2022 北京西城高二（下）期末

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．若 a，b，c 成等差数列，则(　　)

A．$2b=a+c$　　B．$2b=ac$　　C．$b^2=a+c$　　D．$b^2=ac$

2．函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=2$ 处的瞬时变化率为（　　）

A．－2　　B．－4　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{4}$

3．将一枚均匀硬币随机投掷 4 次，恰好出现 2 次正面向上的概率为(　　)

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{5}{8}$

4．已知函数 $f(x)=\sin x+\cos x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，则(　　)

A．$f(x)+f'(x)=2\sin x$　　B．$f(x)+f'(x)=2\cos x$

C．$f(x)-f'(x)=-2\sin x$　　D．$f(x)-f'(x)=-2\cos x$

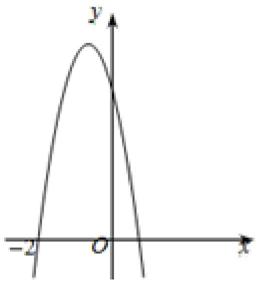
5．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=4$，$a_5=1$，则 $a_3=$(　　)

A．4　　B．±4　　C．2　　D．±2

6．若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_8>0$，$a_7+a_{10}<0$，则当 $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大时，$n=$(　　)

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

7．设函数 $f(x)=ax^3+bx^2+4x$ 的极小值为 -8，其导函数 $y=f'(x)$ 的图象过点 $(-2,0)$，如图所示，则 $f(x)=$(　　)



A．$-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x$　　B．$-x^3-2x^2+4x$

C．$-x^3+4x$　　D．$-2x^3+x^2+4x$

8．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=8$，$a_4=-1$．记 $T_n=a_1a_2\cdots a_n(n=1，2，\cdots)$，则数列 $\{T_n\}$(　　)

A．有最大项，有最小项　　B．有最大项，无最小项

C．无最大项，有最小项　　D．无最大项，无最小项

9．数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2-2\lambda n\ (n=1,2,\cdots)$．若 $\{a_n\}$ 为递增数列，则 λ 的取值范围是(　　)

A．$[1，+\infty)$　　B．$(\frac{3}{2},+\infty)$　　C．$(-\infty，1]$　　D．$(-\infty,\frac{3}{2})$

10．设 P 为曲线 $y=e^x$ 上一点，Q 为曲线 $y=lnx$ 上一点，则 $|PQ|$ 的最小值为(　　)

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11.（5 分）设函数 $f(x)=\frac{lnx}{x}$，则 f'（1）$=$____．

12.（5 分）已知随机变量 X 的分布列如下：

X	0	1	2
P	0.4	p	0.4

则 $p=$____；$D(X)=$____．

13.（5 分）若曲线 $y=xe^{a-x}+bx$ 在 $x=2$ 处的切线方程为 $y=(e-1)x+4$，则 $a=$____；$b=$____．

14.（5 分）已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，其前 n 项和为 S_n．若 $S_4=5S_2$，则 $q=$____．

15.（5 分）已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1．取正方形 $ABCD$ 各边的中点 A_1，B_1，C_1，D_1，作第 2 个正方形 $A_1B_1C_1D_1$；然后再取正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 各边的中点 A_2，B_2，C_2，D_2，作第 3 个正方形 $A_2B_2C_2D_2$；…，依此方法一直继续下去．给出下列四个结论：

①从正方形 $ABCD$ 开始，所有这些正方形的周长依次成等差数列；

②从正方形 $ABCD$ 开始，所有这些正方形的面积依次成等比数列；

③从正方形 $ABCD$ 开始，所有这些正方形周长之和趋近于 8；

④从正方形 $ABCD$ 开始，所有这些正方形面积之和趋近于 2．

其中所有正确结论的序号是 ____．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（13 分）已知函数 $f(x)=(x-1)e^x$．

（I）求 $f(x)$ 的极值；

（II）求 $f(x)$ 在区间 $[-1，2]$ 上的最大值和最小值．

17.（13 分）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=3$，$a_4=7$．

（I）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）若 $\{b_n-a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，$b_1=3$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

18.（14 分）某单位有 A，B 两家餐厅提供早餐与午餐服务，甲、乙两人每个工作日早餐和午餐都在单位用餐，近 00 个工作日选择餐厅用餐情况统计如下（单位：天）：

