海淀区高三年级第二学期期中练习

数　　学（文科）

2018.4

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题纸交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{0,a\}$，$B=\{x\mid -1<x<2\}$，且 $A\subseteq B$，则 a 可以是

（A）-1　（B）0　（C）1　（D）2

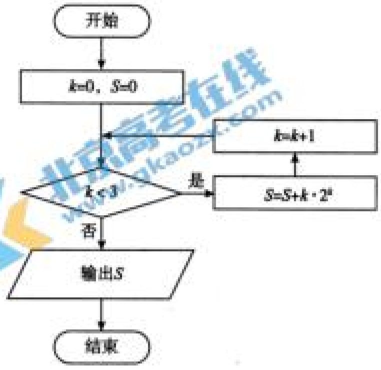
（2）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0)$，则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=$

（A）$(-1,2)$　（B）$(-1,4)$　（C）$(1,2)$　（D）$(1,4)$

（3）下列函数满足 $f(x)+f(-x)=0$ 的是

（A）$f(x)=\sqrt{x}$　（B）$f(x)=\ln|x|$

（C）$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$　（D）$f(x)=x\cos x$



（4）执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为

（A）2　（B）6

（C）8　（D）10

（5）若抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）上任意一点到焦点的距离恒大于 1，则 p 的取值范围是

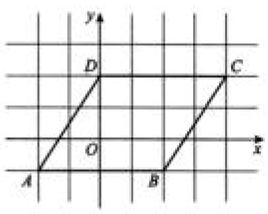
（A）$p<1$　（B）$p>1$

（C）$p<2$　（D）$p>2$

（6）如图，网格纸上小正方形的边长为 1，若四边形 $ABCD$ 及其内部的点组成的集合记为 M，$P(x,y)$ 为 M 中任意一点，则 $y-x$ 的最大值为

（A）1　（B）2

（C）-1　（D）-2



（7）已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则“$S_n<na_n$ 对 $n\geqslant 2$ 恒成立”是“数列 $\{a_n\}$ 为递增数列”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）已知直线 l：$y=k(x+4)$ 与圆 $(x+2)^2+y^2=4$ 相交于 A，B 两点，M 是线段 AB 的中点，则点 M 到直线 $3x-4y-6=0$ 的距离的最大值为

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5

第二部分（非选择题，共110分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）复数 $\dfrac{2i}{1+i}=$________.

（10）已知点 $(2,0)$ 是双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的一个顶点，则 C 的离心率为________.

（11）在△ABC 中，若 $c=2$，$a=\sqrt{3}$，$\angle A=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\sin C=$________，$\cos 2C=$________.

（12）某几何体的三视图如右图所示，则该几何体的体积是________.

（13）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\cos x$，给出下列结论：

① $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上是减函数；

② $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的最小值为 $\dfrac{2}{\pi}$；

③ $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上至少有两个零点.

其中正确结论的序号为________.（写出所有正确结论的序号）

（14）将标号为 1，2，…，20 的 20 张卡片放入下列表格中，一个格放入一张卡片．把每列标号最小的卡片选出，将这些卡片中标号最大的数设为 a；把每行标号最大的卡片选出，将这些卡片中标号最小的数设为 b.

甲同学认为 a 有可能比 b 大，乙同学认为 a 和 b 有可能相等．那么甲乙两位同学中说法正确的同学是________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_5=\frac{1}{8}a_2$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

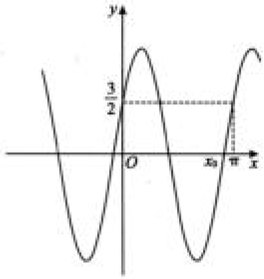
（Ⅱ）试判断是否存在正整数 n，使得 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 为 $\frac{5}{2}$？若存在，求出 n 的值；若不存在，说明理由.

（16）（本小题 13 分）

函数 $f(x)=3\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，其中 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个零点.

（Ⅰ）写出 ω，φ 及 x_0 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},0]$ 上的最大值和最小值.



（17）（本小题 13 分）

流行性感冒多由病毒引起，据调查，空气相对湿度过大或过小时，都有利于一些病毒的繁殖和传播. 科学测定，当空气相对湿度大于 65% 或小于 40% 时，病毒繁殖滋生较快，当空气相对湿度在 45%~55% 时，病毒死亡较快. 现随机抽取了全国部分城市，获得了它们的空气月平均相对湿度共 300 个数据，整理得到数据分组及频数分布表，其中为了记录方便，将空气相对湿度在 $a\%$~$b\%$ 时记为区间 $[a,b)$.

