

昌平区 2023 年高三年级第二次统一练习

数学试卷参考答案及评分标准 2023.5

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) C (2) A (3) D (4) A (5) D
(6) B (7) C (8) C (9) D (10) B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

- (11) $\log_2 5$ (12) $F(0,1)$ $2\sqrt{2}+1$ (13) $\sqrt{3}$ $(\frac{\pi}{6}, 0)$ (答案不唯一)
(14) $[1,5]$ (15) ①②④

（第 12 题、第 13 题第一空 3 分，第二空 2 分；第 15 题答对一个给 2 分，答对两个给 3 分，答对三个给 5 分，错答得零分。）

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16) (共 13 分)

- 解：(I) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 及 $\sqrt{3}a = 2b \sin A$,1 分
得 $\sqrt{3} \sin A = 2 \sin B \sin A$2 分
因为 $\sin A \neq 0$,3 分
所以 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$4 分
因为 $0 < \angle B < \pi$,5 分
所以 $\angle B = \frac{\pi}{3}$ 或 $\angle B = \frac{2\pi}{3}$7 分
(II) 因为 $b = \sqrt{7}, c = 3$,8 分
所以 $b < c$, 即 $\angle B < \angle C$9 分
所以 $\angle B = \frac{\pi}{3}$9 分
由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 得 $a^2 - 3a + 2 = 0$10 分
所以 $a = 1$ 或 $a = 2$11 分
当 $a = 1$ 时, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{4}$;12 分
当 $a = 2$ 时, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{2}$13 分

(17) (共 13 分)

解: (I) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中,

因为 F, G 分别是 PB, PD 的中点,

所以 $BD \parallel FG$1 分

因为 $BD \not\subset$ 平面 EFG , $FG \subset$ 平面 EFG ,2 分

所以 $BD \parallel$ 平面 EFG4 分

(II) 因为底面 $ABCD$ 是菱形,

所以 $AC \perp BD$5 分

因为 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,

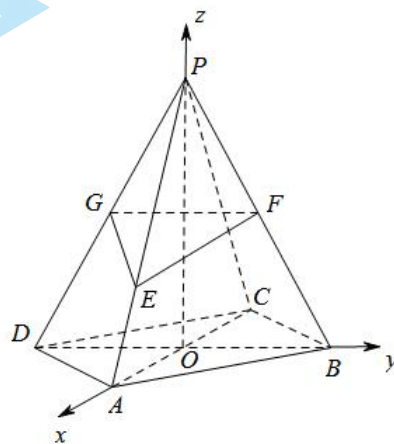
所以 $PO \perp OA, PO \perp OB$.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$6 分

选条件①: $BD = 2\sqrt{3}$.

因为底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形,

所以 $OD = \sqrt{3}, OA = 1$7 分



则 $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,\sqrt{3},0), P(0,0,2), G(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},1), F(0,\frac{\sqrt{3}}{2},1)$.

因为 E 是 PA 上一点, 且 $AP = 3AE$,

所以 $E(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})$8 分

所以 $\overrightarrow{PA} = (1,0,-2), \overrightarrow{GF} = (0,\sqrt{3},0), \overrightarrow{GE} = (\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{3})$9 分

设平面 EFG 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$.

$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{GF} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{GE} = 0. \end{cases} \text{即} \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{3}z = 0, \\ \sqrt{3}y = 0. \end{cases}$$

令 $y = 0$, 则 $x = 1, z = 2$, 于是 $\boldsymbol{n} = (1, 0, 2)$ 11 分

设直线 PA 与平面 EFG 所成角为 α , 则

$$\sin \alpha = |\cos \langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{PA} \rangle| = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PA}|}{\|\boldsymbol{n}\| \|\overrightarrow{PA}\|} = \frac{3}{5}. \quad \text{.....13 分}$$

选条件②: $\angle DAB = \frac{2\pi}{3}$.

因为底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形,

所以 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$.

所以 $AC = 2$.

所以 $OD = \sqrt{3}$, $OA = 1$.

……1 分

以下同选条件①.

(18) (共 14 分)

解: (I) 由题意知, 抽出的 100 名学生中, 来自 1 班, 2 班, 3 班, 4 班的学生分别有 30 名, 40 名, 20 名, 10 名, 根据分层抽样的方法, 1 班, 2 班, 3 班, 4 班参加的人数分别为 3, 4, 2, 1.