选择餐厅（早餐，午餐）	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
甲	30	20	40	10
乙	20	25	15	40

假设用频率估计概率，且甲、乙选择餐厅用餐相互独立．

（I）估计一天中甲选择 2 个餐厅用餐的概率；

（II）记 X 为一天中甲用餐选择的餐厅的个数与乙用餐选择的餐厅的个数之和，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（III）判断甲、乙两人在早餐选择 A 餐厅用餐的条件下，哪位更有可能在午餐选择 B 餐厅用餐？说明理由．

19．（15 分）设某商品的利润只由生产成本和销售收入决定．生产成本 C（单位：万元）与生产量 x（单位：百件）间的函数关系是 $C(x)=10000+20x$；销售收入 S（单位：万元）与生产量 x 间的函数关系是

$$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{30}x^3+3x^2+290x,0<x<120\\ 25400,x\geqslant 120\end{cases}.$$

（I）把商品的利润表示为生产量 x 的函数；

（II）为使商品的利润最大化，应如何确定生产量？

20．（15 分）已知函数 $f(x)=x-lnx$．

（I）判断 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上的单调性，并加以证明；

（II）设 $a<0$，若 $f(e^{-x})\geqslant f(x^a)$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，求 a 的最小值．

21．（15 分）已知 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的无穷等差数列．若对于 $\{a_n\}$ 中任意两项 a_m，a_n，在 $\{a_n\}$ 中都存在一项 a_i，使得 $a_i=a_ma_n$，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P．

（I）已知 $a_n=3n$，$b_n=3n+2(n=1，2，\cdots)$，判断数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是否具有性质 P；

（II）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P，证明：$\{a_n\}$ 的各项均为整数；

（III）若 $a_1=20$，求具有性质 P 的数列 $\{a_n\}$ 的个数．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【分析】由 a，b，c 成等差数列，得 $b-a=c-b$，由此能求出结果.

【解答】解：$\because a$，b，c 成等差数列，

$\therefore b-a=c-b$，

整理得 $2b=a+c$.

故选：A.

【点评】本题考查等差数列的性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

2. 【分析】利用导数的定义求解.

【解答】解：$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，

由导数的定义可知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=2$ 处的瞬时变化率为 $f'(2)=-\dfrac{1}{4}$，

故选：D.

【点评】本题主要考查了导数的定义，属于基础题.

3.【分析】将一枚均匀硬币随机投掷 4 次，利用 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率计算公式能求出恰好出现 2 次正面向上的概率.

【解答】解：将一枚均匀硬币随机投掷 4 次，恰好出现 2 次正面向上的概率为：

$p=C_4^2(\dfrac{1}{2})^2(1-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{3}{8}$.

故选：B.

【点评】本题考查概率的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率计算公式的合理运用.

4.【分析】根据导数的公式即可得到结论.

【解答】解：$f(x)=\sin x+\cos x$，$f'(x)=\cos x-\sin x$，

$f(x)+f'(x)=2\cos x$，A 错误，B 正确；

$f(x)-f'(x)=2\sin x$，C、D 错误.

故选：B.

【点评】本题主要考查导数的基本运算，比较基础.

5.【分析】利用等比数列的性质直接求解.

【解答】解：在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=4$，$a_5=1$，

$\therefore a_3^2=a_1a_5=4$，且 a_1，a_3，a_5 同号，

则 $a_3=2$.

故选：C.

【点评】本题考查等比数列的性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

6.【分析】由题意和等差数列的性质求出 $\{a_n\}$ 的前 8 项为正数，从第 9 项开始为负数，由此能求出结果.

【解答】解：$\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7+a_{10}<0$，

$\therefore a_8+a_9=a_7+a_{10}<0$，

$\because a_8>0$，$\therefore a_9<0$，$\therefore a_9-a_8=d<0$，

$\therefore$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 8 项为正数，从第 9 项开始为负数，

$\therefore$ 当 $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大时 n 的值为 8.

故选：B.