组号	1	2	3	4	5	6	7	8
分组	[15，25)	[25，35)	[35，45)	[45，55)	[55，65)	[65，75)	[75，85)	[85，95)
频数	2	3	15	30	50	75	120	5

（Ⅰ）求上述数据中空气相对湿度使病毒死亡较快的频率；

（Ⅱ）从区间 [15，35) 的数据中任取两个数据，求恰有一个数据位于 [25，35) 的概率；

（Ⅲ）假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替，试估计样本中空气月平均相对湿度的平均数在第几组（只需写出结论）.

(18)（本小题 14 分）

如图，四棱锥 $E-ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD=AB=AE=\frac{1}{2}BC=1$，且 $BC\perp$平面 ABE，M 为棱 CE 的中点．

（Ⅰ）求证：$DM\parallel$平面 ABE；

（Ⅱ）求证：平面 $CDE\perp$平面 CBE；

（Ⅲ）当四面体 $D-ABE$ 的体积最大时，判断直线 AE 与直线 CD 是否垂直，并说明理由．

(19)（本小题 14 分）

已知椭圆 C 的两个焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，离心率为 $\frac{1}{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设点 A 是椭圆 C 的右顶点，过点 F_1 的直线与椭圆 C 交于 P，Q 两点，直线 AP，AQ 与直线 $x=-4$ 分别交于 M，N 两点．求证：点 F_1 在以 MN 为直径的圆上．

(20)（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=e^x\sin x-ax$．

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a\leqslant 0$ 时，判断 $f(x)$ 在 $[0,\frac{3\pi}{4}]$ 上的单调性，并说明理由；

（Ⅲ）当 $a<1$ 时，求证：$\forall x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$，都有 $f(x)\geqslant 0$．

海淀区高三年级第二学期期中练习

数学(文)参考答案与评分标准

2018.4

一．选择题:本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	D	D	D	B	C	C

二．填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．$1+\mathrm{i}$　　10．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　11．$\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{3}$

12．$\dfrac{3\pi}{2}+3$　　13．①③　　14．乙

三．解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15．解:（Ⅰ）设$\{a_n\}$的公比为q，

因为 $a_5=\dfrac{1}{8}a_2$，且$a_5=a_2q^3$，

所以 $q^3=\dfrac{1}{8}$ ，

得 $q=\dfrac{1}{2}$

所以$a_n=a_1q^{n-1}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ $(n=1,2,\cdots)$ ………………6 分

（Ⅱ）不存在n，使得$\{a_n\}$的前n项和S_n为$\dfrac{5}{2}$

因为$a_1=1$，$q=\dfrac{1}{2}$，

所以$S_n=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}=2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$ ………………10 分

方法 1：

令$S_n=\dfrac{5}{2}$ ，则$2(1-\dfrac{1}{2^n})=\dfrac{5}{2}$

得$2^n=-4$，该方程无解.

所以不存在 n，使得 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 为 $\frac{5}{2}$.　　　　　　　　　………………13 分

方法 2：

因为对任意 $n\in N^*$，有 $1-\frac{1}{2^n}<1$，

所以 $S_n=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<2$

所以不存在 n，使得 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 为 $\frac{5}{2}$。　　　　　　　………………13 分

16．解：（Ⅰ）$\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6},x_0=\frac{11\pi}{12}$.　　　　　　　　　　………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，$f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

因为 $x\in[-\frac{\pi}{2},0]$，

所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$

当 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，即 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 的最小值为 -3.

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $x=0$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$.　　　　　………………13 分

17．解：（Ⅰ）由已知，当空气相对湿度在 $45\%\sim55\%$ 时，病毒死亡较快.

