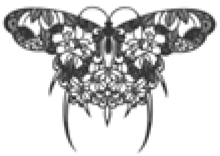
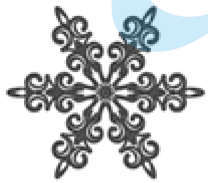
2023 北京景山学校初三（上）期中

数　　学

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1．剪纸艺术是最古老的中国民间艺术之一，先后入选中国国家级非物质文化遗产名录和人类非物质文化遗产代表作名录．以下剪纸中，为中心对称图形的是（　　）

A. 
B. 
C. 
D. 

2．抛物线 $y=(x-1)^2+2$ 的顶点坐标是（　　）

A．(1，2)　　B．(1，－2)　　C．(－1，2)　　D．(－1，－2)

3．将一元二次方程 $x^2-8x+10=0$ 通过配方转化为 $(x+a)^2=b$ 的形式，下列结果中正确的是（　　）

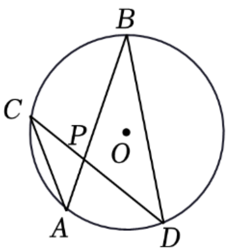
A．$(x-4)^2=6$　　B．$(x-8)^2=6$　　C．$(x-4)^2=-6$　　D．$(x-8)^2=54$

4．把抛物线 $y=2x^2+4$ 向右平移 1 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度，得到的抛物线的解析式为（　　）

A．$y=2(x-1)^2+7$　　B．$y=2(x+1)^2+7$

C．$y=2(x-1)^2+1$　　D．$y=2(x+1)^2+1$

5．如图，在⊙O 中，弦 AB，CD 相交于点 P，$\angle CAB=40^\circ$，$\angle ABD=30^\circ$，则 $\angle APD$ 的度数为（　　）

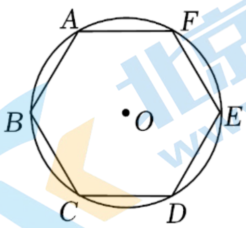


A．30°　　B．35°　　C．40°　　D．70°

6．不透明袋子中装有无差别的两个小球，分别写有"问天"和"梦天"．随机取出一个小球后，放回并摇匀，再随机取出一个小球，则两次都取到写有"问天"的小球的概率为（　　）

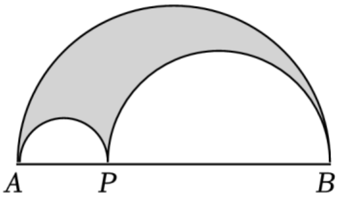
A．$\frac{3}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{4}$

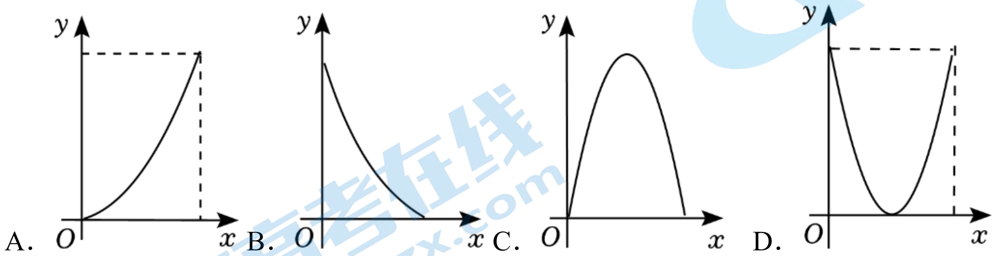
7．如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于⊙O，若⊙O 的周长是 12π，则正六边形的边长是（　　）



A．$2\sqrt{3}$　　B．3　　C．6　　D．$3\sqrt{3}$

8．如图，动点 P 在线段 AB 上（不与点 A，B 重合），分别以 AB，AP，BP 为直径作半圆，记图中所示的阴影部分面积为 y，线段 AP 的长为 x．当点 P 从点 A 移动到点 B 时，y 随 x 的变化而变化，则表示 y 与 x 之间关系的图象大致是（　　）





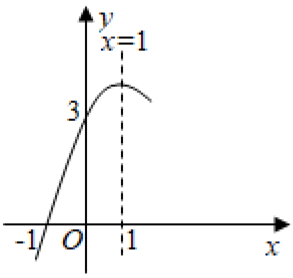
二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9．在平面直角坐标系中，点（5，1）关于原点对称的点的坐标是 ________．

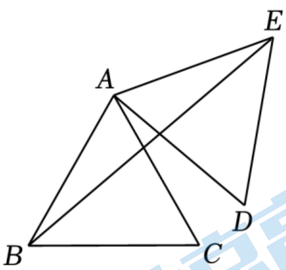
10．关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+m=0$ 有一个根是 $x=1$，则 $m=$______．

11．为响应国家号召打赢脱贫攻坚战，小明利用信息技术开了一家网络商店，将家乡的土特产销往全国．今年 6 月份盈利 12000 元，8 月份盈利 27000 元，求 6 月份到 8 月份盈利的月平均增长率．设 6 月份到 8 月份盈利的月平均增长率为 x，根据题意，可列方程为 ____________．

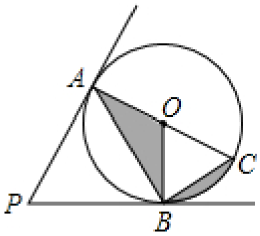
12．抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴及部分图象如图所示，则关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 __________．



13．如图，等边△ABC 绕顶点 A 逆时针旋转 80° 得到△ADE，连接 BE，则∠ABE=______°．



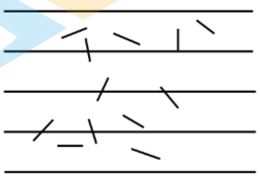
14．如图，PA、PB 与⊙O 相切，切点分别为 A、B．$PA=3$，∠$P=60°$，若 AC 为⊙O 的直径，则圆中阴影部分的面积为___________．



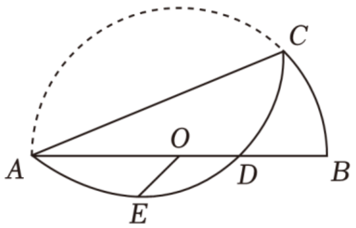
15．十八世纪法国的博物学家 C•布丰做过一个有趣的投针试验．如图，在一个平面上画一组相距为 d 的平行线，用一根长度为 l（$l<d$）的针任意投掷在这个平面上，针与直线相交的概率为 $\frac{2l}{\pi d}$，可以通过这一试验来估计 π 的近似值．某数学兴趣小组利用计算机模拟布丰投针试验，取 $l=\frac{1}{2}d$，得到试验数据如下表：

试验次数	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000
相交频数	495	623	799	954	1123	1269	1434	1590
相交频率	0.3300	0.3115	0.3196	0.3180	0.3209	0.3173	0.3187	0.3180