……4 分

(II) 根据题意, 随机变量 X 的所有可能取值为 1, 2, 3, 4. 且

……5 分

$$P(X=1) = \frac{C_3^3 C_7^1}{C_{10}^4} = \frac{1}{30}; \quad P(X=2) = \frac{C_3^2 C_7^2}{C_{10}^4} = \frac{9}{30};$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^1 C_7^3}{C_{10}^4} = \frac{15}{30}; \quad P(X=4) = \frac{C_3^0 C_7^4}{C_{10}^4} = \frac{5}{30}.$$

……9 分

所以随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{5}{30}$

故随机变量 X 的数学期望 $E(X) = 1 \times \frac{1}{30} + 2 \times \frac{9}{30} + 3 \times \frac{15}{30} + 4 \times \frac{5}{30} = \frac{14}{5}$. ……11 分

(III) 由题意知, 1 班每位同学获得奖品的概率为 $C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} + C_4^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{9}$. ……13 分

所以 1 班参加竞赛的同学中至少有 1 位同学获得奖品的概率为 $1 - \left(\frac{8}{9}\right)^3 = \frac{217}{729}$.

……14 分

(19) (共 15 分)

解: (I) 由题设, $\begin{cases} 2a=4, \\ c=1, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=\sqrt{3}. \end{cases}$

……4 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

……5 分

(II) 解法一:

由题意可知 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$.

设 $P(x_0, y_0) (x_0 \neq \pm 2)$, 则 $3x_0^2 + 4y_0^2 = 12$. ①

……6 分

直线 AP 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 + 2} (x + 2)$.

……7 分

令 $x = 4$ ，得点 M 的纵坐标为 $y_M = \frac{6y_0}{x_0 + 2}$ ，则 $M(4, \frac{6y_0}{x_0 + 2})$8 分

直线 BP 的方程： $y = \frac{y_0}{x_0 - 2}(x - 2)$9 分

令 $x = 4$ ，得点 N 的纵坐标为 $y_N = \frac{2y_0}{x_0 - 2}$ ，则 $N(4, \frac{2y_0}{x_0 - 2})$10 分

设以 MN 为直径的圆经过 x 轴上的定点 $Q(x_1, 0)$ ，则 $MQ \perp NQ$.

由 $\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{NQ} = 0$ 得 $(x_1 - 4)^2 + \frac{12y_0^2}{(x_0 + 2)(x_0 - 2)} = 0$. ②11 分

由①式得 $12y_0^2 = 36 - 9x_0^2 = 9(4 - x_0^2)$ ，代入②得 $(x_1 - 4)^2 = 9$12 分

解得 $x_1 = 1$ 或 $x_1 = 7$13 分

所以以 MN 为直径的圆经过 x 轴上的定点 $(1, 0)$ 和 $(7, 0)$14 分

所以以 MN 为直径的圆截 x 轴所得的弦长为定值 6.15 分

解法二：

由题意可知 $A(-2, 0)$ ， $B(2, 0)$.

设 $P(x_0, y_0)(x_0 \neq \pm 2)$ ，则 $3x_0^2 + 4y_0^2 = 12$6 分

因为 $k_{AP} \cdot k_{BP} = \frac{y_0}{x_0 + 2} \cdot \frac{y_0}{x_0 - 2} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - 4} = \frac{\frac{12 - 3x_0^2}{4}}{x_0^2 - 4} = -\frac{3}{4}$,7 分

设直线 AP 的方程为 $y = k(x + 2)$.

令 $x = 4$ ，得点 M 的纵坐标为 $y_M = 6k$ ，则 $M(4, 6k)$8 分

则直线 BP 的方程为 $y = -\frac{3}{4k}(x - 2)$9 分

令 $x = 4$ ，得点 N 的纵坐标为 $y_N = -\frac{3}{2k}$ ，则 $N(4, -\frac{3}{2k})$10 分

设以 MN 为直径的圆经过 x 轴上的定点 $Q(x_1, 0)$ ，则 $MQ \perp NQ$11 分

由 $\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{NQ} = 0$ 得 $(x_1 - 4)^2 + (0 - 6k)(0 + \frac{3}{2k}) = 0$12 分

可得 $(x_1 - 4)^2 = 9$ ，解得 $x_1 = 1$ 或 $x_1 = 7$13 分

所以以 MN 为直径的圆经过 x 轴上的定点 $(1, 0)$ 和 $(7, 0)$14 分

所以以 MN 为直径的圆截 x 轴所得的弦长为定值 6.15 分

解法三：

由题意可知 $A(-2, 0)$ ， $B(2, 0)$.

