2022 北京通州高一（上）期末

数　学

2022 年 1 月

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{x\mid x\geqslant 0\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{-1\}$　（B）$\{1\}$　（C）$\{-1,0\}$　（D）$\{0,1\}$

（2）已知 $m>0$，则“$a>b$”是“$am>bm$”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

（3）已知函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}-1(x>0)$，则

（A）当且仅当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有最小值为1

（B）当且仅当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有最小值为 2

（C）当且仅当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有最大值为1

（D）当且仅当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有最大值为 2

（4）下列各式中，正确的是

（A）$1.7^{2.5}>1.7^{3}$　（B）$0.8^{-\sqrt{2}}>0.8^{-\sqrt{3}}$

（C）$\log_2 3.4<\log_2 8.5$　（D）$\log_{0.3}1.8<\log_{0.3}2.7$

（5）计算 $\cos 330^\circ=$

（A）$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　（B）$-\dfrac{1}{2}$　（C）$\dfrac{1}{2}$　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（6）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$，则 $f(x)$ 的

（A）最小正周期为 π，最大值为 $\sqrt{3}-1$　（B）最小正周期为 π，最大值为 2

（C）最小正周期为 2π，最大值为 $\sqrt{3}-1$　（D）最小正周期为 2π，最大值为 2

（7）已知函数 $y=f(x)$ 表示为

x	$[-2,0)$	0	$(0,2]$
y	1	0	-2

设 $f(1)=m$，$f(x)$ 的值域为 M，则

（A）$m=-2$，$M=\{-2,0,1\}$　（B）$m=-2$，$M=\{y\mid -2\leqslant y\leqslant 1\}$

（C）$m=1$，$M=\{-2,0,1\}$　（D）$m=1$，$M=\{y\mid -2\leqslant y\leqslant 1\}$

（8）甲、乙两位同学解答一道题：“已知 $\sin 2\alpha=\frac{5}{13}$，$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求 $\cos 4\alpha$ 的值.”

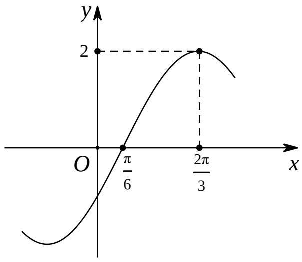
甲同学解答过程如下：	乙同学解答过程如下：
解：由 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，得 $\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi$. 因为 $\sin 2\alpha=\frac{5}{13}$， 所以 $\cos 2\alpha=\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}=\frac{12}{13}$. 所以 $\cos 4\alpha=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha$ $=(\frac{12}{13})^2-(\frac{5}{13})^2=\frac{119}{169}$.	解：因为 $\sin 2\alpha=\frac{5}{13}$， 所以 $\cos 4\alpha=\cos[2\times(2\alpha)]=1-\sin^2 2\alpha$ $=1-(\frac{5}{13})^2$ $=\frac{144}{169}$.

则在上述两种解答过程中

（A）甲同学解答正确，乙同学解答不正确（B）乙同学解答正确，甲同学解答不正确

（C）甲、乙两同学解答都正确　　（D）甲、乙两同学解答都不正确

（9）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的图象如图所示，则



（A）$f(x+\pi)=f(x)$

（B）对于任意 x_1，$x_2\in(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$，且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$

（C）$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(\frac{5\pi}{3}+x)=f(\frac{5\pi}{3}-x)$

（D）$\exists x\in[-\frac{17\pi}{12},-\frac{5\pi}{12}]$，使得 $f(x)=-2$

（10）已知关于 x 的方程 $2\times3^x+a\cdot2^x-2^{x+1}=0(a\in\mathbf{R})$ 的根为负数，则 a 的取值范围是

（A）$(0,\frac{1}{2})$　　（B）$(0,1)$　　（C）$(0,\frac{3}{2})$　　（D）$(0,2)$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）不等式 $x^2-2x>0$ 的解集是__.

（12）已知 $3^x=2$，$y=\log_3 18$，则 $x=$__；$y-x=$__.

（13）已知 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，且 α 是第三象限角，则 $\tan\alpha=$__；$\sin 2\alpha=$__.

（14）化简 $\frac{2\cos(-2\theta)-2}{\tan^2\theta(\cos 2\theta+1)}=$__.