可以估计出针与直线相交的概率为________（精确到 0.001），由此估计 π 的近似值为________（精确到 0.01）．



16．如图，在半圆 O 中，直径 $AB=4$，C 是半圆上一点，将弧 AC 沿弦 AC 折叠交 AB 于 D，点 E 是弧 AD 的中点．连接 OE，则 OE 的最小值为____________．



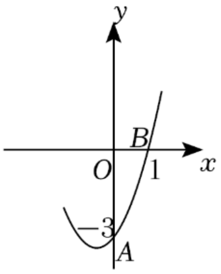
三、解答题（共 68 分，第 17-22 题，每题 5 分，第 23-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17．（5 分）解方程：$x^2+4x+3=0$．

18．（5 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 的部分图象经过点 A（0，﹣3），B（1，0）．

（1）求该抛物线的解析式；

（2）结合函数图象，直接写出 $y<0$ 时，x 的取值范围．



19.（5 分）下面是小立设计的“过圆上一点作这个圆的切线”的尺规作图过程.

已知：⊙O 及圆上一点 A.

求作：直线 AB，使得 AB 为⊙O 的切线，A 为切点.

作法：如图 2，

①连接 OA 并延长到点 C；

②分别以点 A，C 为圆心，大于$\frac{1}{2}AC$长为半径作弧，两弧交于点 D（点 D 在直线 OA 上方）；

③以点 D 为圆心，DA 长为半径作⊙D；

④连接 CD 并延长，交⊙D 于点 B，作直线 AB.

直线 AB 就是所求作的直线.

根据小立设计的尺规作图过程，完成下面的证明.（说明：括号里填推理的依据）

证明：连接 AD.

∵_______=AD

∴点 C 在⊙D 上，

∴CB 是⊙D 的直径.

∴________=90°．（____________）

∴AB⊥_______.

∵OA 是⊙O 的半径，

∴AB 是⊙O 的切线.（______________）

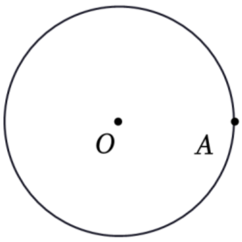


图1

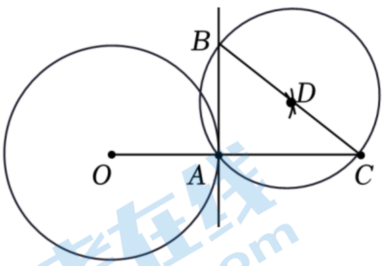
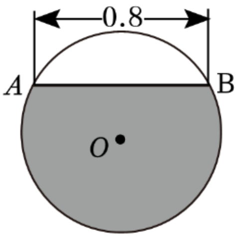


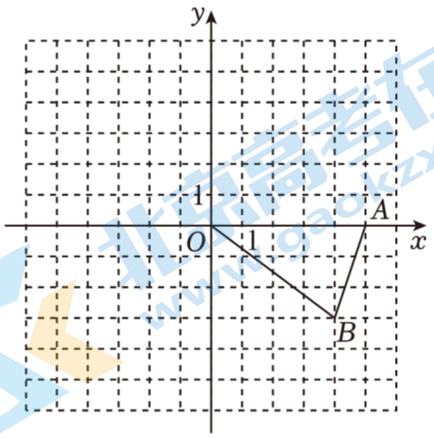
图2

20.（5 分）圆管涵是公路路基排水中常用的涵洞结构类型，它不仅力学性能好，而且构造简单、施工方便．某水平放置的圆管涵圆柱形排水管道的截面是直径为 1m 的圆，如图所示，若水面宽 AB=0.8m，求水的最大深度.



21.（5 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，△OAB 的顶点坐标分别为 O（0，0），A（5，0），B（4，－3），将△OAB 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到△$OA'B'$，点 A 旋转后的对应点为 A'．（1）画出旋转后的图形△$OA'B'$，并写出点 A' 的坐标；

（2）求出点 B 旋转到 B' 的路径长．



22.（5 分）某中学开展“歌唱祖国红歌比赛”活动，七年级一班、二班都从：“A．《歌唱祖国》、B．《我和我的祖国》、C．《唱支山歌给党听》、D．《保卫黄河》”四首歌中任意选择一首作为参赛曲目．

（1）七年级一班恰好抽到歌曲 C 的概率为____________；

（2）比赛规定：各班歌唱不同歌曲，一班先随机抽取一首歌曲，不放回；二班再从剩余的歌曲中随机抽取一首，求出两个班恰好抽到 B、C 歌曲的概率．

23.（6 分）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+2m-1=0$ 有两个不相等的实数根．

（1）求 m 的取值范围；

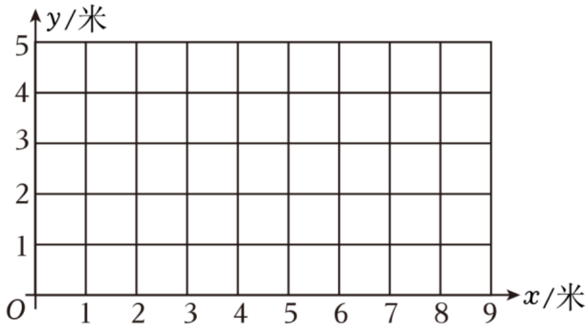
（2）若 m 为正整数，且该方程的根都是整数，求 m 的值．

24.（6 分）图 1 是某农户的种植日光温室，其横截面如图 2 所示，一般由五部分组成．（注：1．前屋面（塑料顶棚），2．防寒沟，3．草帘，4．后屋面，5．北墙）现在以塑料顶棚横截面与地面的交点为坐标原点 O，地面所在的水平线 OA 所在直线为 x 轴，过点 O 垂直于 OA 的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，记顶棚某点距点 O 的水平距离为 x 米，距离地面的高度为 y 米，测量出如下数据：

x/米	0	1	2	3	4	5	6	7	…
y/米	0	1.1	2	2.7	3.2	3.5	3.6	3.5	…

请根据所给信息解决以下问题：

（1）如图，在网格中建立适当的平面直角坐标系，根据已知数据描点，并用平滑的曲线连接；



（2）请结合表中所给数据或所画图象，求出塑料顶棚所在曲线的解析式以及顶棚最高点距离地面的高度（不用写出 x 的取值范围）；

（3）设前屋面与后屋面的交点为 B，已知 B 点距离地面 3.3 米，求点 B 距离点 O 的水平距离.