设 $P(x_0, y_0)(x_0 \neq \pm 2)$ ，则 $3x_0^2 + 4y_0^2 = 12$. ①6 分

直线 AP 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 + 2}(x + 2)$7 分

令 $x = 4$ ，得点 M 的纵坐标为 $y_M = \frac{6y_0}{x_0 + 2}$ ，则 $M(4, \frac{6y_0}{x_0 + 2})$8 分

直线 BP 的方程： $y = \frac{y_0}{x_0 - 2}(x - 2)$9 分

令 $x = 4$, 得点 N 的纵坐标为 $y_N = \frac{2y_0}{x_0 - 2}$, 则 $N(4, \frac{2y_0}{x_0 - 2})$10 分

所以 $|MN| = |\frac{6y_0}{x_0 + 2} - \frac{2y_0}{x_0 - 2}|$.

则 MN 的中点为 $Q(4, \frac{3y_0}{x_0 + 2} + \frac{y_0}{x_0 - 2})$11 分

所以以 MN 为直径的圆的方程为

$(x - 4)^2 + [y - (\frac{3y_0}{x_0 + 2} + \frac{y_0}{x_0 - 2})]^2 = (\frac{3y_0}{x_0 + 2} - \frac{y_0}{x_0 - 2})^2$12 分

令 $y = 0$, 则 $(x - 4)^2 = (\frac{3y_0}{x_0 + 2} - \frac{y_0}{x_0 - 2})^2 - (\frac{3y_0}{x_0 + 2} + \frac{y_0}{x_0 - 2})^2 = \frac{-12y_0^2}{x_0^2 - 4}$.

由①可得 $-12y_0^2 = 9(x_0^2 - 4)$.

所以 $(x - 4)^2 = 9$.

所以 $x = 1$ 或 $x = 7$13 分

所以以 MN 为直径的圆恒过点 $(1, 0), (7, 0)$14 分

所以以 MN 为直径的圆截 x 轴所得的弦长为定值 6.15 分

(20) (共 15 分)

解: (I) 当 $k = 1$ 时, $f(x) = x - \ln(1 + x)$.

所以 $f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x}$1 分

因为 $f'(0) = 0, f(0) = 0$3 分

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 0$4 分

(II) 函数 $f(x)$ 定义域 $(-1, +\infty)$5 分

因为 $f'(x) = k - \frac{1}{1 + x}$6 分

法一:

因为 $x > 0$, 所以 $0 < \frac{1}{1 + x} < 1$7 分

①当 $k \geq 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无最小值, 即 $k \geq 1$ 不合题意.8 分

②当 $0 < k < 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = \frac{1}{k} - 1 > 0$.

当 $f'(x) > 0$ 时, $x > \frac{1}{k} - 1$, $f(x)$ 在 $(\frac{1}{k} - 1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $f'(x) < 0$ 时, $0 < x < \frac{1}{k} - 1$, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{k} - 1)$ 上单调递减.9 分

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最小值.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最小值时 k 的取值范围为 $(0, 1)$10 分

法二:

因为 $f'(x) = k - \frac{1}{1+x} = \frac{kx+k-1}{1+x} = \frac{k(x+\frac{k-1}{k})}{1+x}$6 分

令 $f'(x) = 0$, 则 $x = \frac{1}{k} - 1$7 分

①当 $k \geq 1$ 时, $x = \frac{1}{k} - 1 < 0$,

所以当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无最小值, 即 $k \geq 1$ 不合题意.8 分

②当 $0 < k < 1$ 时, $x = \frac{1}{k} - 1 > 0$.

当 $f'(x) > 0$ 时, $x > \frac{1}{k} - 1$, $f(x)$ 在 $(\frac{1}{k} - 1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $f'(x) < 0$ 时, $0 < x < \frac{1}{k} - 1$, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{k} - 1)$ 上单调递减.9 分

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最小值.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最小值时 k 的取值范围为 $(0, 1)$10 分

(III) 设 $g(x) = f(x) - x^2 = kx - \ln(1+x) - x^2$.

由题意, 存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使 $x \in (0, x_0)$, 恒有 $f(x) < x^2$,

即 $x \in (0, x_0)$, 恒有 $g(x) < 0$ 成立.11 分

因为 $g'(x) = k - \frac{1}{1+x} - 2x = \frac{-2x^2 + (k-2)x + k-1}{1+x}$,12 分

设 $h(x) = -2x^2 + (k-2)x + k-1$.

①当 $0 < k \leq 1$ 时, 函数 $h(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{k-2}{4} < 0$, $h(0) = k-1 \leq 0$,

即当 $x \geq 0$ 时, $h(x) \leq 0$, 所以 $g'(x) \leq 0$.

