2023年普通高等学校招生全国统一考试(全国甲卷)

理科数学

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

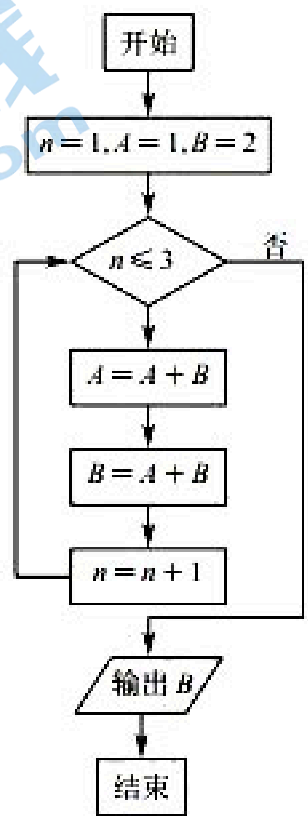
1. 设集合 $A=\{x|x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$，$U$ 为整数集，则 $\complement_U(A\cup B)=$ ( )

A. $\{x|x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$　　B. $\{x|x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$　　C. $\{x|x=3k-2,k\in\mathbf{Z}\}$　　D. $\varnothing$

2. 若复数 $(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=2$，则 $a=$ ( )

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

3. 执行下面的程序框图，输出的 $B=$ ( )



A. 21　　B. 34　　C. 55　　D. 89

4. 向量 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=$ ( )

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{2}{5}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，S_n 为 $\{a_n\}$ 前 n 项和，$S_5=5S_3-4$，则 $S_4=$ ( )

A. 7　　B. 9　　C. 15　　D. 30

6. 有50人报名报名足球俱乐部，60人报名乒乓球俱乐部，70人报名足球或乒乓球俱乐部，若已知某人报名足球俱乐部，则其报名乒乓球俱乐部的概率为 ( )

A. 0.8　　B. 0.4　　C. 0.2　　D. 0.1

7. “$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”是“$\sin\alpha+\cos\beta=0$” ( )

A. 充分条件但不是必要条件　　B. 必要条件但不是充分条件

C. 充要条件　　D. 既不是充分条件也不是必要条件

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，其中一条渐近线与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 A，B 两点，则 $|AB|=$ ( )

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

9. 有五名志愿者参加社区服务，共服务星期六、星期天两天，每天从中任选两人参加服务，则恰有一人连续参加两

天服务的选择种数为　　　　(　　)

A. 120　　　　B. 60　　　　C. 40　　　　D. 30

10. 已知 $f(x)$ 为函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位所得函数，则 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的交点个数为　　　　(　　)

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

11. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=4$，$PC=PD=3$，$\angle PCA=45^\circ$，则 $\triangle PBC$ 的面积为　(　　)

A. $2\sqrt{2}$　　　　B. $3\sqrt{2}$　　　　C. $4\sqrt{2}$　　　　D. $5\sqrt{2}$

12. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$，$F_1$，$F_2$ 为两个焦点，O 为原点，P 为椭圆上一点，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则 $|OP|=$　　(　　)

A. $\frac{2}{5}$　　　　B. $\frac{\sqrt{30}}{2}$　　　　C. $\frac{3}{5}$　　　　D. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 $y=(x-1)^2+ax+\sin(x+\frac{\pi}{2})$ 为偶函数，则 $a=$ ______.

14. 设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}-2x+3y\leqslant 3\\ 3x-2y\leqslant 3\\ x+y\geqslant 1\end{cases}$，则 $z=3x+2y$ 的最大值为 ______.

15. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 CD，A_1B_1 的中点，则以 EF 为直径的球面与正方体每条棱的交点总数为 ______.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$\angle BAC=60^\circ$，$BC=\sqrt{6}$，AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D，则 $AD=$ ______.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分.

17. (12 分) 来源：高三答案公众号

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，设 S_n 为 $\{a_n\}$ 前 n 项和，满足 $2S_n=na_n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

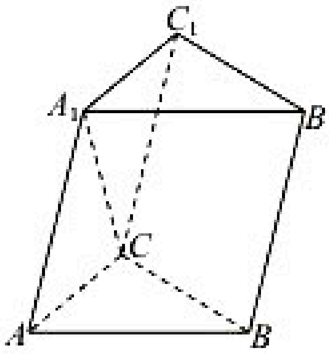
(2) 求数列 $\{\frac{a_n+1}{2^n}\}$ 的前项和 T_n.

18. (12 分)

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=2$，$A_1C\perp$ 底面 ABC，$\angle ACB=90^\circ$，A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1.

(1) 求证：$AC=A_1C$；

(2) 若直线 AA_1 与 BB_1 距离为 2，求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.



19. (12分)

为探究某药物对小鼠的生长抑制作用，将40只小鼠均分为两组，分别为对照组(不加药物)和实验组(加药物).

(1) 设其中两只小鼠中对照组小鼠数目为X，求X的分布列和数学期望；来源：高三答案公众号

(2) 测得40只小鼠体重如下(单位：g)：(已按从小到大排好)

对照组：

17.3	18.4	20.1	20.4	21.5	23.2	24.6	24.8	25.0	25.4
26.1	26.3	26.4	26.5	26.8	27.0	27.4	27.5	27.6	28.3

实验组：

5.4	6.6	6.8	6.9	7.8	8.2	9.4	10.0	10.4	11.2
14.4	17.3	19.2	20.2	23.6	23.8	24.5	25.1	25.2	26.0

(i) 求40只小鼠体重的中位数m，并完成下面2×2列联表：

	$<m$	$\geqslant m$
对照组		
实验组		

(ii) 根据2×2列联表，能否有95%的把握认为药物对小鼠生长有抑制作用.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

k_0	0.100	0.050	0.010
$P(K^2\geqslant k_0)$	2.706	3.841	6.635

20. (12分)

设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$，$x-2y+1=0$与C交于A，B两点，且$|AB|=4\sqrt{15}$.

(1) 求p；

(2) 设C的焦点为F，M，N为C上两点，$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{NF}=0$，求$\triangle MNF$面积的最小值.

21. (12 分)

已知 $f(x)=ax-\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1) 当 $a=8$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)<\sin 2x$，求 a 的取值范围.

(二) 选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22. [选修 4－4：坐标系与参数方程] (10 分)

已知 $P(2,1)$，直线 l：$\begin{cases}x=2+t\cos\alpha\\y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），l 与 x 轴，y 轴正半轴交于 A，B 两点，$|PA|\cdot|PB|=4$.