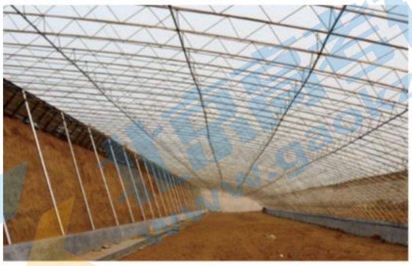
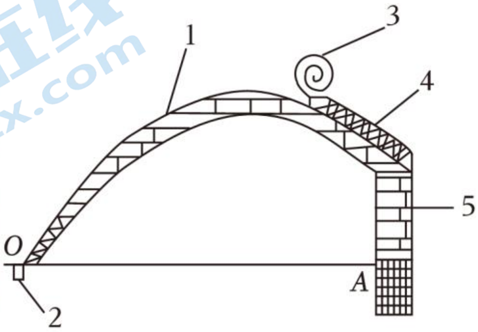
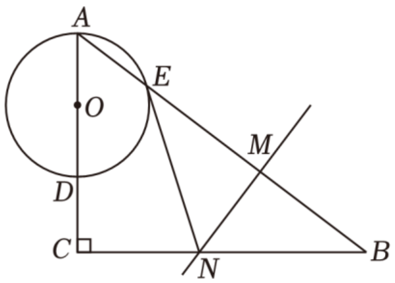



图1　　　　图2

25.（6 分）如图，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，在 AC 上取一点 D，以 AD 为直径作⊙O，与 AB 相交于点 E，作线段 BE 的垂直平分线 MN 交 BC 于点 N，连接 EN.

（1）求证：EN 是⊙O 的切线；

（2）若 AC=3，BC=4，⊙O 的半径为 1，求线段 EN 的长.



26.（6 分）在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2-(a+2)x+2$ 经过点 A（﹣2，t），B（m，p）.

（1）若 t=0，

①求此抛物线的对称轴；

②当 $p<t$ 时，直接写出 m 的取值范围；

（2）若 $t<0$，点 C（n，q）在该抛物线上，$m<n$ 且 $3m+3n\leqslant -4$，请比较 p，q 的大小，并说明理由.

27.（7 分）在△ABC 中，AB=AC，∠BAC=90°，点 D 为直线 AC 上一个动点（点 D 不与点 A，C 重合），连接 BD，将线段 BD 绕 D 点逆时针旋转 90° 得线段 DE，连接 CE.

（1）如图 1，若点 D 在线段 AC 上.

①依题意补全图 1；

②用等式表示线段 CB，CD，CE 之间的数量关系，并证明；

（2）若点 D 在线段 CA 的延长线上，且 $AD<AC$，设 $BC=m$，$BD=n$，直接写出 CE 的长（用含 m，n 的式子表示）.

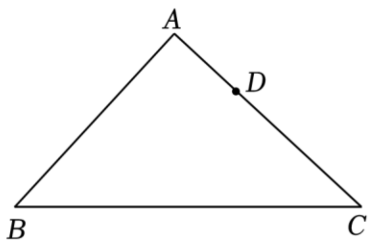
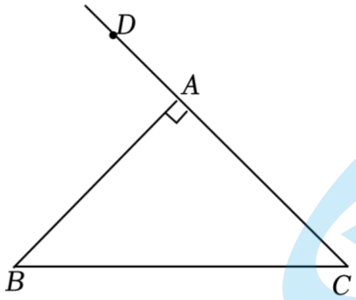


图1



备用图

28.（7 分）在平面直角坐标系 xOy 中，⊙O 的半径为 1，点 A 在⊙O 上，点 P 在⊙O 内，给出如下定义：连接 AP 并延长交⊙O 于点 B，若 $AP=kAB$，则称点 P 是点 A 关于⊙O 的 k 倍特征点.

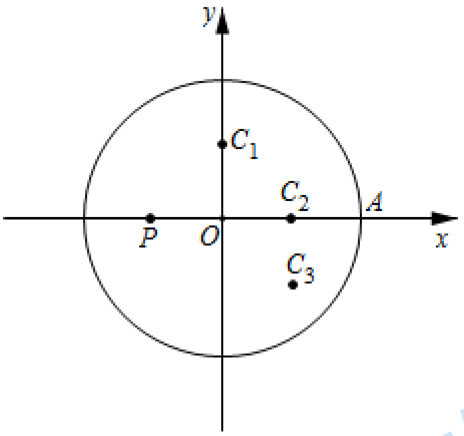
（1）如图，点 A 的坐标为（1，0）.

①若点 P 的坐标为（$-\frac{1}{2}$，0），则点 P 是点 A 关于⊙O 的____________倍特征点；

②在 C_1（0，$\frac{1}{2}$），C_2（$\frac{1}{2}$，0），C_3（$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$）这三个点中，点______是点 A 关于⊙O 的$\frac{1}{2}$倍特征点；

③直线 l 经过点 A，与 y 轴交于点 D，$\angle DAO=60°$．点 E 在直线 l 上，且点 E 是点 A 关于⊙O 的$\frac{1}{2}$倍特征点，求点 E 的坐标；

（2）若当 k 取某个值时，对于函数 $y=-x+1$（$0<x<1$）的图象上任意一点 M，在⊙O 上都存在点 N，使得点 M 是点 N 关于⊙O 的 k 倍特征点，直接写出 k 的最大值和最小值.



参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1.【分析】根据中心对称图形与轴对称图形的概念，进行判断即可．把一个图形绕某一点旋转 180°，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，进而判断得出答案．

【解答】解：A．该图形不是中心对称图形，故此选项不合题意；

B．该图形不是中心对称图形，故此选项不合题意；

C．该图形是中心对称图形，故此选项符合题意；

D．该图形不是中心对称图形，故此选项不合题意．

故选：C．

【点评】本题考查的是中心对称图形的概念，常见的中心对称图形有平行四边形、圆形、正方形、长方形等等．

2.【分析】根据抛物线的顶点式解析式写出顶点坐标即可．

【解答】解：$y=(x-1)^2+2$ 的顶点坐标为（1，2）．

故选：A．

【点评】本题考查了二次函数的性质，熟练掌握利用顶点式解析式写出顶点坐标的方法是解题的关键．

3.【分析】先把常数项移到方程右边，再把方程两边加上 16，然后把方程作边写成完全平方形式即可．

【解答】解：$x^2-8x=-10$，

$x^2-8x+16=6$，

$(x-4)^2=6$．

故选：A．

【点评】此题考查了配方法解一元二次方程，配方法的一般步骤：

（1）把常数项移到等号的右边；

（2）把二次项的系数化为 1；

（3）等式两边同时加上一次项系数一半的平方．

选择用配方法解一元二次方程时，最好使方程的二次项的系数为 1，一次项的系数是 2 的倍数．

4.【分析】根据“左加右减、上加下减”的原则进行解答即可．

【解答】解：把抛物线 $y=2x^2+4$ 向右平移 1 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度，得到的抛物线的解析式为：$y=2(x-1)^2+4-3$，即 $y=2(x-1)^2+1$．