【点评】本题考查等差数列的性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

7.【分析】由题设 $f'(x)=3ax^2+2bx+4$，根据所过的点可得 $b=3a+1$，结合图象求出极小值点并代入 $f(x)$ 求参数，即可得解析式，注意验证所得参数是否符合题设.

【解答】解：由题设，$f'(x)=3ax^2+2bx+4$，

则 $f'(-2)=12a-4b+4=0$，故 $b=3a+1$，

所以 $f'(x)=3ax^2+2(3a+1)x+4=(3ax+2)(x+2)$，

令 $f'(x)=0$，可得 $x=-2$ 或 $x=-\dfrac{2}{3a}$，

由图知 $a<0$ 且 $x=-2$ 处有极小值，

所以 $-8a+4b-8=-8$，即 $a=-1$，$b=-2$，经验证满足题设，

故 $f(x)=-x^3-2x^2+4x$.

故选：B.

【点评】本题考查了利用导数研究函数的单调性与极值，考查了数形结合思想，属基础题.

8.【分析】根据题意，求出等比数列 $\{a_n\}$ 的公比，即可得 $\{a_n\}$ 的通项公式，由此可得 T_n 的表达式，分 n 为偶数和奇数两种情况讨论，分析可得答案.

【解答】解：根据题意，设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

若 $a_1=8$，$a_4=-1$，则 $q^3=\dfrac{a_4}{a_1}=-\dfrac{1}{8}$，解可得 $q=-\dfrac{1}{2}$，

则 $a_n=a_1\times q^{n-1}=8\times(-\dfrac{1}{2})^{n-1}=(-1)^{n-1}\times 2^{4-n}$，

故 $T_n=a_1a_2\cdots a_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\times 2^{\frac{n(7-n)}{2}}$，

分析可得：当 n 为偶数时，T_n 为正，当 $n=4$ 时，$2^{\frac{n(7-n)}{2}}$ 最大，此时 T_n 取得最大值，

当 n 为奇数时，T_n 为负，当 $n=3$ 时，$2^{\frac{n(7-n)}{2}}$ 最大，此时 T_n 取得最小值，

故选：A.

【点评】本题考查等比数列的性质，注意等比数列的通项公式，属于基础题.

9.【分析】根据题意，分析可得 $a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-2\lambda(n+1)-n^2+2\lambda n=2n+1-2\lambda>0$，变形分析可得答案.

【解答】解：根据题意，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2-2\lambda n\ (n=1,2,\cdots)$，

则 $a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-2\lambda(n+1)-n^2+2\lambda n=2n+1-2\lambda>0$，

变形可得：$\lambda<\dfrac{2n+1}{2}$，

又由 $n=1$、2、3……，必有 $\lambda<\dfrac{3}{2}$，即 λ 的取值范围为 $(-\infty,\dfrac{3}{2})$；

故选：D．

【点评】本题考查数列的函数的特性，涉及数列的单调性，属于基础题．

10．【分析】两曲线关于直线 $y=x$ 对称，求 $|PQ|$ 的最小值可转化为求 P 到直线 $y=x$ 的最小距离，再利用导数的几何意义，求曲线上斜率为 1 的切线方程，再由点到直线的距离公式求解．

【解答】解：曲线 $y=e^x$ 与曲线 $y=lnx$ 互为反函数，其图象关于 $y=x$ 对称，

故可先求点 P 到直线 $y=x$ 的最近距离 d，

设曲线 $y=e^x$ 上斜率为 1 的切线为 $y=x+b$，

$\because y'=e^x$，由 $e^x=1$，得 $x=0$，

故切点坐标为 $(0,1)$，即 $b=1$，

$\therefore d=\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore |PQ|$ 的最小值为 $2d=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

故选：C．

【点评】本题考查互为反函数的函数图象的对称性以及导数的几何意义，考查曲线的切线方程的求法，考查化归与转化思想，属于中档题．

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．【分析】利用求导法则，先求出 $f'(x)$，再求 f'（1）．

【解答】解：$f'(x)=\dfrac{(lnx)'\times x-lnx\times x'}{x^2}=\dfrac{1-lnx}{x^2}$，$\therefore f'$（1）$=\dfrac{1-ln1}{1}=1$