(1) 求 α 的值；

(2) 以原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求 l 的极坐标方程.

23. [选修 4－5：不等式选讲] (10 分)

已知 $f(x)=2|x-a|-a$，$a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)<x$；

(2) 若 $y=f(x)$ 与坐标轴围成的面积为 2，求 a.

2023 年全国统一高考数学试卷（甲卷理科）

（适用地区：云南、四川、广西、贵州、西藏）

注意事项：

1．答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上．

2．答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号．

3．答非选择题时，必须使用 0．5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上．

4．所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效．

5．考试结束后，只将答题卡交回．

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设集合 $A=\{x\mid x=3k+1,k\in Z\}$，$B=\{x\mid x=3k+2,k\in Z\}$，U 为整数集，则 $\complement_U(A\cup B)=$（　　）

A．$\{x\mid x=3k,k\in Z\}$　　B．$\{x\mid x=3k-1,k\in Z\}$

C．$\{x\mid x=3k-2,k\in Z\}$　　D．$\varnothing$

【答案】A

【解析】$A=\{\cdots,1,4,7,10,\cdots\}$，$B=\{\cdots,2,5,8,11,\cdots\}$，$A\cup B=\{\cdots,1,2,4,5,7,8,10,11\cdots\}$

所以 $\complement_U(A\cup B)=\{\cdots,3,6,9,\cdots\}=\{x\mid x=3k,k\in Z\}$，选 A．

2．若复数 $(a+i)(1-ai)=2$，则 $a=$（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

【答案】C

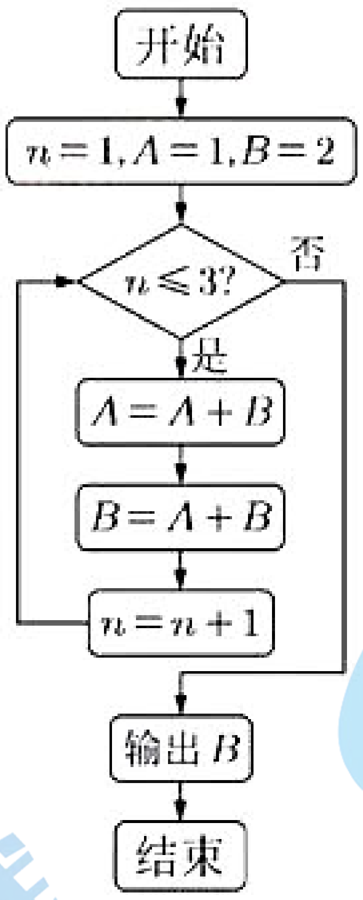
【解析】$(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=a-a^2\mathrm{i}+\mathrm{i}-a\mathrm{i}^2=2a+(1-a^2)\mathrm{i}=2$，

所以 $\begin{cases}2a=2,\\1-a^2=0,\end{cases}$ 解得 $a=1$．

选 C．

3．执行下面的程序框图，输出的 B=（　　）

A．21　　B．34　　C．55　　D．89



【答案】B

【解析】初始值 $n=1$，$A=1$，$B=2$，条件成立；

进入循环体：

① $A=3$，$B=5$，$n=2$，条件成立；

② $A=8$，$B=13$，$n=3$，条件成立；

③ $A=21$，$B=34$，$n=4$，条件不成立，输出 $B=34$，选 B.

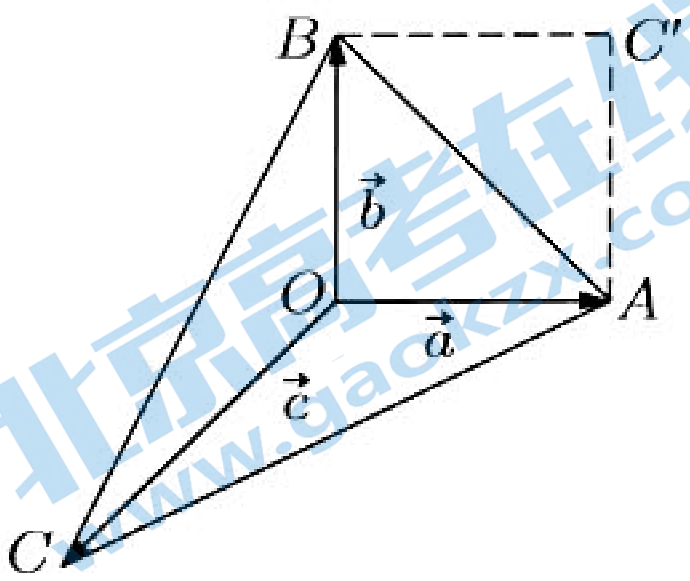
4．向量 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=\sqrt{2}$，且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则 $\cos<\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}>=$（　　）

A．$-\dfrac{1}{5}$　　B．$-\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{2}{5}$　　D．$\dfrac{4}{5}$

【答案】D

【解析】由 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 得 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$，所以 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(-\vec{c}\right)^2$，即 $\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{c}^2$

又 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=\sqrt{2}$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，所以 $\vec{a}\perp\vec{b}$.



如图所示：

$\vec{a}-\vec{c}=\overrightarrow{CA}$，$\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{CB}$，由余弦定理得 $|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{5}$，所以 $\cos\angle ACB=\dfrac{5+5-2}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$，

即 $\cos<\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}>=\dfrac{4}{5}$，选 D.

5. 已知正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，S_n为$\{a_n\}$前 n 项和，$S_5=5S_3-4$，则$S_4=$（　　）

A. 7　　B. 9　　C. 15　　D. 30

【答案】C

【解析】当$q=1$时，$S_5=5$，$5S_3-4=11$，不成立；

当$q\neq 1$时，由$S_5=5S_3-4$得$\frac{1-q^5}{1-q}=5\cdot\frac{1-q^3}{1-q}-4$，$\Rightarrow 1-q^5=5-5q^3-4+4q$

$\Rightarrow q^5-5q^3+4q=0\Rightarrow q^4-5q^2+4=0$，即$(q^2-1)(q^2-4)=0$，解得$q=\pm1$（舍去），$q=-2$（舍去），$q=2$ 来源：高三答案公众号

因此$S_4=\frac{1-q^4}{1-q}=15$，选 C.