（15）某池塘里原有一块浮萍，浮萍蔓延后的面积 S（单位：平方米）与时间 t（单位：月）的关系式为 $S=a^{t+1}(a>0,且a\neq1)$，图象如图所示. 则下列结论：

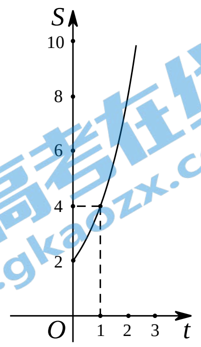
①浮萍蔓延每个月增长的面积都相同；

②浮萍蔓延3个月后的面积是浮萍蔓延5个月后的面积的 $\frac{1}{4}$；

③浮萍蔓延每个月增长率相同，都是50％；

④浮萍蔓延到3平方米所经过的时间与蔓延到4平方米所经过的时间的和比蔓延到12平方米所经过的时间少.

其中正确结论的序号是______.



三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题13分）

已知二次函数 $f(x)=ax^2-2ax+1$.

（I）求 $f(x)$ 的对称轴；

（II）若 $f(-1)=7$，求 a 的值及 $f(x)$ 的最值.

（17）（本小题14分）

已知函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象经过点 $(2,\frac{1}{4})$.

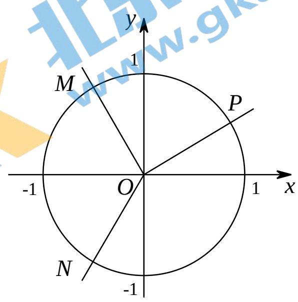
（I）求 a 的值；

（II）求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{2},1]$ 上的最大值；

（III）若 $g(x)=f(x)-x$，求证：$g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内存在零点.

（18）（本小题15分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点 $P(x_1,y_1)$，$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



（I）求 y_1 的值；

（II）将射线 OP 绕坐标原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后与单位圆交于点 $M(x_2,y_2)$，求 x_2 的值；

（III）若点 N 与 M 关于 x 轴对称，求 $\tan\angle MON$ 的值.

（19）（本小题13分）

已知函数 $f(x)=2\sin x$.

（I）求 $f(x)$ 的最大值，并写出 $f(x)$ 取得最大值时自变量 x 的集合；

（II）把曲线 $y=f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，然后使曲线上各点的横坐标变为原来的2倍（纵坐标不变），得到函数 $g(x)$ 的图象，求 $g(x)$ 在 $x\in[-2\pi,2\pi]$ 上的单调递增区间.

（20）（本小题 14 分）

某地区每年各个月份的月平均最高气温近似地满足周期性规律，因此第n个月的月平均最高气温$G(n)$可近似地用函数$G(n)=A\cos(\omega n+\varphi)+k$来刻画，其中正整数$n$表示月份且$n\in[1,12]$，例如$n=1$表示1月份，$A$和$k$是正整数，$\omega>0$，$\varphi\in(0,\pi)$.

统计发现，该地区每年各个月份的月平均最高气温基本相同，1月份的月平均最高气温为3摄氏度，是一年中月平均最高气温最低的月份，随后逐月递增直到7月份达到最高为33摄氏度.

（I）求$G(n)$的解析式；

（II）某植物在月平均最高气温低于13摄氏度的环境中才可生存，求一年中该植物在该地区可生存的月份数.

（21）（本小题 16 分）

若函数$f(x)$的自变量的取值范围为$[a,b]$时，函数值的取值范围恰为$[\frac{2}{b},\frac{2}{a}]$，就称区间$[a,b]$为$f(x)$的一个“和谐区间”.

（I）先判断“函数$f(x)=\frac{1}{x}$没有“和谐区间””是否正确，再写出函数$g(x)=-x+3(x>0)$的“和谐区间”；（直接写出结论即可）

（II）若$f(x)$是定义在$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$上的奇函数，当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)=\frac{1}{\log_2 x}$.

（i）求$f(x)$的“和谐区间”；

（ii）若函数$g(x)$的图象是以$f(x)$在定义域内所有“和谐区间”上的图象，是否存在实数m，使集合$\{(x,y)\mid y=g(x)\}\cap\{(x,y)\mid y=x^3-mx,m>0\}$恰含有2个元素，若存在，求出$m$的取值范围；若不存在，请说明理由.