故选：C．

【点评】此题主要考查了二次函数图象与几何变换，要求熟练掌握平移的规律：左加右减，上加下减．

5.【分析】先根据圆周角定理得到 $\angle D=\angle CAB=40°$，然后根据三角形外角的性质计算 $\angle APD$ 的度数．

【解答】解：$\because \angle CAB$ 和 $\angle D$ 都对 $\overset{\frown}{BC}$，

$\therefore \angle D=\angle CAB=40°$，

$\therefore \angle APD=\angle D+\angle ABD=40°+30°=70°$．

故选：D．

【点评】本题考查了圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半．

6．【分析】列表得出所有等可能结果，从中找到符合条件的结果数，再根据概率公式求解即可．

【解答】解：列表如下：

	问天	梦天
问天	（问天，问天）	（梦天，问天）
梦天	（问天，梦天）	（梦天，梦天）

由表知，共有 4 种等可能结果，其中两次都取到写有“问天”的小球的有 1 种结果，

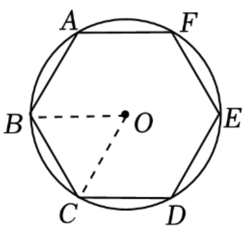
所以两次都取到写有“问天”的小球的概率为$\frac{1}{4}$，

故选：D．

【点评】此题考查的是用列表法或树状图法求概率．列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回实验还是不放回实验．用到的知识点为：概率＝所求情况数与总情况数之比．

7．【分析】连接 OB、OC，根据$\odot O$的周长等于 12π，可得$\odot O$的半径 $OB=OC=6$，而六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，即知$\angle BOC=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$，$\triangle BOC$ 是等边三角形，即可得正六边形的边长为 6．

【解答】解：连接 OB、OC，如图：



$\because \odot O$的周长等于 12π，

$\therefore \odot O$的半径 $OB=OC=\frac{12\pi}{2\pi}=6$，

$\because$六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，

$\therefore \angle BOC=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$，

$\therefore \triangle BOC$ 是等边三角形，

$\therefore BC=OB=OC=6$，

即正六边形的边长为 6，

故选：C．

【点评】本题考查正多边形与圆的相关计算，解题的关键是掌握圆内接正六边形中心角等于 60°，从而得到$\triangle BOC$ 是等边三角形．

8．【分析】设 $AB=a$，$AP=x$，则 $BP=a-x$，根据阴影部分的面积＝大半圆的面积减去两个小半圆的面积，

列出 y 与 x 的函数解析式，从而判断图象的大致形状．

【解答】解：设 $AB=a$，$AP=x$，

则 $BP=a-x$，

$$\therefore y=\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2-\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2-\pi\cdot\left(\frac{a-x}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}-\frac{\pi}{4}x^2-\frac{\pi}{4}a^2+\frac{\pi}{2}ax-\frac{\pi}{4}x^2$$

$$=-\frac{\pi}{2}x^2+\frac{\pi}{2}ax,$$

∴y 关于 x 的函数图象是过原点开口向下的抛物线，

故选：C．

【点评】本题考查动点问题的函数图象，关键是求出函数解析式．

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9．【分析】根据关于坐标原点对称的点的横坐标与纵坐标都互为相反数解答．

【解答】解：点（5，1）关于原点对称的点的坐标是（﹣5，﹣1）．

故答案为：（﹣5，﹣1）．

【点评】本题考查了关于原点对称的点的坐标，熟记关于坐标原点对称的点的横坐标与纵坐标都互为相反数是解题的关键．

10．【分析】把 $x=1$ 代入方程 $x^2-3x+m=0$ 得 $1-3+m=0$，然后解关于 m 的方程即可．

【解答】解：把 $x=1$ 代入方程 $x^2-3x+m=0$ 得 $1-3+m=0$，

解得 $m=2$．

故答案为：2．

【点评】本题考查了一元二次方程的解：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解．

11．【分析】利用今年 8 月份的盈利＝今年 6 月份的盈利×（1+6 月份到 8 月份盈利的月平均增长率）^{2}，即可得出关于 x 的一元二次方程，此题得解．

【解答】解：依题意得 $12000(1+x)^2=27000$，

故答案为：$12000(1+x)^2=27000$．

【点评】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键．

12．【分析】根据抛物线的对称性即可求解．

【解答】解：根据图象可得：图象与 x 轴的一个交点是（﹣1，0），对称轴是：$x=1$，

（﹣1，0）关于 $x=1$ 的对称点是：（3，0），

则抛物线与 x 轴的交点是：（﹣1，0）和（3，0），

∴关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为：$x_1=-1$，$x_2=3$．

故答案为：$x_1=-1$，$x_2=3$．

【点评】本题考查了二次函数的性质，理解二次函数与 x 轴的交点的横坐标就是对应的方程的解是解题关键．

13．【分析】根据等边三角形的性质，旋转的性质和等腰三角形的判定和性质定理即可得到结论．

【解答】解：等边△ABC 绕顶点 A 逆时针旋转 80° 得到△ADE，

∴$\angle BAC=\angle DAE=60°$，$AB=AC=AE$，$\angle BAD=80°$，

∴$\angle BAE=140°$，

∴$\angle ABE=\angle AEB=\frac{1}{2}\times$（180°－140°）$=20°$，

故答案为：20．

【点评】本题考查了旋转的性质，四边形内角和定理，三角形内角和定理等知识，掌握旋转的性质是本题的关键．

14．【分析】根据三角形面积求法得出 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle OBC}$，进而得出答案阴影部分的面积＝扇形 OBC 的面积，即可得出答案．

【解答】解：∵PA、PB 与⊙O 相切，

∴$PA=PB$，$\angle PAO=\angle PBO=90°$

∵$\angle P=60°$，

∴△PAB 为等边三角形，$\angle AOB=120°$，

∴$AB=PA=3$，$\angle OBC=60°$，

∵$OB=OC$，

∴△OBC 为等边三角形，

∴$\angle OCB=60°$，

∵AC 为⊙O 的直径，

∴$\angle ABC=90°$，

∴$AB=AC\cdot\sin\angle ACB=AC\cdot\sin60°$，

$AC=\frac{AB}{\sin60°}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$，

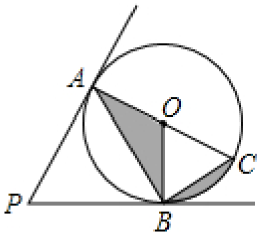
∴$OB=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$．

∵$OA=OC$，

∴$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle OBC}$

∴$S_{阴影}=S_{扇形OBC}=\frac{60\pi\sqrt{3}^2}{360}=\frac{\pi}{2}$，

故答案为：$\frac{\pi}{2}$．



【点评】此题主要考查了三角形面积求法以及扇形面积求法，利用阴影部分的面积整理为一个规则图形的面积是解题关键.

15.【分析】根据频率和概率的关系判断即可.