6. 有 50 加人报名足球俱乐部，60 人报名乒乓球俱乐部，70 人报名足球或乒乓球俱乐部，若已知某人报足球俱乐部，则其报乒乓球俱乐部的概率为（　　）

A. 0.8　　B. 0.4　　C. 0.2　　D. 0.1

【答案】A

【解析】既报名足球俱乐部又报名乒乓球俱乐部的人数为：$50+60-70=40$人，设某人报足球俱乐部为事件A，报乒乓球俱乐部为事件B，则$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{40}{50}=0.8$

7. "$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$"是"$\sin\alpha+\cos\beta=0$"的（　　）

A. 充分条件但不是必要条件　　B. 必要条件但不是充分条件

C. 充要条件　　D. 既不是充分条件也不是必要条件

【答案】B

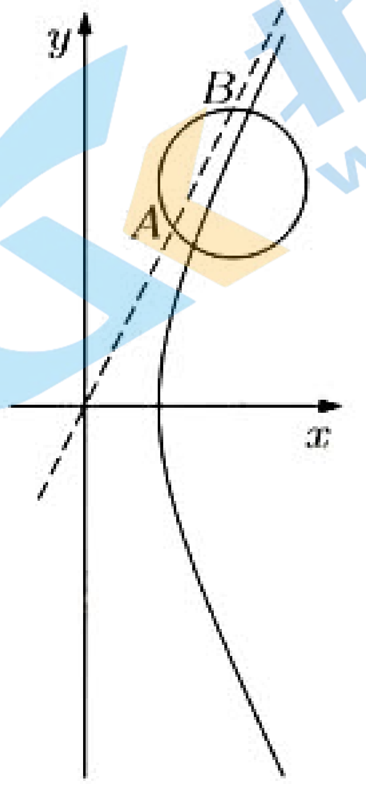
【解析】因为$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$，取$\alpha=\frac{\pi}{4}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，得$\sin\alpha+\cos\beta=\sqrt{2}\neq0$，则充分性不成立. 当$\sin\alpha+\cos\beta=0$时，$\sin^2\alpha=\cos^2\beta$，$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\alpha+(1-\cos^2\beta)$ $=\sin^2\alpha+(1-\sin^2\alpha)=1$，所以必要性成立，则"$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$"是"$\sin\alpha+\cos\beta=0$"的必要条件但不是充分条件.

8．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，其中一条渐近线与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 A,B 两点，则 $|AB|=$（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　　　D．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【答案】D

【解析】由 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{5}$，则 $\frac{b}{a}=2$，所以其中一条渐近线方程为 $y=2x$，圆心到渐近线的距离为 $d=\frac{|4-3|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$|AB|=2\sqrt{1-d^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.



9. 有五名志愿者参加社区服务，共服务星期六、星期天两天，每天从中任选两人参加服务，则恰有 1 人连续参加两天服务的选择种数为（　　）

A．120　　　　B．60　　　　C．40　　　　D．30

【答案】B

【解析】由题可知参加服务人员需要三人，先从 5 人中选出 3 人有 C_5^3 种，再从 3 人中选出 1 人连续服务两天有 C_3^1 种，另外 2 人分别安排在周六、周日有 A_2^2 种，则一共有 $C_5^3C_3^1A_2^2=60$ 种.

10．已知 $f(x)$ 为函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位所得函数，则 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的交点个数为（　　）

【答案】C

【解析】由 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{6}}f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 2x$，

$f(0)=0$，$f(\frac{\pi}{4})=-1$，$f(\frac{3\pi}{4})=1$，令 $g(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}>-1$，$g(\frac{3\pi}{4})=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2}<1$，

$g(\frac{3\pi}{4})=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2}<1$，$g(\frac{7\pi}{4})=\frac{7\pi}{8}-\frac{1}{2}>1$，$g(-\frac{3\pi}{4})=-\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2}<-1$，

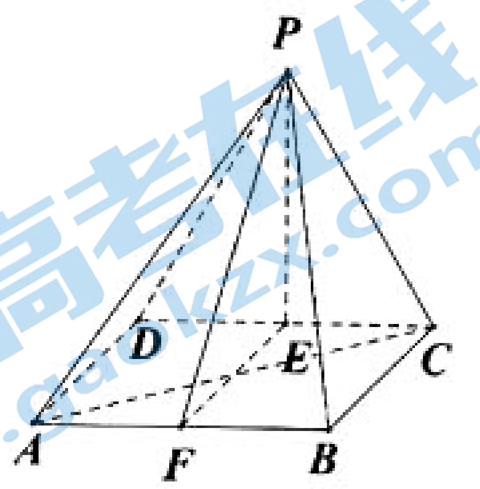
所以在 $(0,\frac{\pi}{4})$，$(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$，$(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$ 分别有一个交点，则 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 有 3 个交点.

11. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=4$，$PC=PD=3$，$\angle PCA=45^\circ$，则 $\triangle PBC$ 的面积为（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $5\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】取 CD,AB 的中点 E,F，连接 PE,EF,PF，



因为 $PC=PD$，所以 $PE\perp CD$，

底面 $ABCD$ 是正方形，所以 $EF\perp CD$，

$PE\cap EF=E$，所以 $CD\perp$ 平面 PEF，又 $AB/\!/CD$，所以 $AB\perp$ 平面 PEF，

从而 $AB\perp PF$，

所以 $PA=PB$，

在 ΔPAC 中，$PC=3$，$AC=4\sqrt{2}$，$\angle PCA=45^\circ$，所以 $PA=\sqrt{17}$，所以 $PB=\sqrt{17}$，

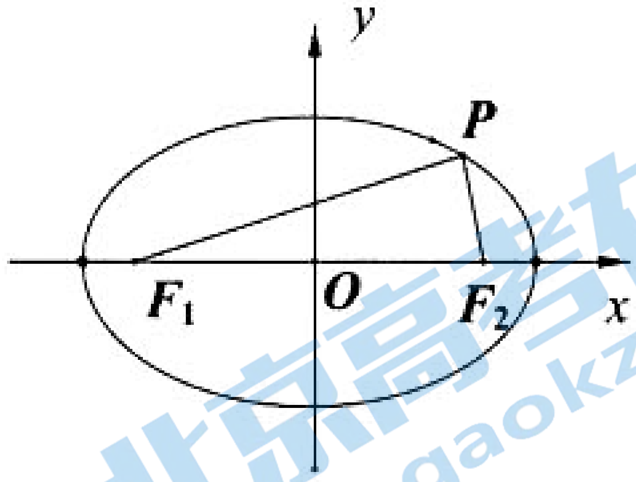
在 ΔPBC 中，由余弦定理，有 $\cos\angle PCB=\frac{PC^2+BC^2-PA^2}{2\cdot PC\cdot BC}=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\angle PCB=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 ΔPBC 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot PC\cdot BC\cdot\sin\angle PCB=\frac{1}{2}\times 3\times 4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$，故选 C.

12. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$，$F_1$、$F_2$ 为两个焦点，O 为原点，P 为椭圆上一点，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则 $|PO|=$（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{30}$　　C. 3　　D. $\sqrt{35}$

【答案】B



【解析】依题设知 $a=3$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{3}$，则

$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$，

由余弦定理，得

$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，

整理得 $|F_1F_2|^2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot(1+\cos\angle F_1PF_2)$，结合 $\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{3}{5}$，

解得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\dfrac{15}{2}$．所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|\cdot\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{2}$，

又 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF_1})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF_2})=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF_1})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OF_1})=\left|\overrightarrow{PO}\right|^2-\left|\overrightarrow{OF_1}\right|^2$

所以 $|OP|^2=c^2+\dfrac{9}{2}=\dfrac{15}{2}$，解得 $|OP|=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$．故选 B．

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．若 $y=(x-1)^2+ax+\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$ 为偶函数，则 $a=$________．

【答案】2

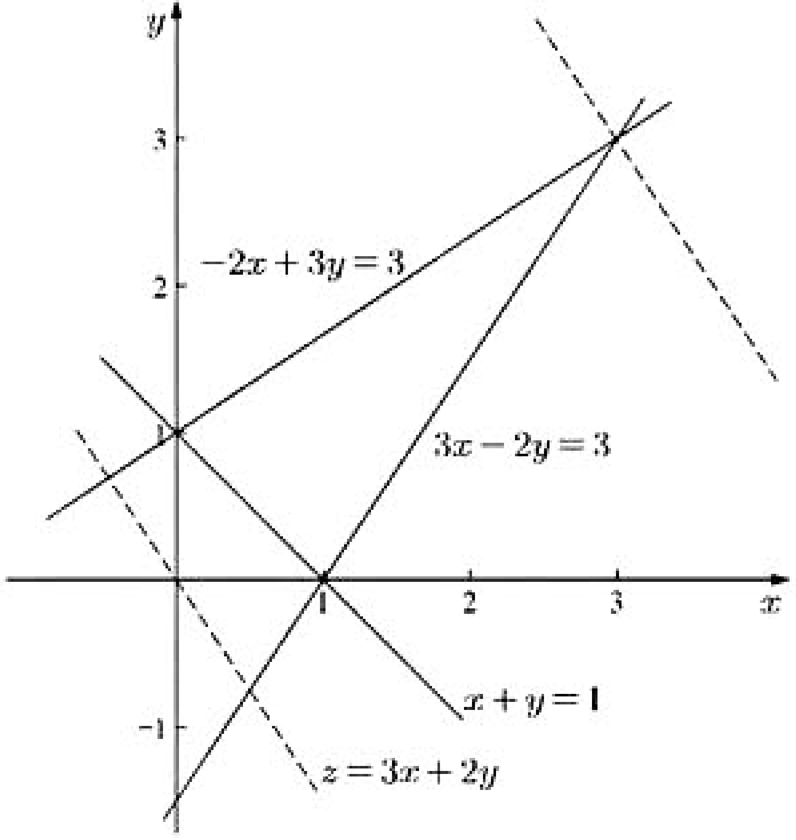
【解析】由 $y=(x-1)^2+ax+\sin(x+\dfrac{\pi}{2})=x^2+(a-2)x+1+\cos x$ 为偶函数，所以 $a=2$．

14．设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}-2x+3y\le 3\\ 3x-2y\le 3\\ x+y\ge 1\end{cases}$，$z=3x+2y$，则 z 的最大值为________．

【答案】 15

【解析】画出不等式组表示的可行域，如图所示，直线 $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{z}{2}$ 与可行域有交点，则当

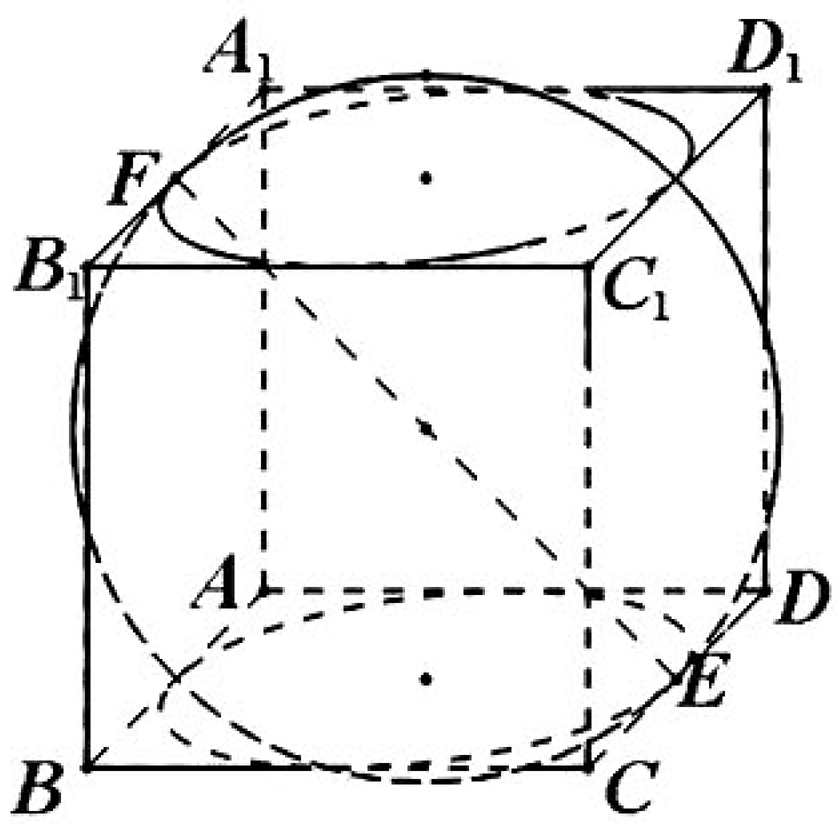
直线过点 $(3,3)$ 时，z 有最大值 15．



15．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为棱 CD, A_1B_1 的中点，则以 EF 为直径的球面与正方体的所有棱的交点总数为__________.

