生的创新意识，考查命题真假的判断与证明，考查并集定义等基础知识，考查运算求解能力，是中档题．

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！