而样本在 $[45,55)$ 上的频数为 30，

所以所求频率为 $\frac{30}{300}=\frac{1}{10}$　　　　　　　　　　　　　………………3 分

（Ⅱ）设事件 A 为“从区间 $[15,35)$ 的数据中任取两个数据，恰有一个数据位于 $[25,35)$”

设区间 $[15,25)$ 中的两个数据为 a_1,a_2，区间 $[25,35)$ 中的三个数据为 b_1,b_2,b_3，

因此，从区间 $[15,35)$ 的数据中任取两个数据，

包含 $(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)$

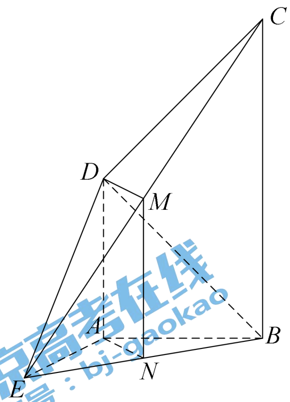
共 10 个基本事件，

而事件 A 包含 $(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)$ 共 6 个基本事件，

所以 $P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.　　　　　　　　　　　　　……………………….10 分

（Ⅲ）第 6 组.　　　　　　　　　　　　　　　　　………………………13 分

18.（Ⅰ）证明：取线段 EB 的中点 N，连接 MN, AN.



因为 M 为棱 CE 的中点，

所以在 ΔCBE 中 $MN // BC$，$MN=\frac{1}{2}BC$.

又 $AD // BC$，$AD=\frac{1}{2}BC$，

所以 $MN // AD, MN=AD$.

所以四边形 $DMNA$ 是平行四边形，

所以 $DM // AN$.

又 $DM \not\subset$ 平面 ABE，$AN \subset$ 平面 ABE，

所以 $DM //$ 平面 ABE.

（Ⅱ）因为 $AE=AB$，N 为 EB 中点，

所以 $AN \perp BE$.

又 $BC \perp$ 平面 ABE，$AN \subset$ 平面 ABE，

所以 $BC \perp AN$

又 $BC \cap BE=B$，

所以 $AN \perp$ 平面 BCE.

又 $DM // AN$，

所以 $DM \perp$ 平面 BCE.

因为 $DM \subset$ 平面 CDE，

所以平面 $CDE \perp$ 平面 CBE.　　…………………………9 分

（Ⅲ）$AE \perp CD$.

设 $\angle EAB=\theta$，$\because AD=AB=AE=1$

则四面体 $D-ABE$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AE\cdot AB\cdot\sin\theta\cdot AD=\frac{1}{6}\sin\theta$.

当 $\theta=90^\circ$，即 $AE \perp AB$ 时体积最大.

又 $BC \perp$ 平面 ABE，$AE \subset$ 平面 ABE，

所以 $AE \perp BC$.

因为 $BC \cap AB=B$，

所以 $AE\perp$ 平面 ABC.

因为 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AE\perp CD$.　　　　　　　　　　　…………………………14 分

19．解：（Ⅰ）由题意，设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ ，

则 $\begin{cases} c=1 \\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$

得 $a=2,b=\sqrt{3}$.

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.　　　…………………………5 分

（Ⅱ）证明：由（Ⅰ）可得 $A(2,0)$.

当直线 PQ 不存在斜率时，可得 $P(-1,\frac{3}{2}),Q(-1,-\frac{3}{2})$

直线 AP 方程为 $y=-\frac{1}{2}\left(x-2\right)$，令 $x=-4$, 得 $M(-4,3)$,

同理，得 $N(-4,-3)$.

所以 $\overrightarrow{F_1M}=\left(-3,3\right),\overrightarrow{F_1N}=\left(-3,-3\right)$,

得 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=0$.

所以 $\angle MF_1N=90^\circ$, F_1 在以 MN 为直径的圆上.

当直线 PQ 存在斜率时，设 PQ 方程为 $y=k\left(x+1\right)$ ， $P\left(x_1,y_1\right)$、$Q\left(x_2,y_2\right)$.

由 $\begin{cases} y=k\left(x+1\right) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 可得 $\left(3+4k^2\right)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$.

显然 $\Delta>0$, $x_1+x_2=-\frac{8k^2}{3+4k^2},x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$,

直线 AP 方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，得 $M(-4,\frac{-6y_1}{x_1-2})$ ，

同理， $N(-4,\dfrac{-6y_2}{x_2-2})$.