【答案】 12

【解析】设正方体的棱长为 1，则 $EF=\sqrt{2}$，球的半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，而球心到每条棱的距离均为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此球与每条棱都有且只有 1 个交点，一共 12 条棱，故共 12 个交点.



16． ΔABC 中，$\angle BAC=60^\circ$，$AB=2$，$BC=\sqrt{6}$，AD 平分 $\angle BAC$ 与 BC 交于点 D，则 $AD=$__________.

【答案】 2

【解析】 ΔABC 中，由余弦定理知 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle BAC$，

即 $6=4+AC^2-2AC$，解得 $AC=\sqrt{3}+1$．又因为 $S_{\Delta BAC}=S_{\Delta BAD}+S_{\Delta DAC}$，即

$\dfrac{1}{2}\times2\times(\sqrt{3}+1)\sin60^o=\dfrac{1}{2}\times2\times AD\times\sin30^o+\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3}+1)\times AD\times\sin30^o$，解得 $AD=2$.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）

已知数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，设S_n为$\{a_n\}$的前 n 项和，$2S_n=na_n$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{\dfrac{a_{n+1}}{2^n}\right\}$的前$n$项和$T_n$．

【答案】（1）$a_n=n-1(n\in N^*)$；（2）$T_n=2-\dfrac{2+n}{2^n}$

【解析】（1）当$n=1$时，$2S_1=a_1$，即$2a_1=a_1$，所以$a_1=0$，

当$n\geq 2$时，由$2S_n=na_n$ ①，得$2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$ ②，

①－②得$2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}$，即$(n-1)a_{n-1}=(n-2)a_n$，

当$n=2$时，$a_1=0$成立，

当$n\geq 3$时，有$\dfrac{a_n}{n-1}=\dfrac{a_{n-1}}{n-2}$，

所以，数列$\{\dfrac{a_n}{n-1}\}$是从第二项开始的常数列，即$\dfrac{a_2}{1}=\dfrac{a_3}{2}=\dfrac{a_4}{3}=\cdots\cdots=\dfrac{a_n}{n-1}=1$

所以$a_n=n-1(n\geq 2)$，当$n=1$时，满足上式，即$a_n=n-1(n\in N^*)$；

（2）因为$\dfrac{a_{n+1}}{2^n}=\dfrac{n}{2^n}$，

$$T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}\quad ①，$$

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}\quad ②，$$

有①-②得$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=1-\dfrac{2+n}{2^{n+1}}$，

即$T_n=2-\dfrac{2+n}{2^n}$．

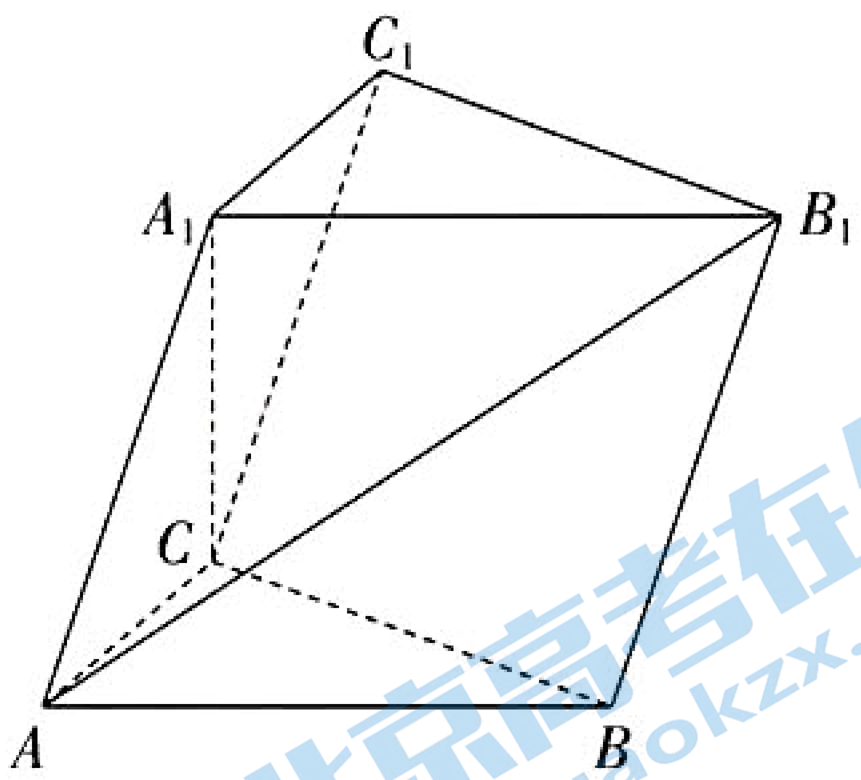
18．（12 分）

BCC_1B_1 的距离为 1．

（1）求证：$A_1C = AC$；

（2）若 A_1A 到 B_1B 的距离为 2，

求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值．



【答案】（1）见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{13}}{13}$．

【解析】（1）证明：$\because A_1C \perp 面ABC, BC \subset 面ABC$

$\therefore A_1C \perp BC$

$\because \angle ACB = 90^\circ$，即$BC \perp AC$，且$A_1C, AC \subset 面ACC_1A_1$，$A_1C \cap AC = C$，

$\therefore BC \perp 面ACC_1A_1$，

$\because BC \subset 面BCC_1B_1$

$\therefore 面ACC_1A_1 \perp 面BCC_1B_1$，

过 A_1 作 $A_1O \perp CC_1$ 交 CC_1 于点 O，且 $面ACC_1A_1 \cap 面BCC_1B_1 = CC_1$，

$\therefore A_1O \perp 面BCC_1B_1$，

$\because A_1$ 到面 BCC_1B_1 的距离为1，$\therefore A_1O = 1$，

在 $Rt\Delta A_1CC_1$ 中，$A_1C \perp A_1C_1, CC_1 = AA_1 = 2, A_1C = AC$，

设 $CO = x$，则$C_1O = 2 - x$，$1 + x^2 + 1 + (2-x)^2 = 4$，解得：$x = 1$，

$\therefore AC = A_1C = A_1C_1 = \sqrt{2}$，

$\therefore A_1C = AC$．

（2）法一：连接 A_1B，由（1）易证 $A_1B = A_1B_1$，故取 BB_1 的中点 F，连接 A_1F，

$\because A_1A$与B_1B 的距离为 2，$\therefore A_1F = 2$，

$\therefore A_1C=AC=\sqrt{2}$，$AB=A_1B_1=\sqrt{5}, BC=\sqrt{3}$，

建立空间直角坐标系 $C-xyz$ 如图所示

$C(0,0,0), A(\sqrt{2},0,0), B(0,\sqrt{3},0), B_1(-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2}), C_1(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，