2022 北京通州高一（上）期末数学

参考答案

2022 年 1 月

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D	（2）C	（3）A	（4）C	（5）B
（6）B	（7）A	（8）D	（9）C	（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$\{x|x<0$，或 $x>2\}$　　（12）$\log_3 2$；2　　（13）$\frac{4}{3}$；$\frac{24}{25}$

（14）-2　　（15）②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本题 13 分）

解：（I）因为二次函数 $f(x)=ax^2-2ax+1$，

所以对称轴 $x=-\frac{-2a}{2a}=1$.　　　　………………4 分

（II）因为 $f(-1)=7$，所以 $a+2a+1=7$.

所以 $a=2$.　　　　………………8 分

所以 $f(x)=2x^2-4x+1$.

因为 $a=2>0$，

所以 $f(x)$ 开口向上，有最小值为 $f(1)=-1$.

所以 a 的值是 2，$f(x)$ 的最小值是 -1，无最大值.　　　　……………… 13 分

（17）（本题 14 分）

解：（I）因为函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象经过点 $(2,\frac{1}{4})$，

所以 $a^2=\frac{1}{4}$.

所以 $a=\frac{1}{2}$.　　　　………………4 分

（II）因为 $a=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=(\frac{1}{2})^x$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{2},1]$ 上单调递减.　　　　………………6 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{2},1]$ 上的最大值是 $f(-\frac{1}{2})$.

所以 $f(-\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{2},1]$ 上的最大值是 $\sqrt{2}$． ………………9 分

（III）因为 $g(x)=f(x)-x$，

所以 $g(x)=(\frac{1}{2})^x-x$．

因为 $g(0)=1>0$， $g(1)=-\frac{1}{2}<0$，

所以 $g(0)g(1)<0$， 又 $y=g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的图象是一条连续不断的曲线，

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内存在零点． ………………14 分

（18）（本题 15 分）

解：（I）因为角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x_1,y_1)$，且 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

由三角函数定义，得 $x_1=\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

因为 $x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=1$，所以 $y_1^{\ 2}=1-(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2=\frac{1}{5}$．

因为点 $P(x_1,y_1)$ 在第一象限，

所以 $y_1=\frac{\sqrt{5}}{5}$． ………………5 分

（II）因为射线 OP 绕坐标原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后与单位圆交于点 $M(x_2,y_2)$，

所以 $x_2=\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha$．

因为 $\sin\alpha=y_1$，

所以 $x_2=-\frac{\sqrt{5}}{5}$． ……………… 9 分

（III）因为点 N 与 M 关于 x 轴对称，

所以点 N 的坐标是 $(-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5})$．

连接 MN 交 x 轴于点 Q，所以 $\tan\angle MOQ=2$．

所以 $\tan\angle MON=\tan 2\angle MOQ$

$$=\frac{2\tan\angle MOQ}{1-\tan^2\angle MOQ}=\frac{2\times2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}.$$

所以 $\tan\angle MON$ 的值是 $-\frac{4}{3}$． ………………15 分

（19）（本题 13 分）

解：（I）因为 $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$，

所以 $-2 \leqslant 2\sin x \leqslant 2$.

所以 $f(x)$ 的最大值 2， $f(x)$ 取得最大值时自变量 x 的集合是 $\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. ………………5 分

（II）因为把曲线 $y = f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，然后使曲线上各点的横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变），

得到函数 $g(x)$ 的图象，

所以 $g(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3})$.

因为 $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$，

所以 $-\frac{2\pi}{3} \leqslant \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{4\pi}{3}$.

因为正弦曲线在 $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ 上的单调递增区间是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，

所以 $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$.

所以 $-\frac{5\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$.

所以 $g(x)$ 在 $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 上的单调递增区间是 $[-\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$. ………………13 分

（20）（本题 14 分）

解：（I）因为1月份的月平均最高气温最低，7 月份的月平均最高气温最高，

所以最小正周期 $T = 2 \times (7-1) = 12$.

所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6}$.

所以 $\cos(\frac{\pi}{6} + \varphi) = -1$， $\cos(\frac{7\pi}{6} + \varphi) = 1$.

因为 $\varphi \in (0, \pi)$，所以 $\varphi = \frac{5\pi}{6}$.