故答案为：1

【点评】本题考查函数求导运算，属于基础题．

12．【分析】利用分布列的性质求解 p，然后求解期望和方差即可．

【解答】解：由题意可得：$0.4+p+0.4=1$，可得 $p=0.2$，

所以 $E(X)=0\times0.4+1\times0.2+2\times0.4=1$，

所以 $D(X)=0.4\times(0-1)^2+0.2\times(1-1)^2+0.4\times(2-1)^2=0.8$．

故答案为：0.2；0.8．

【点评】本题考查离散型随机变量的分布列的性质以及方差的求法，是基础题．

13．【分析】求出原函数的导函数，利用函数在 $x=2$ 处的导数值等于切线的斜率，且函数在 $x=2$ 处的函数值相等，列方程组求解 a 与 b 的值．

【解答】解：由 $y=xe^{a-x}+bx$，得 $y'=e^{a-x}-xe^{a-x}+b$，

$\because$ 曲线 $y=xe^{a-x}+bx$ 在 $x=2$ 处的切线方程为 $y=(e-1)x+4$，

$\therefore \begin{cases} 2e^{a-2}+2b=2(e-1)+4 \\ e^{a-2}-2e^{a-2}+b=e-1 \end{cases}$，解得 $a=2$， $b=e$.

故答案为：2； e .

【点评】本题考查利用导数研究过曲线上某点处的切线方程，考查运算求解能力，是中档题.

14.【分析】根据题意，由等比数列的前 n 项和公式可得 $\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=5\times\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}$，解可得答案.

【解答】解：根据题意，等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $S_4=5S_2$，其公比 $q\neq 1$，

则有 $\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=5\times\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}$，解可得 $q=\pm 2$，

故答案为： ± 2 .

【点评】本题考查等比数列的求和，涉及等比数列的性质，属于基础题.

15.【分析】根据规律确定各正方形周长、面积所成数列的性质，结合等比数列前 n 项和公式和极限思想判断周长、面积之和的极限值.

【解答】解：由题意，第 1 个正方形边长为 1，则周长为 4，面积为 1；

第 2 个正方形边长为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则周长为 $2\sqrt{2}$，面积为 $\dfrac{1}{2}$；

第 3 个正方形边长为 $\dfrac{1}{2}$，则周长为 2，面积为 $\dfrac{1}{4}$；

……

第 n 个正方形边长为 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$，则周长为 $4\cdot(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$，面积为 $(\dfrac{1}{2})^{n-1}$，

周长、面积均依次成等比数列，①错误，②正确；

所有正方形周长之和为 $\dfrac{4\times[1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n]}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=4(\sqrt{2}+2)[1-(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^n]$，故周长之和无限接近于 $4(\sqrt{2}+2)$，③错误；

所有正方形面积之和为 $\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=2[1-(\dfrac{1}{2})^n]$，故面积之和趋近于 2，④正确.

故答案为：②④.

【点评】本题考查了等比数列前 n 项和公式和极限思想，属于中档题.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.【分析】（I）求出导函数 $f'(x)$，由导数与单调性的关系求出单调区间，从而可得极值；

（II）由（1）得 $f(x)$ 在区间 $[-1，2]$ 上的单调性，计算极值与区间端点处的函数值，从而可得最值.

【解答】解：（I） $f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$，

当 $x>0$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，当 $x<0$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=-1$，无极大值.

（II）由（1）知 $f(x)$ 在 $[-1，0)$ 上单调递减，在 $(0，2]$ 上单调递增，

$f(0)=-1$， $f(-1)=-\dfrac{2}{e}$， f （2） $=e^{2}$，

所以最大值为 e^{2}，最小值为 -1．

【点评】本题主要考查利用导数研究函数的极值与最值，考查运算求解能力，属于基础题．

17．【分析】（I）直接利用等差数列的性质建立方程组 $\begin{cases}a_1+d=3\\a_1+3d=7\end{cases}$ ，求出首项和公差，进一步求出数列的通项公式；

（II）利用分组法的应用求出数列的和．

【解答】解：（I）等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2=3$， $a_4=7$，

设首项为 a_1，公差为 d，

所以 $\begin{cases}a_2=a_1+d=3\\a_4=a_1+3d=7\end{cases}$ ，解得 $\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，