【解答】解：由题意可以估计出针与直线相交的概率为0.318，由此估计 π 的近似值为：$\frac{1}{0.3180}$≈3.14.

故答案为：0.318；3.14.

【点评】本题主要考查频率与概率的知识，熟练掌握根据频率估计概率的方法是解题的关键.

16.【分析】连接 CE，OC，由三角形任意两边之差小于第三边得，当 O、C、E 共线时 OE 最小，设$\overset{\frown}{AC}$的弧度为 $x°$，求出$\overset{\frown}{CE}$的弧度为 90°，求出 CE 后再减去 OC 即可.

【解答】解：连接 CE，OC，

由三角形任意两边之差小于第三边得，当 O、C、E 共线时 OE 最小，

设$\overset{\frown}{AC}$的弧度为 $x°$，

∴$\overset{\frown}{BC}$的弧度为：$(180-x)°$，

∵$\angle CAD=\angle CAB$，

∴$\overset{\frown}{CD}$的弧度为：$(180-x)°$，

由折叠得，$\overset{\frown}{CDA}$的弧度为 $x°$，

∴$\overset{\frown}{AD}$的弧度为：$x°-(180-x)°=(2x-180)°$，

∵点 E 为弧 AD 中点，

∴$\overset{\frown}{DE}$的弧度为：$(2x-180)°=(x-90)°$，

∴$\overset{\frown}{CE}$的弧度为：$(180-x)°+(x-90)°=90°$，

即$\overset{\frown}{CE}$所对圆心角为 90°，

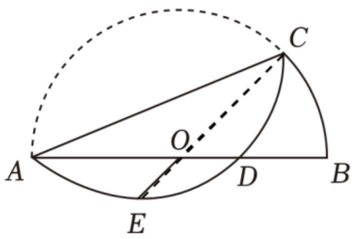
∵$AB=4$，

∴$\odot O$ 半径为 2，

∴$CE=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

∴$OE=CE-OC=2\sqrt{2}-2$.

故答案为：$2\sqrt{2}-2$.



【点评】本题考查了圆的相关知识点的应用，图形折叠及三角形三边关系的性质是解题关键．

三、解答题（共 68 分，第 17-22 题，每题 5 分，第 23-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17.【分析】将方程左边的多项式利用十字相乘法分解因式，然后利用两数相乘积为 0，两因式中至少有一个为 0 转化为两个一元一次方程，求出一次方程的解即可得到原方程的解．

【解答】解：$x^2+4x+3=0$，

分解因式得：$(x+1)(x+3)=0$，

可得 $x+1=0$ 或 $x+3=0$，

解得：$x_1=-1$，$x_2=-3$．

【点评】此题考查了解一元二次方程﹣因式分解法，利用此方法解方程时，首先将方程右边化为 0，左边化为积的形式，然后利用两数相乘积为 0，两因式中至少有一个为 0 转化为两个一元一次方程来求解．

18.【分析】(1) 通过待定系数法求解．

(2) 求出抛物线与 x 轴交点坐标，通过抛物线开口向上求解．

【解答】解：(1) 将 $A(0,\ -3)$，$B(1,\ 0)$ 代入 $y=ax^2+2x+c$ 得 $\begin{cases}-3=c\\0=a+2+c\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=1\\c=-3\end{cases}$，

$\therefore y=x^2+2x-3$．

(2) 令 $x^2+2x-3=0$，

解得 $x=-3$ 或 $x=1$，

∴抛物线经过 $(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$，

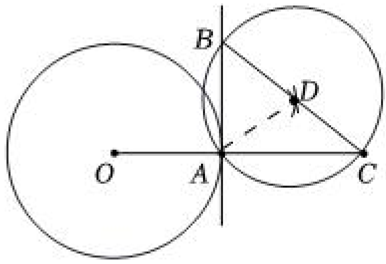
∵抛物线开口向上，

∴$y<0$ 时，$-3<x<1$．

【点评】本题考查二次函数的性质，解题关键是掌握待定系数法求函数解析式，掌握二次函数与方程及不等式的关系．

19.【分析】根据题中的过程，结合图形进行合情推理．

【解答】证明：如图：连接 AD，



∵$CD=AD$

∴点 C 在⊙D 上，

∴CB 是⊙D 的直径.

∴$\angle BAC=90^\circ$ （直径所对的圆周角是 90° ），

∴$AB\perp AC$，

∵OA 是⊙O 的半径，

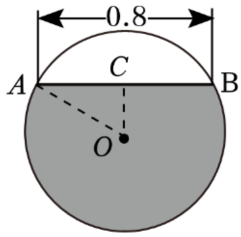
∴AB 是⊙O 的切线，（过半径的外端且垂线于半径的直线是圆的切线），

故答案为：CD，$\angle BAC$，直径所对的圆周角是 90° ，OA，过半径的外端且垂线于半径的直线是圆的切线.

【点评】本题考查了作图的证明，掌握圆的切线的判定是解题的关键.

20.【分析】过点 O 作 $OC\perp AB$ 于点 C，连接 OA，根据垂径定理得到 $AC=0.4$，再在 Rt△ACO 中，根据勾股定理可求出 OC，进而即可求解.

【解答】解：如图，作 $OC\perp AB$ 于点 C，连接 OA，



∵$\angle ACO=90^\circ$ ，$AC=\frac{1}{2}AB$，

∵$AB=0.8$，

∴$AC=0.4$，

在 Rt△ACO 中，根据勾股定理，得 $OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=0.3$，

∴$0.3+0.5=0.8$，

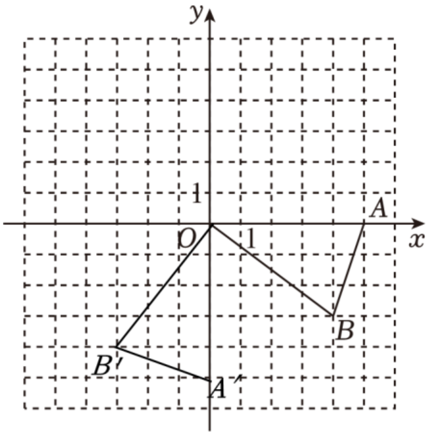
∴水的最大深度为 $0.8m$.

【点评】此题主要考查了垂径定理的应用，以及勾股定理，熟练掌握定理是解题的关键.

21.【分析】(1）将点 A、B 分别绕点 O 顺时针旋转 90° 得到对应点，再与点 O 顺次连接即可，根据图形得出 A'坐标；

（2）根据弧长公式求解即可.

【解答】解：(1）如图 1 所示，△$OA'B'$即为所求，



此时 A'（0，－5）；

（2）由图知，$\angle AOA'=90°$，$OB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∴点 B 在旋转过程中所走过的路径长 $BB'=\frac{90\pi\times5}{180}=\frac{5\pi}{2}$.