所以 $\overrightarrow{F_1M}=(-3,\dfrac{-6y_1}{x_1-2}),\overrightarrow{F_1N}=(-3,\dfrac{-6y_2}{x_2-2})$.

$$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=9+\frac{36y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

因为 $y_1=k\left(x_1+1\right),y_2=k\left(x_2+1\right)$

所以
$$\begin{aligned}\frac{36y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}&=\frac{36k^2(x_1+1)(x_2+1)}{(x_1-2)(x_2-2)}\\&=\frac{36k^2\left(x_1x_2+x_1+x_2+1\right)}{\left(x_1x_2-2(x_1+x_2)+4\right)}\\&=\frac{36k^2(\dfrac{4k^2-12-8k^2+3+4k^2}{3+4k^2})}{\dfrac{4k^2-12+16k^2+12+16k^2}{3+4k^2}}\\&=\frac{-9\cdot 36k^2}{36k^2}\\&=-9\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=0$

所以 $\angle MFN=90^\circ$, F 在以 MN 为直径的圆上. ……………………14 分

综上， F 在以 MN 为直径的圆上.

20．解：（Ⅰ）当 $a=0$ 时， $f(x)=e^x\sin x$,

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$，$x\in\mathbf{R}$.

得 $f'(0)=1$.

又 $f(0)=e^0\sin 0=0$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$. ………………………….4 分

（II）方法 1：

因为 $f(x)=e^x\sin x-ax$，

所以 $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-a$.

$$=\sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})-a$$

因为 $x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$，

所以 $x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\pi]$.

所以 $\sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})\ge 0$.

所以 当 $a\le 0$ 时， $f'(x)\ge 0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{4}]$ 单调递增. ....8 分

方法 2：

因为 $f(x)=e^x\sin x-ax$，

所以 $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-a$.

令 $g(x)=f'(x)$，

则 $g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$ ，

$g(x),g'(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	0	$(0,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$	$\frac{3\pi}{4}$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$1-a$	↗	极大值	↘	$-a$

当 $a\le 0$ 时， $g(0)=1-a>0, g(\frac{3}{4}\pi)=-a\ge 0$.

所以 $x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$ 时， $g(x)\ge 0$，即 $f'(x)\ge 0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{4}]$ 单调递增. ……………………………8分

（III）方法 1：

由（II）可知，当 $a\le 0$ 时， $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{4}]$ 单调递增，

所以 $x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$ 时， $f(x)\ge f(0)=0$.

当 $0<a<1$ 时，设 $g(x)=f'(x)$，

则 $g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$ ，

$g(x), g'(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	0	$(0,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$	$\frac{3\pi}{4}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$1-a$	↗	极大值	↘	$-a$

所以 $f'(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，在 $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$ 上单调递减

因为 $f'(0)=1-a>0$，$f'(\frac{3\pi}{4})=-a<0$，

所以存在唯一的实数 $x_0\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$，使得 $f'(x_0)=0$，

且当 $x\in(0,x_0)$ 时， $f'(x)>0$，当 $x\in(x_0,\frac{3\pi}{4}]$ 时， $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上单调递增， $f(x)$ 在 $[x_0,\frac{3\pi}{4}]$ 上单调递减.

又 $f(0)=0$，$f(\frac{3\pi}{4})=e^{\frac{3\pi}{4}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}a>e^{\frac{3\pi}{4}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-3>\frac{e^2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}>0$，

所以当 $0<a<1$ 时，对于任意的 $x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$，$f(x)\ge 0$.

综上所述，当 $a<1$ 时，对任意的 $x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$，均有 $f(x)\ge 0$. ……………………………13 分

方法 2：由（Ⅱ）可知，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{4}]$ 单调递增，

所以 $x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$ 时，$f(x)\ge f(0)=0$.

当 $0<a<1$ 时， 由（Ⅱ）可知，$f'(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，在 $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$ 上单调递减，

因为 $f'(0)=1-a>0$，$f'(\frac{3\pi}{4})=-a<0$，

所以存在唯一的实数 $x_0\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$，使得 $f'(x_0)=0$，

且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_0,\frac{3\pi}{4}]$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上单调递增，$f(x)$ 在 $[x_0,\frac{3\pi}{4}]$ 上单调递减.

又 $f(0)=0$，$f(\frac{3\pi}{4})=e^{\frac{3\pi}{4}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}a>e^{\frac{3\pi}{4}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-3>\frac{e^2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}>0$，

所以当 $0<a<1$ 时，对于任意的 $x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$，$f(x)\ge 0$.

综上所述，当 $a<1$ 时，对任意的 $x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$，均有 $f(x)\ge 0$. ……………………….13 分