故 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$；

（II）由于 $\{b_n-a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列， $b_1=3$，

故 $b_n-a_n=3\times2^{n-1}$，

整理得 $b_n=(2n-1)+3\times2^{n-1}$，

所以 $S_n=(1+3+5+\ldots+2n-1)+3\times(2^0+2^1+\ldots+2^{n-1})=n^2+3\times\dfrac{(2^n-1)}{2-1}=n^2+3\times2^n-3$．

【点评】本题考查的知识要点：数列的通项公式的求法，数列的求和，分组法的求和，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于中档题．

18．【分析】（I）由统计图表得出一天中甲选择 2 个餐厅用餐的天数，然后计算概率；

（II）得出 X 的可能值是 2，3，4，计算出概率得分布列，由期望公式计算期望．

（III）直接由统计图表计算甲、乙两人在早餐选择 A 餐厅用餐的条件下，午餐选择 B 餐厅用餐的概率，比较即得．

【解答】解：（I）由统计图表，一天中甲选择 2 个餐厅用餐的天数为 60，概率为 $P=\dfrac{60}{100}=0.6$；

（II）易知 X 的可能值是 2，3，4，

$P(X=2)=\dfrac{40}{100}\times\dfrac{60}{100}=0.24$，

$P(X=3)=\dfrac{40}{100}\times\dfrac{40}{100}+\dfrac{60}{100}\times\dfrac{60}{100}=0.52$，

$P(X=4)=\dfrac{60}{100}\times\dfrac{40}{100}=0.24$，

X 的分布列为

X	2	3	4
P	0.24	0.52	0.24

$E(X)=2\times0.24+3\times0.52+4\times0.24=3$．

（III）甲在早餐选择 A 餐厅用餐的条件下午餐选择 B 餐厅用餐的概率为 $P_1=\dfrac{20}{50}=0.4$，

乙在早餐选择 A 餐厅用餐的条件下午餐选择 B 餐厅用餐的概率为 $P_2=\dfrac{25}{45}=\dfrac{5}{9}>0.4$，

所以乙更有可能在午餐选择 B 餐厅用餐.

【点评】本题主要考查离散型随机变量及其分布列，概率统计的实际应用等知识，属于中等题.

19.【分析】(I) 利用 $W(x)=S(x)-C(x)$ 求出利润函数即可；

(II) 利用导数求 $W(x)$ 在 $0<x<120$ 上的最大值，由一次函数单调性求 $x\geqslant 120$ 上的最大值，比较大小，即可确定利润最大时的生产量.

【解答】解：(I) 由题意，利润 $W(x)=S(x)-C(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{30}x^3+3x^2+270x-10000, 0<x<120\\ 15400-20x, x\geqslant 120\end{cases}$.

(II) 由（1），当 $0<x<120$ 时，$W(x)=-\dfrac{1}{30}x^3+3x^2+270x-10000$，

所以 $W'(x)=-\dfrac{1}{10}x^2+6x+270=-\dfrac{1}{10}(x-90)(x+30)$，令 $W'(x)=0$，则 $x=90$ 或 $x=-30$（舍），

故 $x\in(0,90)$，$W'(x)>0$，即 $W(x)$ 递增；$x\in(90,120)$，$W'(x)<0$，即 $W(x)$ 递减；

所以 $W(x)$ 的极大值也是最大值为 $W(90)=14300$（万元）；

当 $x\geqslant 120$ 时，$W(x)$ 递减，此时最大值为 $W(120)=13000$（万元）.

综上，使商品的利润最大，产量为 90 百件.

【点评】本题考查函数的应用，考查学生的运算能力，属于中档题.

20.【分析】（I）对 $f(x)$ 求导，利用导数的正负判断函数的单调性；

（II）先判断出 $0<e^{-x}<\dfrac{1}{e}<1$，$0<x^a<1$，结合（I）中 $f(x)$ 的单调性，将 $f(e^{-x})\geqslant f(x^a)$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，等价转化为 $a\geqslant -\dfrac{x}{lnx}$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，令 $g(x)=-\dfrac{x}{lnx}$，利用导数求出 $g(x)$ 的最大值即可得解.

【解答】解：（I）$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，证明如下：

因为 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，且 $x\in(0,1)$，

所以 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减.