【点评】本题考查作图－旋转变换，熟练掌握旋转的性质及弧长公式是解题的关键.

22.【分析】（1）直接根据概率公式求解即可；

（2）列表得出所有等可能结果，从中找到符合条件的结果数，再根据概率公式求解即可.

【解答】解：（1）七年级一班恰好抽到歌曲 C 的概率为$\frac{1}{4}$，

故答案为：$\frac{1}{4}$；

（2）列表如下：

	A	B	C	D
A		（B，A）	（C，A）	（D，A）
B	（A，B）		（C，B）	（D，B）
C	（A，C）	（B，C）		（D，C）
D	（A，D）	（B，D）	（C，D）	

共有 12 种等可能的结果，两个班恰好抽到 B、C 歌曲的结果有 2 种，

∴两个班恰好抽到 B、C 歌曲的概率为$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

【点评】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．注意列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件．用到的知识点为：概率＝所求情况数与总情况数之比.

23.【分析】（1）根据题意得出$\Delta>0$，代入求出即可；

（2）求出 $m=1$ 或 2，代入后求出方程的解，即可得出答案.

【解答】解：（1）∵依题意，得$\Delta=16-4(2m-1)>0$.

∴$m<\frac{5}{2}$，

即 m 的取值范围是 $m<\frac{5}{2}$;

（2）∵m 为正整数，

∴$m=1$ 或 2，

当 $m=1$ 时，方程为 $x^2-4x+1=0$ 的根 $x=2\pm\sqrt{3}$ 不是整数;

当 $m=2$ 时，方程为 $x^2-4x+3=0$ 的根 $x_1=1$，$x_2=3$，都是整数.

综上所述，$m=2$.

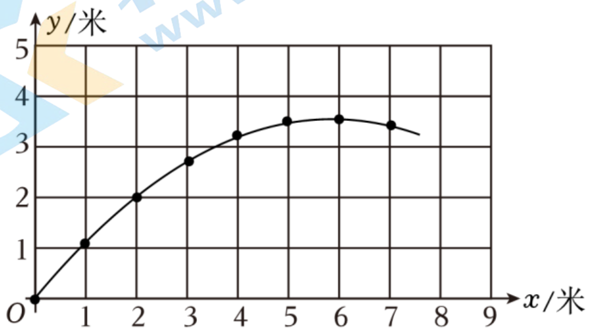
【点评】本题考查了根的判别式和解一元二次方程，能根据题意求出 m 的值和 m 的范围是解此题的关键.

24.【分析】（1）根据表格画出图象即可;

（2）用待定系数法可得解析式;

（3）令 $y=3.3$ 解出 x 的值可得答案.

【解答】解：（1）如图：



（2）由已知可得，塑料顶棚所在曲线为抛物线，顶点为（6，3.6），

设塑料顶棚所在曲线解析式为 $y=a(x-6)^2+3.6$，把（0，0）代入得：

$36a+3.6=0$，

解得 $a=-0.1$，

∴$y=-0.1(x-6)^2+3.6$;

顶棚最高点距离地面的高度为 3.6 米;

（3）在 $y=-0.1(x-6)^2+3.6$ 中，令 $y=3.3$ 得：

$3.3=-0.1(x-6)^2+3.6$，

解得 $x=6+\sqrt{3}$ 或 $x=6-\sqrt{3}$（不符合题意，舍去），

∴点 B 距离点 O 的水平距离为（$6+\sqrt{3}$）米.

【点评】本题考查二次函数的应用，解题的关键是读懂题意，列出函数关系式.

25.【分析】（1）根据线段的垂直平分线的性质，等腰三角形的性质以及直角三角形的两锐角互余得出 $\angle NEM+\angle AEO=90°$ 即可;

（2）利用线段中垂线的性质以及勾股定理列方程求解即可.

【解答】（1）证明：如图，连接 OE，

∵$OA=OE$，

∴$\angle OAE=\angle OEA$，

∵MN是AB的中垂线，

∴$NE=NB$，

∴$\angle B=\angle NEB$，

∵$\triangle ABC$是直角三角形，$\angle ACB=90^\circ$，

∴$\angle B+\angle A=90^\circ$，

∴$\angle NEB+\angle OEA=90^\circ$，

∴$\angle OEN=180^\circ-90^\circ=90^\circ$，

即$OE\perp EN$，

∵OE是半径，

∴EN是⊙O的切线；

（2）解：如图，连接ON，

∵MN是AB的中垂线，

∴$NE=NB$，

设$EN=x=BN$，

在$Rt\triangle CON$中，$ON^2=OC^2+CN^2$，

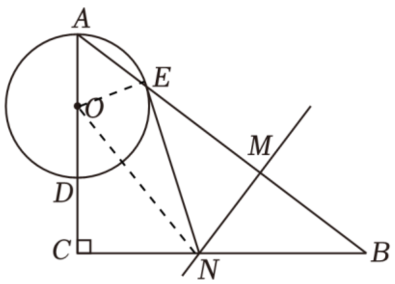
在$Rt\triangle OEN$中，$ON^2=OE^2+EN^2$，

∴$OC^2+CN^2=OE^2+EN^2$，

即$(3-1)^2+(4-x)^2=1^2+x^2$，

解得$x=\frac{19}{8}$，

即$EN=\frac{19}{8}$.



【点评】本题考查切线的判定，线段的中垂线以及直角三角形的边角关系，掌握切线的判定方法，线段中垂线的性质以及勾股定理是正确解答的前提．

26.【分析】(1) ①当$t=0$时，点A的坐标为$(-2，0)$，将其代入函数解析式中解得$a=-1$，则函数解析式为抛物线的解析式为$y=-x^2-x+2$，再根据求对称轴的公式$x=-\frac{b}{2a}$即可求解；

②令$y=0$，求出抛物线与x轴交于$(-2，0)$和$(1，0)$，由题意可得$p<0$，则点B在x轴的下方，以此即可解答；

（2）将点 A 坐标代入函数解析式，通过 $t<0$ 可得 a 的取值范围，从而可得抛物线开口方向及对称轴，根据点 B，C 到对称轴的距离大小关系求解．

【解答】解：（1）当 $t=0$ 时，点 A 的坐标为（－2，0），

∵抛物线 $y=ax^2-(a+2)x+2$ 经过点 $A(-2,0)$，

∴$4a+2(a+2)+2=0$，

∴$a=-1$，

∴抛物线的解析式为 $y=-x^2-x+2$，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-1}{2\times(-1)}=-\frac{1}{2}$；