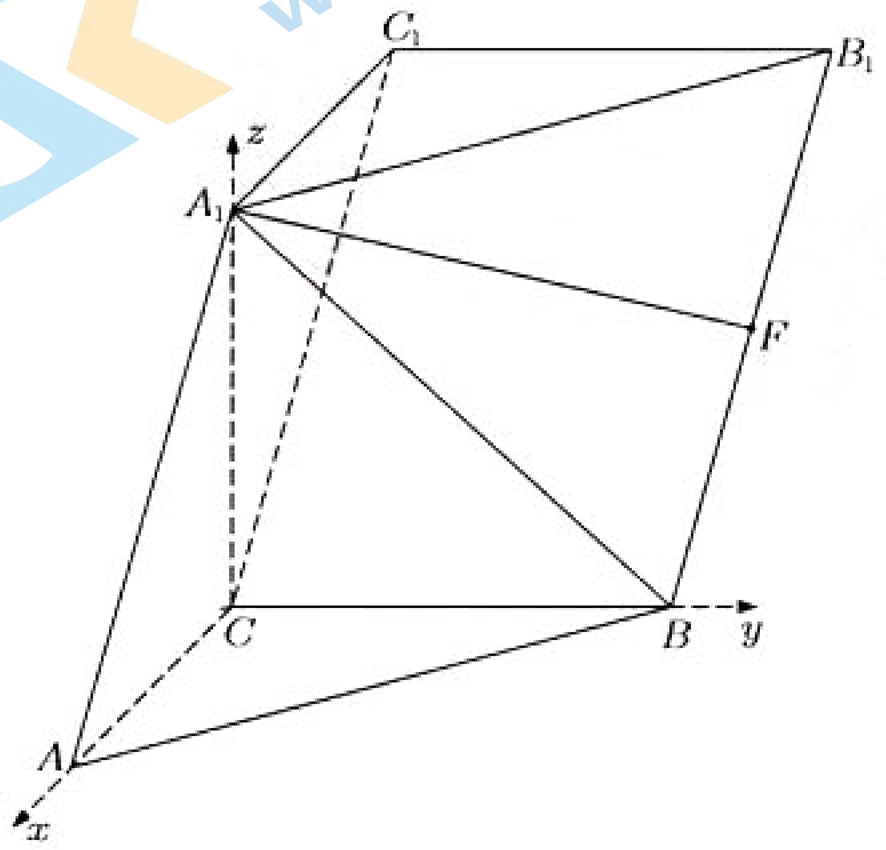
$\therefore \overrightarrow{CB}=(0,\sqrt{3},0), \overrightarrow{CC_1}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2}), \overrightarrow{AB_1}=(-2\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$，

设面 BCC_1B_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0\end{cases}\text{即}\begin{cases}\sqrt{3}y=0\\ -\sqrt{2}x+\sqrt{2}z=0\end{cases}$$

所以，面 BCC_1B_1 的一个法向量为：$\vec{n}=(1,0,1)$，

$$\therefore \cos\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AB_1}\right\rangle\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}\right|}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{AB_1}\right|}=\frac{\sqrt{13}}{13}$$



法二：$\because AC=A_1C_1, BC\perp A_1C, BC\perp AC$，

$\therefore BA=BA_1$，

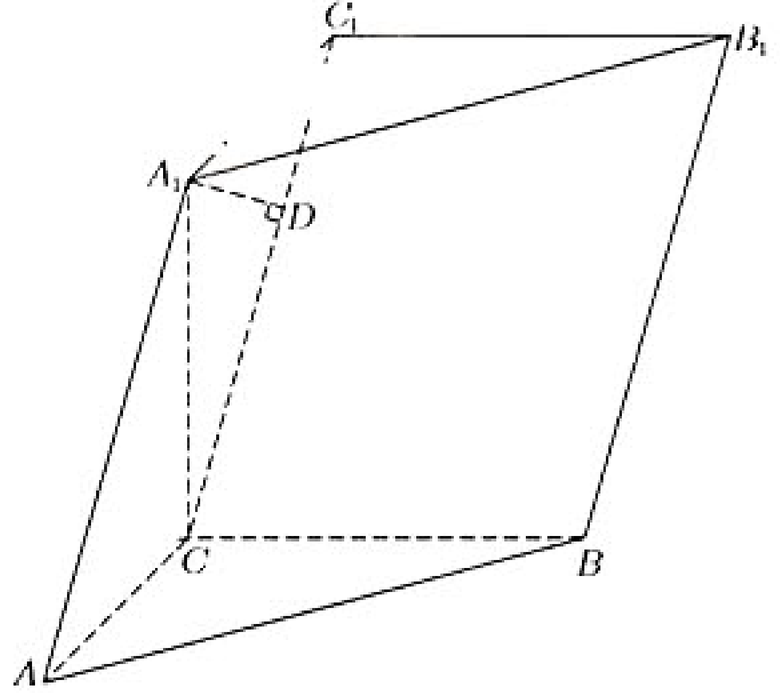
过B作$BD\perp AA_1$交AA_1于D，则 D 为 AA_1 的中点，$A_1D=1, A_1B=\sqrt{5}$，

$\therefore BC=\sqrt{3}$，

$\therefore AB_1=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{13}$，

且 A 到平面 BCC_1B_1 距离也为 1，

则 AB_1与面BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.



19.（12 分）

为研究某药物对小鼠的生长抑制作用，将 40 只小鼠均分为两组，分别为对照组（不加药物）和实验组（加药物）.

(1) 从 40 只小鼠中任取两只小鼠，设对照组小鼠数目为 X，求 X 的分布列和期望.

(2) 测得 40 只小鼠的体重如下(单位: g)(已经按照从小到大排好)

对照组：

17.3	18.4	20.1	20.4	21.5	23.2	24.6	24.8	25.0	25.4
26.1	26.3	26.4	26.5	26.8	27.0	27.4	27.5	27.6	28.3

实验组：

5.4	6.6	6.8	6.9	7.8	8.2	9.4	10.0	10.4	11.2
14.4	17.3	19.2	20.2	23.6	23.8	24.5	25.1	25.2	26.0

(i)求 40 只小鼠体重的中位数 m，并完成下面 2×2 列联表：

(ii)根据 2×2 列联表，能否有 95% 的把握认为药物对小鼠生长有抑制作用.