（II）因为 $x\in(1,+\infty)$，所以 $0<e^{-x}<\dfrac{1}{e}<1$，

又因为当 $a<0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$0<x^a<1$，

由（I）知 $f(x)=x-lnx$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，

所以 $f(e^{-x})\geqslant f(x^a)$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

等价于 $e^{-x}\leqslant x^a$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

等价于 $lne^{-x}\leqslant lnx^a$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，即 $a\geqslant -\dfrac{x}{lnx}$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

令 $g(x)=-\dfrac{x}{lnx}$，$x\in(1,+\infty)$，则 $g'(x)=\dfrac{-lnx+1}{ln^2x}$，

令 $g'(x)=0$，得 $x=e$，

所以当 $x \in (1,e)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x \in (e,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{max}=g$（e）$=-\dfrac{e}{lne}=-e$，

所以 $-e \leqslant a<0$，

所以 a 的最小值为 $-e$.

【点评】本题主要考查利用导数研究函数的单调性与最值，考查运算求解能力，属于中档题.

21.【分析】(I) 根据数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P 的定义即可求解；

(II) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由题意，存在 a_i 使得 $a_i=a_n a_{n+1}$，同理，存在 a_j 使得 $a_j=a_n a_{n+2}$，两式相减，根据等差数列的定义即可得证；

(III) 由题意结合 (II) 知 $\{a_n\}$ 的各项均为整数，所以 d 为整数，首先证明 d 为正整数，其次证明 d 为 $a_1(a_1-1)$ 的约数，从而即可求解.

【解答】(I) 解：因为 $a_n=3n$，所以 $3(3mn)=3m \times 3n$，

所以对于 $\{a_n\}$ 中任意两项 a_m，a_n，在 $\{a_n\}$ 中都存在一项 $a_i=a_{3mn}$，使得 $a_i=a_m a_n$，

所以数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P，

因为 $b_n=3n+2$，所以取 $n=1$，$m=2$，则 $a_m a_n=5 \times 8=40$，

因为 $40=3 \times 13+1$，

所以不存在一项 $a_i=40$，

所以数列 $\{b_n\}$ 不具有性质 P；

(II) 证明：设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

因为数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P，所以存在 a_i 使得 $a_i=a_n a_{n+1}$，同理，存在 a_j 使得 $a_j=a_n a_{n+2}$，

两式相减，得 $a_j-a_i=a_n(a_{n+2}-a_{n+1})$，即 $(j-i) \cdot d=a_n \cdot d$，

因为 $d \neq 0$，所以 $a_n=j-i$，

所以 $\{a_n\}$ 的各项均为整数.

(III) 解：由题意结合 (II) 知 $\{a_n\}$ 的各项均为整数，所以 d 为整数，

首先证明 d 为正整数，否则假设 d 为负整数，则 $\{a_n\}$ 为递减数列，所以 $\{a_n\}$ 中各项的最大值为 a_1，

由题设，$\{a_n\}$ 中存在某项 $a_k<0$，且 $|a_k|>|a_1|$，所以 $a_k a_{k+1}>a_1$，

从而对任意正整数 i，$a_i \neq a_k a_{k+1}$，这与 $\{a_n\}$ 具有性质 P 矛盾；

其次证明 d 为 $a_1(a_1-1)$ 的约数，

由 $a_i=a_m a_n$ 得，$a_1+(i-1)d=[a_1+(m-1)d][a_1+(n-1)d]$，

所以 $i-1=\dfrac{a_1(a_1-1)}{d}+(m+n-2)a_1+(m-1)(n-1)d$，

所以 $\dfrac{a_1(a_1-1)}{d}$ 为整数，即 d 为 $a_1(a_1-1)$ 的约数，

由 d 为正整数，所以 d 为 20×19 的正约数，

因为 $20 \times 19=2 \times 2 \times 5 \times 19$，所以 20×19 的正约数共有 $3 \times 2 \times 2=12$ 个，

对于首项为 20，20×19 的正约数为公差的等差数列，易知其满足性质 P，

所以具有性质 P 的数列 $\{a_n\}$ 共有 12 个.

【点评】本题主要考查数列中的递推关系，数列中的新定义及其应用等知识，属于中等题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。