②令 $y=0$，则 $-x^2-x+2=0$，

解得：$x_1=1$，$x_2=-2$，

∴抛物线与 x 轴交于（－2，0）和（1，0），

∵点 $A(-2,0)$，$B(m,p)$，且 $p<0$，

∴点 $B(m,p)$ 在 x 轴的下方，

∴$m<-2$ 或 $m>1$．

（2）$p<q$，理由如下：

将（－2，t）代入 $y=ax^2-(a+2)x+2$ 得 $t=4a+2(a+2)+2=6a+6$，

∵$t<0$，

∴$6a+6<0$，

∴$a<-1$，

∴抛物线开口向下，

∵抛物线对称轴为直线 $x=-\frac{-(a+2)}{2a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{2}$，

∵$a<-1$，

∴$-1<\frac{1}{a}<0$，

∴$-\frac{1}{2}<\frac{1}{a}+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$，

∵$m<n$ 且 $3m+3n\leqslant-4$，

∴$\frac{m+n}{2}\leqslant-\frac{2}{3}<-\frac{1}{2}$，

∴点 $B(m,p)$ 到对称轴的距离大于点 $C(n,q)$ 到对称轴的距离，

∴$p<q$．

【点评】本题考查二次函数的综合应用，解题关键是掌握二次函数的性质，掌握二次函数与方程及不等式的关系．

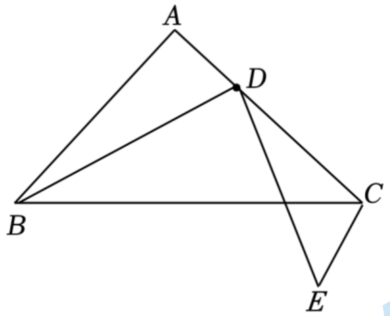
27．【分析】（1）①由题意画出图形即可；

②过点 E 作 $EF\perp AC$ 交 AC 的延长线于 F，证明△EDF≌△DBA（AAS），由全等三角形的性质得出 $EF=$

AD，$DF=AB$，由等腰直角三角形的性质得出结论；

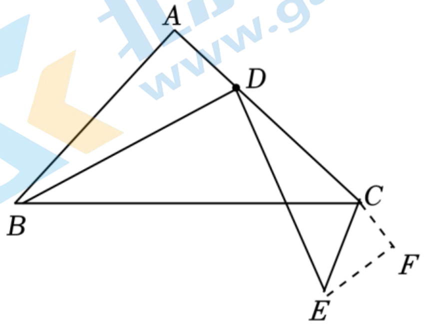
（2）过点 E 作 $EF\perp AC$ 于 F，证明$\triangle EDF\cong\triangle DBA$（$AAS$），得出 $EF=AD$，$DF=AB$，由等腰直角三角形的性质及勾股定理得出答案.

【解答】解：（1）①如图，补全图形如下：



②$CE+\frac{\sqrt{2}}{2}CD=BC$.

证明：过点 E 作 $EF\perp AC$ 交 AC 的延长线于 F，



$\therefore\angle F=90^\circ=\angle BAC$，

由旋转知，$DE=BD$，$\angle BDE=90^\circ$，

$\therefore\angle EDF+\angle ADB=90^\circ$，

$\because\angle BAC=90^\circ$，

$\therefore\angle DBA+\angle ADB=90^\circ$，

$\therefore\angle EDF=\angle DBA$，

$\therefore\triangle EDF\cong\triangle DBA$（$AAS$），

$\therefore EF=AD$，$DF=AB$，

$\because AB=AC=CD+AD$，

$\therefore DF=CD+AD$，

$\because DF=CF+CD$，

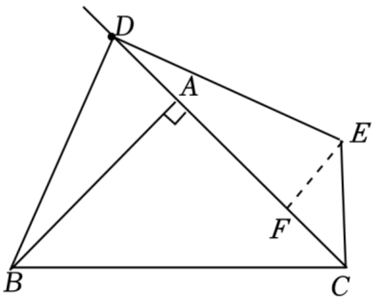
$\therefore CF=AD=EF$，

$\therefore AD=\frac{\sqrt{2}}{2}CE$，

$\therefore\frac{\sqrt{2}}{2}CE+CD=\frac{\sqrt{2}}{2}BC$，

即 $CE+\frac{\sqrt{2}}{2}CD=BC$.

（2）如图，过点 E 作 $EF\perp AC$ 于 F，



$\therefore\angle DFE=90°=\angle BAC=\angle DAB$，

由旋转知，$DE=BD$，$\angle BDE=90°$，

$\therefore\angle EDF+\angle ADB=90°$，

$\because\angle DAB=90°$，

$\therefore\angle DBA+\angle ADB=90°$，

$\therefore\angle EDF=\angle DBA$，

$\therefore\triangle EDF\cong\triangle DBA$（$AAS$），

$\therefore EF=AD$，$DF=AB$，

$\because AB=AC=CF+AF$，

$\therefore DF=CF+AF$，

$\because DF=AD+AF$，

$\therefore CF=AD=EF$，

$\therefore CE=\sqrt{2}CF$，

$\therefore CE=\sqrt{2}AD$，

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=\frac{\sqrt{2}}{2}m$，

$\therefore DA=\sqrt{BD^2-AB^2}=\sqrt{n^2-\frac{1}{2}m^2}$，

$\therefore CE=\sqrt{2}\times\sqrt{n^2-\frac{1}{2}m^2}=\sqrt{2n^2-m^2}$.

【点评】此题是三角形综合题，主要考查了旋转的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，等腰直角三角形的性质，构造出全等三角形是解本题的关键.

28.【分析】(1) ①由题意知 $AP=OA+OP=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，$AB=2$，则 $k=\frac{AP}{AB}=\frac{3}{4}$；

②由勾股定理得 $AC_1=\sqrt{OC_1^{\ 2}+OA^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，假设点 C_1 是点 A 关于⊙O 的$\frac{1}{2}$倍特征点，则 $AE=\sqrt{5}>2OA=2$，不符合题意，同理判断 C_2、C_3 即可；

③当点 D 在 y 轴正半轴上时，设直线 AD 交⊙O 于 B，连接 OE，过点 E 作 $EF\perp x$ 轴于点 F，根据点 E 点

A 关于⊙O 的$\frac{1}{2}$倍特征点，得$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}$，由含 30° 的直角三角形的性质可得 OE，AE 的长，当点 D 在 y 轴负半轴同理可得答案；

（2）设直线 $y=-x+1$ 与 x 轴，y 轴的交点分别为 C，D，过点 N 作 $NP\perp CD$ 交 CD 于 P，交⊙O 于 B，过点 O 作直线 $EF\perp CD$ 交⊙O 于 E，F，由$\frac{MN}{AM}=\frac{k}{1-k}=-1+\frac{1}{1-k}$，可知 k 越大，$1-k$ 的值越小，则 $-1+\frac{1}{1-k}$的值越小，得 $AM=BP$，$MN=NP$ 时，k 的值最小，即 A 与 E 重合，N 与 F 重合时，k 的值最小，从而解决问题.

