

2019 北京首师附中高二（上）期中

数 学

一、选择题

1. 抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点坐标为()

- A. (1,0) B. (0,1) C. (0,-1) D. (-1,0)

2. “ $a = 2$ ”是“直线 $2x + ay - 1 = 0$ 与直线 $ax + 3y - 2 = 0$ 垂直”()

- A. 充分必要条件 B. 充分而不必要条件
C. 必要而不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

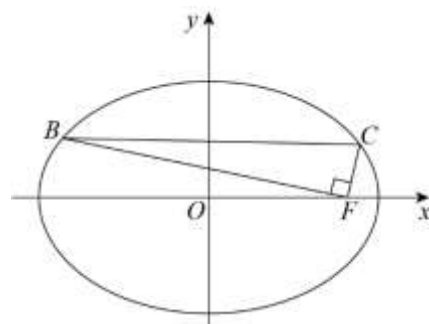
3. 若双曲线 $E: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，点 P 在双曲线 E 上，且 $|PF_1| = 3$ ，则 $|PF_2|$ 等于()

- A. 11 B. 9 C. 5 D. 3

4. 直线 $l: x + y + 3 = 0$ 被圆 $C: \begin{cases} x = -1 + 4\cos\theta \\ y = 2 + 4\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)截得的弦长为()

- A. $4\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

5. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点，直线 $y = \frac{b}{2}$ 与椭圆交于 B, C 两点，且 $\angle BFC = 90^\circ$ ，则该椭圆的离心率为()



- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. 设 α, β 为两个不同的平面， m, n 为两条不同的直线，则下列命题中正确的是()

- A. 若 $m \parallel n$ ， $n \subset \alpha$ ，则 $m \parallel \alpha$ B. 若 $m \parallel \alpha$ ， $n \subset \alpha$ ，则 $m \parallel n$
C. 若 $\alpha \perp \beta$ ， $m \subset \alpha$ ，则 $m \perp \beta$ D. 若 $m \perp \beta$ ， $m \subset \alpha$ ，则 $\alpha \perp \beta$

7. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F ，准线与 x 轴的交点为 K ，点 A 在抛物线 C 上，且 $|AK| = \sqrt{2}|AF|$ ，则 $\triangle AFK$ 的面积为()

- A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

8. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点， P 是他们的一个公共点，且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$ ，则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为()

- A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. 3 D. 2

二、填空题

9. 已知直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}t \\ y=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 则直线 l 的倾斜角为_____.

10. 若圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 与圆 $C: x^2 + y^2 + 6x + 8y + m = 0$ 相切, 则实数 $m =$ _____.

11. 若方程 $\frac{x^2}{k-2} + \frac{y^2}{5-k} = 1$ 表示的是焦点在 x 轴上的椭圆, 则 k 的取值范围是_____.

12. 直线 l 与双曲线 $x^2 - 4y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 若点 $P(4, 1)$ 为线段 AB 的中点, 则直线 l 的方程是_____.

13. 已知圆 $C_1: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$, 圆 C_2 与圆 C_1 关于直线 $y = x+1$ 对称, 则圆 C_2 的标准方程是_____.

14. 已知椭圆 $G: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < \sqrt{6})$ 的两个焦点分别为 F_1 和 F_2 , 短轴的两个端点分别为 B_1 和 B_2 , 点 P 在椭圆 G 上, 且满足 $|PB_1| + |PB_2| = |PF_1| + |PF_2|$. 当 b 变化时, 给出下列三个命题:

①点 P 的轨迹关于 y 轴对称;

②存在使得椭圆 G 上满足条件的点 P 仅有两个;

③ $|OP|$ 的最小值为 2.

其中, 所有正确命题得序号是_____.

三、解答题

15. 已知动点 P 与平面上点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 的距离之和等于 $2\sqrt{2}$.

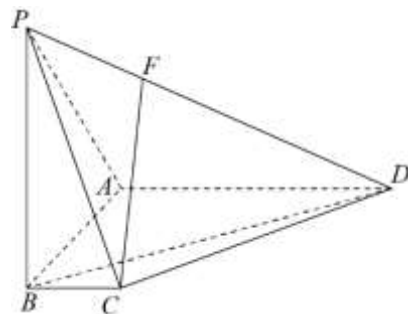
(1) 试求动点 P 的轨迹方程 C .

(2) 设直线 $l: y = kx + 1$ 与曲线 C 交于 M, N 两点, 当 $|MN| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 时, 求直线 l 的方程.

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PB \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为梯形, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, 且 $PB = AB = AD = 3$, $BC = 1$.

(1) 若点 F 为 PD 上一点且 $PF = \frac{1}{3}PD$, 证明: $CF \parallel$ 平面 PAB .

(2) 求二面角 $B-PD-A$ 的大小.



17. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，点 $(2,1)$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 相切，与椭圆 C 相交于 P, Q 两点，求证： $\angle POQ$ 是定值.

18. 设 A, B 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左右顶点，设点 P 为直线 $x = 4$ 上不同于点 $(4,0)$ 的任意一点，若直线 AP, BP 分别与椭圆相交于异于 A, B 的点 M, N .

(1) 判断 B 与以 MN 为直径的圆的位置关系（内、外、上）并证明.

(2) 记直线 $x = 4$ 与轴的交点为 H ，在直线 $x = 4$ 上，求点 P ，使得 $S_{\triangle APN} = S_{\triangle APH}$.