	$<m$	$\geq m$
对照组		
实验组		

参考公式及数据： $k^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(b+c)(a+c)(b+d)}$

k_0	0.10	0.05	0.010
$p(k^2\geq k_0)$	2.706	3.841	6.635

【答案】(1)

X	0	1	2
P	$\frac{19}{78}$	$\frac{20}{39}$	$\frac{19}{78}$

(2) (1) $m=23.4$ (ii)见解析；

【解析】(1)由题意知 X 的取值可能为 0,1,2

$p(X=0)=\dfrac{C_{20}^2}{C_{40}^2}=\dfrac{19}{78}$ $p(X=1)=\dfrac{C_{20}^1C_{20}^1}{C_{40}^2}=\dfrac{20}{39}$ $p(X=2)=\dfrac{C_{20}^2}{C_{40}^2}=\dfrac{19}{78}$

(2)(i) $m=23.4$

(ii)

	$<m$	$\geq m$
对照组	6	14
实验组	14	6

$$k^2=\frac{40\times(6\times6-14\times14)^2}{20\times20\times20\times20}=6.400>3.841$$

所以有95%的把握认为药物对小鼠生长有抑制作用.

20.（12分）

直线 $x-2y+1=0$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 交于 A， B 两点，且 $|AB|=4\sqrt{15}$.

（1）求 p 的值；

（2） F 为 $y^2=2px$ 的焦点， M 、N 为抛物线上两点且 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{NF}=0$，求 ΔMNF 面积的最小值.

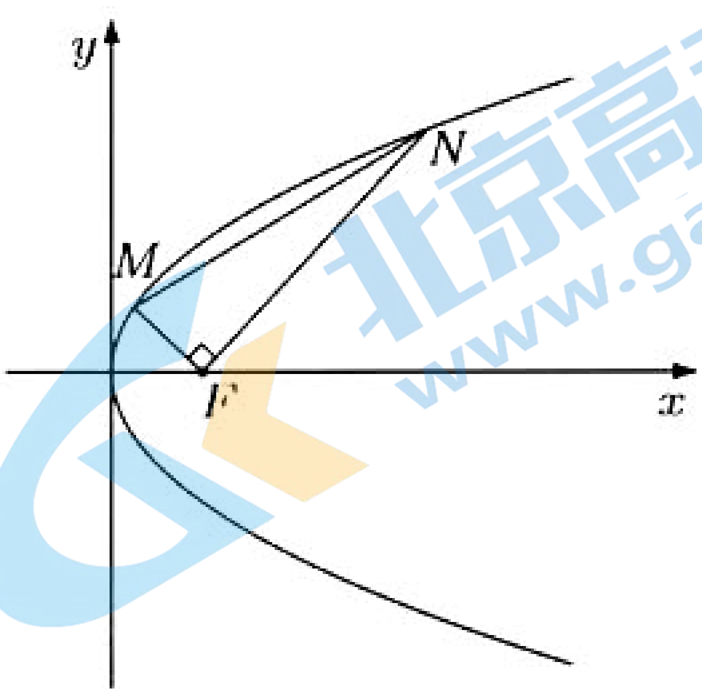
【答案】（1） $p=2$；（2） $12-8\sqrt{2}$

【解析】（1）设 $A(x_1,y_1)$、 $B(x_2,y_2)$，联立方程 $\begin{cases}x=2y-1\\y^2=2px\end{cases}$ 得 $y^2-4py+2p=0$．所以

$\begin{cases}y_1+y_2=4p\\y_1y_2=2p\end{cases}$，所以 $|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{5}\sqrt{16p^2-8p}=4\sqrt{15}$，解得

$p=2$ 或 $p=-\frac{3}{2}$（舍去），故 $p=2$.

（2）



设 $M(x_3,y_3)$、$N(x_4,y_4)$，则 $S_{\Delta MNF}=\frac{1}{2}|MF||NF|\sin\angle MFN=\frac{1}{2}|MF||NF|=$

$\frac{1}{2}(x_3+1)(x_4+1)=\frac{1}{2}(x_3x_4+x_3+x_4+1)$（★）．当 MN 斜率不存在时，M 与 N 关于 x 轴对称，又因为 $\angle MFN=90^\circ$，所以直线 MF 与直线 NF 的斜率一个是1，另一个是 -1．不妨令直线 MF 的斜率为1，则 $MF:y=x-1$，联立 $\begin{cases}y=x-1\\y^2=4x\end{cases}$ 得 $x^2-6x+1=0$，解得 $x_3=3-2\sqrt{2}$ 或 $x_3=3+2\sqrt{2}$，所以 $x_4=3-2\sqrt{2}$ 或 $x_4=3+2\sqrt{2}$．代入（★）式经计算易得 $x_3=x_4=3-2\sqrt{2}$ 时，ΔMNF 面积最小为 $12-8\sqrt{2}$．

当 MN 斜率存在时，设 MN 为 $y=kx+m$．联立方程 $\begin{cases}y=kx+m\\y^2=4x\end{cases}$ 得

$k^2x^2-(4-2km)+m^2=0$，所以 $\begin{cases}x_3+x_4=\dfrac{4-2km}{k^2}\\x_3x_4=\dfrac{m^2}{k^2}\end{cases}$，代入直线得 $y_3y_4=\frac{4m}{k}$．

又 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{NF}=x_3x_4-(x_3+x_4)+1+y_3y_4=0$，所以 $\frac{m^2}{k^2}-\frac{4-2km}{k^2}+1+\frac{4m}{k}=0$，化简得

$m^2+k^2+6km=4$．所以

$S_{\Delta MNF}=\frac{1}{2}(x_3x_4+x_3+x_4+1)=\frac{m^2+k^2-2km+4}{2k^2}=\frac{m^2+k^2+2km}{k^2}$

$=\left(\frac{m}{k}\right)^2+2\left(\frac{m}{k}\right)+1$．令 $t=\frac{m}{k}$，$S_{\Delta MNF}=t^2+2t+1$,只要求出 t 的范围即可．

又因为 $m^2+k^2+6km=4$，所以 $\left(\frac{m}{k}\right)^2+6\left(\frac{m}{k}\right)+1=\frac{4}{k^2}>0$，即 $t^2+6t+1>0$ 解得