所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $g(x) \leq g(0) = 0$, 即 $x \in (0, x_0)$, 恒有 $g(x) < 0$ 成立.13 分

②当 $k > 1$ 时, 令 $h(x) = 0$.

因为 $\Delta = (k-2)^2 - 4 \times (-2)(k-1) = k^2 + 4k - 4 = (k+2)^2 - 8 > 1 > 0$,

所以 $x = \frac{(k-2) \pm \sqrt{(k+2)^2 - 8}}{4}$.

因为当 $x \in (0, \frac{(k-2) + \sqrt{(k+2)^2 - 8}}{4})$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{(k-2) + \sqrt{(k+2)^2 - 8}}{4})$ 上单调递增.

所以 $g(x) > g(0) = 0$, 不合题意.14 分

综上可知当 $0 < k \leq 1$ 时, 存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使 $x \in (0, x_0)$, 恒有 $f(x) < x^2$.

.....15 分

(21) (共 15 分)

解: (I) 1,0,1,2,1. (答案不唯一 1,2,1,0,1.)3 分

(II) 必要性:

因为 η 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列,

所以 $a_{k+1} - a_k = 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots, 1999$).4 分

所以 η 数列 $\{a_n\}$ 是以 24 为首项, 公差为 1 的等差数列.

所以 $a_{2000} = 24 + (2000 - 1) \times 1 = 2023$5 分

充分性:

因为 $|a_{k+1} - a_k| = 1$,

所以 $a_{k+1} - a_k \leq 1$6 分

所以 $a_{2000} - a_{1999} \leq 1$,

$a_{1999} - a_{1998} \leq 1$,

.....

$a_2 - a_1 \leq 1$.

所以 $a_{2000} - a_1 \leq 1999$, 即 $a_{2000} \leq a_1 + 1999$.

.....7 分

因为 $a_1 = 24, a_{2000} = 2023$,

所以 $a_{2000} = a_1 + 1999$.

.....8 分

所以 $a_{k+1} - a_k = 1 > 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots, 1999$) .

即 η 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

.....9 分

综上, 结论得证.

(III) 令 $b_k = a_{k+1} - a_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n-1$) , 则 $b_k = \pm 1$.

.....10 分

所以 $a_2 = a_1 + b_1$,

$a_3 = a_1 + b_1 + b_2$,

.....

$a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$.

所以 $S_n = na_1 + (n-1)b_1 + (n-2)b_2 + \dots + b_{n-1}$

$= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 - [(n-1)(1-b_1) + (n-2)(1-b_2) + \dots + (1-b_{n-1})]$

$= \frac{n(n+1)}{2} - [(n-1)(1-b_1) + (n-2)(1-b_2) + \dots + (1-b_{n-1})]$ 11 分

因为 $b_k = \pm 1$,

所以 $1-b_k$ 为偶数 ($k = 1, 2, 3, \dots, n-1$) .

所以 $(n-1)(1-b_1) + (n-2)(1-b_2) + \dots + (1-b_{n-1})$ 为偶数.

所以要使 $S_n = 1$, 即 $S_n - 1 = 0$,

必须使 $\frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$ 为偶数.

.....12 分

即 4 整除 $(n-1)(n+2)$,

因为 $n \geq 3$,

所以 $n = 4m+1$ 或 $n = 4m+2$ ($m \in \mathbf{N}^*$) .

当 $n = 4m+1$ ($m \in \mathbf{N}^*$) 时, η 数列 $\{a_n\}$ 的项满足

$a_{4k-3} = 1, a_{4k-2} = 0, a_{4k-1} = -1, a_{4k} = 0, a_{4m+1} = 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots, m$) 时,

有 $a_1 = 1, S_n = 1$;

.....13 分

当 $n = 4m+2$ ($m \in \mathbf{N}^*$) 时, η 数列 $\{a_n\}$ 的项满足

$a_{4k-3}=1, a_{4k-2}=0, a_{4k-1}=-1, a_{4k}=0, a_{4m+2}=0$ ($k=1,2,3,\cdots,m$) 时,

有 $a_1=1, S_n=1$;

.....14 分

当 $n=4m$ 或 $n=4m+3$ ($m \in \mathbf{N}^*$) 时, $(n-1)(n+2)$ 不能被 4 整除, 此时不存在 η 数

列 $\{a_n\}$, 使得 $a_1=1, S_n=1$.

.....15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