因为1月份的月平均最高气温为3摄氏度，7 月份的月平均最高气温为33摄氏度，

所以 $-A + k = 3$， $A + k = 33$.

所以 $A = 15$， $k = 18$.

所以 $G(n)$ 的解析式是 $G(n) = 15\cos(\frac{\pi}{6}n + \frac{5\pi}{6}) + 18$， $n \in [1,12]$， n 为正整数.

………………8 分

（II）因为 $G(n) = 15\cos(\frac{\pi}{6}n + \frac{5\pi}{6}) + 18$， $n \in [1,12]$， n 为正整数.

所以 $G(n)$ 在区间上 $[1,7]$ 单调递增，在区间 $[7,12]$ 上单调递减.

因为某植物在月平均最高气温低于13摄氏度的环境中才可生存，

且 $G(3)=15\cos(\frac{3\pi}{6}+\frac{5\pi}{6})+18=10.5$， $G(4)=15\cos(\frac{4\pi}{6}+\frac{5\pi}{6})+18=18$，

所以该植物在 1 月份，2 月份，3 月份可生存.

又 $G(11)=G(3)=10.5$，

所以该植物在 11 月份，12 月份也可生存.

所以一年中该植物在该地区可生存的月份数是 5.　　　………………14 分

（21）（本题 16 分）

解：（I）正确；$[1,2]$.　　　………………4 分

（II）（i）因为当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f(x)=\frac{1}{\log_2 x}$，

所以当 $x\in(-\infty,-1)$ 时， $-x\in(1,+\infty)$，所以 $f(-x)=\frac{1}{\log_2(-x)}$.

因为 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 上的奇函数，

所以 $f(-x)=-f(x)$.

所以当 $x\in(-\infty,-1)$ 时， $f(x)=\frac{-1}{\log_2(-x)}$.

设 $1<a<b$，因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(a)=\frac{1}{\log_2 a}=\frac{2}{a}$， $f(b)=\frac{1}{\log_2 b}=\frac{2}{b}$.

所以 $a=2\log_2 a$， $b=2\log_2 b$.

所以 a， b 是方程 $x=2\log_2 x$ 的两个不相等的正数根，即 a， b 是方程 $2^x=x^2$ 的两个不相等的正数根.

所以 $a=2$， $b=4$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的“和谐区间”是 $[2,4]$.

同理可得， $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上的“和谐区间”是 $[-4,-2]$.

所以 $f(x)$ 的 “和谐区间”是 $[-4,-2]$ 和 $[2,4]$.　　　………………9 分

（ii）存在，理由如下：

因为函数 $g(x)$ 的图象是以 $f(x)$ 在定义域内所有“和谐区间”上的图象，

所以 $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{\log_2 x}, x\in[2,4],\\ \frac{-1}{\log_2(-x)}, x\in[-4,-2].\end{cases}$

若集合 $\{(x,y)\mid y=g(x)\}\cap\{(x,y)\mid y=x^3-mx, m>0\}$ 恰含有 2 个元素，

等价于函数 $g(x)$ 与函数 $y=x^3-mx, m>0$ 的图象有两个交点，且一个交点在第一象限，一个交点在第三象限.

因为 $g(x)$ 与 $y=x^3-mx, m>0$ 都是奇函数，

所以只需考虑 $g(x)$ 与 $y=x^3-mx, m>0$ 的图象在第一象限内有一个交点.

因为$g(x)=\dfrac{1}{\log_2 x}$在区间$[2,4]$上单调递减，

所以曲线$y=g(x)$的两个端点为$A(2,1)$，$B(4,\dfrac{1}{2})$.

因为$m>0$，

所以$y=x^3-mx$的零点是$x=-\sqrt{m}$，$x=0$，或$x=\sqrt{m}$.

所以当$y=x^3-mx$的图象过点$A(2,1)$时，$m=\dfrac{7}{2}$；

当$y=x^3-mx$的图象过点$B(4,\dfrac{1}{2})$时，$m=\dfrac{127}{8}$.

所以当$m\in[\dfrac{7}{2},\dfrac{127}{8}]$时，$g(x)$与$y=x^3-mx,m>0$的图象在第一象限内有一个交点.

所以$g(x)$与$y=x^3-mx,m>0$的图象有两个交点.

所以m的取值范围是$[\dfrac{7}{2},\dfrac{127}{8}]$. ………………16分