【解答】解：（1）①∵A（1，0），P（$-\frac{1}{2}$，0），

∴$AP=OA+OP=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

∵B（-1，0），

∴$AB=2$，

∵$AP=kAB$，

∴$k=\frac{AP}{AB}=\frac{3}{4}$，

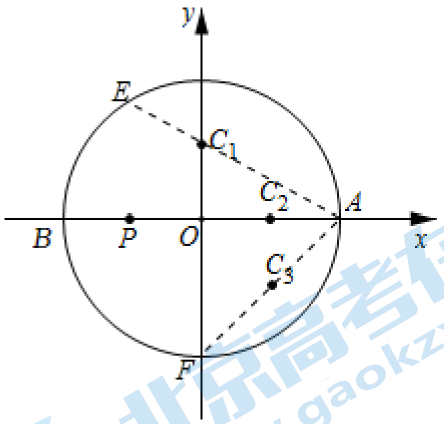
故答案为：$\frac{3}{4}$；

②∵C_1（0，$\frac{1}{2}$），A（1，0），

∴$OC_1=\frac{1}{2}$，$OA=1$，

∴$AC_1=\sqrt{OC_1^2+OA^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

假设点 C_1 是点 A 关于⊙O 的$\frac{1}{2}$倍特征点，



∴$\frac{AC_1}{AE}=\frac{1}{2}$，

∴$AE=\sqrt{5}>2OA=2$，不符合题意，

∴点 C_1 不是点 A 关于⊙O 的$\frac{1}{2}$倍特征点，

同理可求出 $AC_3=\sqrt{AC_2{}^2+C_2C_3{}^2}=\sqrt{(\frac{1}{2}-1)^2+(-\frac{1}{2}-0)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

假设点 C_3 是点 A 关于⊙O 的$\frac{1}{2}$倍特征点，

∴$\frac{AC_3}{AF}=\frac{1}{2}$，

∴C_3 为 AF 的中点，

∴F（0，﹣1），

∵F 在圆上，

∴点 C_3 是点 A 关于⊙O 的$\frac{1}{2}$倍特征点，

∵C_2（$\frac{1}{2}$，0），

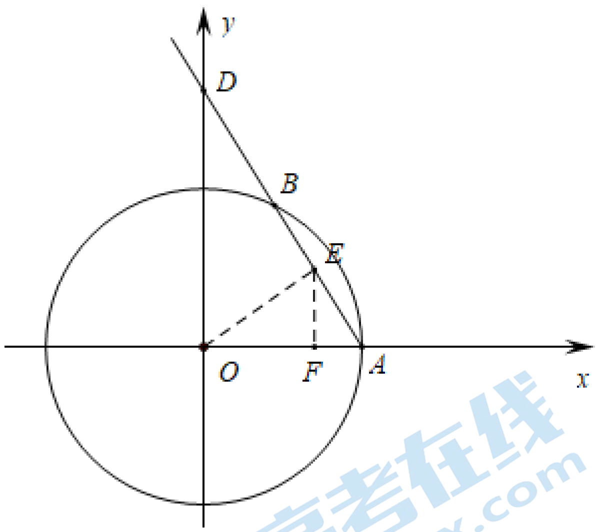
∴$AC_2=\frac{1}{2}$，

∴$\frac{AC_2}{AB}=\frac{1}{4}$，

∴点 C_2 不是点 A 关于⊙O 的$\frac{1}{2}$倍特征点，

故答案为：C_3；

③如图，当点 D 在 y 轴正半轴上时，设直线 AD 交⊙O 于 B，连接 OE，过点 E 作 $EF\perp x$ 轴于点 F，



∵点 E 点 A 关于⊙O 的$\frac{1}{2}$倍特征点，

∴$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}$，

∴E 是 AB 的中点，

∴$OE\perp AB$，

∵$\angle EAO=60°$，

∴$\angle EOA=30°$，

∴$AE=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}$，$EF=\frac{1}{2}OE$，

$OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

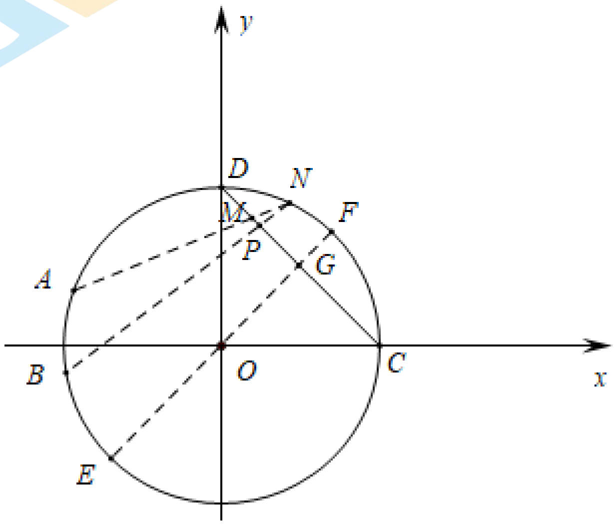
∴$EF=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

∴E（$\frac{3}{4}$，$\frac{\sqrt{3}}{4}$），

当点D在y轴负半轴上时，同理可得E（$\frac{3}{4}$，$-\frac{\sqrt{3}}{4}$），

综上：E（$\frac{3}{4}$，$\frac{\sqrt{3}}{4}$）或（$\frac{3}{4}$，$-\frac{\sqrt{3}}{4}$）；

（2）设直线$y=-x+1$与x轴，y轴的交点分别为C，D，过点N作$NP\perp CD$交CD于P，交⊙O于B，过点O作直线$EF\perp CD$交⊙O于E，F，



∴$MN\geq NP$，$AM\leq BP$，

∵$AM=AN-MN=(1-k)AN$，

∴$\frac{MN}{AM}=\frac{k}{1-k}=-1+\frac{1}{1-k}$，

∵k越大，$1-k$的值越小，

∴$-1+\frac{1}{1-k}$的值越小，

∴当$\frac{MN}{AN}$的值越大，k的值越大，

∴$AM=BP$，$MN=NP$时，k的值最小，

∴A与E重合，N与F重合时，k的值最小，

∵C，D 是直线 $y=-x+1$ 与 x 轴，y 轴的交点，

∴C（1，0），D（0，1），

∵O 到 C 和 D 的距离都是 1，

∴$OC=OD=1$，

∴$CD=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

∵$OG\perp CD$，

∴$CG=DG=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$OG=\sqrt{OC^2-CG^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$FG=OF-OG=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$k=\frac{FG}{EF}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$，

∴k 的最小值为$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$，

当点 N 在 E 点，A 在 F 点时，k 有最大值为$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

【点评】本题属于圆的综合题，主要考查了圆的相关知识，含 30°角的直角三角形的性质，勾股定理等知识，解题的关键是理解新定义，灵活运用所学知识解决问题，属于中考压轴题.

北京初三高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！