$t>-3+2\sqrt{2}$ 或 $t<-3-2\sqrt{2}$ 从而得 $S_{\Delta MNF}=t^2+2t+1>12-8\sqrt{2}$，故 ΔMNF 面积的最小值 $12-8\sqrt{2}$．

解法二：由（1）可得抛物线方程为：$y^2=4x$，焦点坐标 $F(1,0)$

①当直线 MF 的斜率不存在时，直线 MF 的方程为：$x=1$

不妨设 $M(1,2)$，则由 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{NF}=0$ 得 $MF\perp NF\Rightarrow|NF|=1$

$\therefore S_{\Delta MFN}=\frac{1}{2}|MF||\mathrm{NF}|=\frac{1}{2}\times2\times1=1$

②当直线 MF 的斜率存在时，设直线 MF 的方程为：$x=\mathrm{my}+n$

设 $M(x_3,y_3),N(x_4,y_4)$ 把 $x=my+n$ 代入 $y^2=4x$ 得：$y^2-4my+-4n=0$

由韦达定理可得：$y_3+y_4=4m,y_3y_4=-4n$

由 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{NF}=0$ 得：$(x_3-1)+(x_4-1)+y_3y_4=0$

$(my_3+n-1)+(my_4+n-1)+y_3y_4=0$

$(m^2+1)y_3y_4+m(n-1)(y_3+y_4)+(n-1)^2=0$

化解可得：$4m^2=n^2-6n+1$

$\therefore S_{\triangle MFN}=\dfrac{1}{2}|MF||\mathrm{NF}|$

$=\dfrac{1}{2}(x_3+1)(x_4+1)$

$=\dfrac{1}{2}(my_3+n+1)(my_4+n+1)$

$=\dfrac{1}{2}m^2y_3y_4+\dfrac{m(n+1)}{2}(y_3+y_4)+\dfrac{(n+1)^2}{2}$

代入化解可得：$\therefore S_{\triangle MFN}=(n-1)^2$

由(1)知：$n^2-6n+1\ge 0\Rightarrow(n-3)^2\ge 8$，解得 $n\ge 3+2\sqrt{2}$ 或 $n\le 3-2\sqrt{2}$

$\therefore S_{\triangle MFN}=(n-1)^2\ge(3-2\sqrt{2}-1)^2=4(3-2\sqrt{2})$

$\therefore\triangle MFN$ 的面积最小值为 $4(3-2\sqrt{2})$

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$．

（1）若 $a=8$，讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)<\sin 2x$ 恒成立，求 a 的取值范围

【答案】(1) 当 $a=8$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 单调递增；在 $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$ 单调递减．（2）$(-\infty,3]$．

【解析】（1）$a=8$ 时，$f(x)=8x-\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，

则 $f'(x)=\dfrac{(4\cos^2 x+3)(2\cos^2 x-1)}{\cos^4 x}$

当 $f'(x)>0$ 时，$\cos x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$0<x<\dfrac{\pi}{4}$；

当 $f'(x)<0$ 时，$\cos x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$；

$\therefore$ 当 $a=8$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 单调递增；在 $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$ 单调递减．

则 $g'(x)=a-\dfrac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x}-2\cos 2x=a+2-\dfrac{3}{\cos^4 x}+\dfrac{2}{\cos^2 x}-4\cos^2 x$，

注意到，$g(0)=0$，$g'(0)=a-3$

当 $g'(0)=a-3\le 0$ 时，

$$\begin{aligned}g'(x)&\le 5-\frac{3}{\cos^4 x}+\frac{2}{\cos^2 x}-4\cos^2 x\\&=\frac{5\cos^4 x-3+2\cos^2 x-4\cos^6 x}{\cos^4 x}\\&=\frac{-(\cos^2 x-1)^2(4\cos^2 x+3)}{\cos^4 x}\le 0\end{aligned}$$

此时，函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，$g(x)<g(0)=0$,符合题意；

当 $g'(0)=a-3>0$ 时，则 $\exists x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增，

此时，$g(x_0)>g(0)=0$，与题意不符；

综上所述，a 的取值范围为 $(-\infty,3]$.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

已知 $P(2,1)$，直线 $l:\begin{cases}x=2+t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），l 与 x 轴，y 轴正半轴交于 A,B 两点，$|PA|\cdot|PB|=4$.

（1）求 α 的值；

（2）以原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，求 l 的极坐标方程．

【答案】(1) $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$，（2）$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=3$.

【解析】（1）令 $x=0$，$t_1=-\dfrac{2}{\cos\alpha}>0$，　令 $y=0$，$t_2=-\dfrac{1}{\sin\alpha}<0$

$\therefore |PA|\cdot|PB|=-t_1t_2=-\dfrac{2}{\sin\alpha\cos\alpha}=4$

$\therefore \sin 2\alpha=-1$，又 $\alpha\in[0,\pi)$，$\therefore \alpha=\dfrac{3\pi}{4}$

（2）由（1）知，l 的斜率 $k=-1$　　$\therefore l$ 的方程为：$x+y=3$

又∵ $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，∴ l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=3$.

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知 $a>0$，$f(x)=2|x-a|-a$

（1） 求不等式 $f(x)<x$ 的解集；

（2） 若函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴围城的三角形面积为 2，求 a .

【答案】(1) $\left\{x\left|\frac{a}{3}<x<3a\right.\right\}$，（2）2.

【解析】（1）∵ $a>0$，不等式 $f(x)<x$ 的解集即求不等式 $2|x-a|-a<x$ 的解集，整理得

$2|x-a|<x+a$，不等式两边平方得: $4\left(x^2-2ax+a^2\right)<x^2+2ax+a^2$，

整理得 $3x^2-10ax+3a^2<0$，因式分解得 $(3x-a)(x-3a)<0$，

解得 $\frac{a}{3}<x<3a$，故所求不等式的解集为 $\left\{x\left|\frac{a}{3}<x<3a\right.\right\}$.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴的两个交点的横坐标分别为 x_1,x_2，

令 $f(x)=0$，即满足 $2|x-a|=a$,去绝对值等价于 $2x-2a=a$ 或 $2x-2a=-a$

解得 $x_1=\frac{3a}{2},x_2=\frac{a}{2}$ 故函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴交点距离为 $d=\left|x_1-x_2\right|=a$，

依题意 $S_\Delta=\frac{1}{2}d\cdot|-a|=\frac{1}{2}a^2=2$ 即 $a^2=4$ 解得 $a=2$ 或 $a=-2$（舍去），故 $a=2$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。