

海淀区高三年级第一学期期中练习

数 学

2019.11

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | x+1 \leq 0\}$ ， $B = \{x | x \geq a\}$ 。若 $A \cup B = \mathbf{R}$ ，则实数 a 的值可以为

(A) 2

(B) 1

(C) 0

(D) -2

(2) 下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 上不是单调函数的是

(A) $y = x$

(B) $y = x^2$

(C) $y = x + \sqrt{x}$

(D) $y = |x-1|$

(3) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 。若 $S_3 = a_3$ ，且 $a_3 \neq 0$ ，则 $\frac{S_4}{S_3} =$

(A) 1

(B) $\frac{5}{3}$

(C) $\frac{8}{3}$

(D) 3

(4) 不等式 $\frac{1}{x} > 1$ 成立的一个充分不必要条件是

(A) $0 < x < \frac{1}{2}$

(B) $x > 1$

(C) $0 < x < 1$

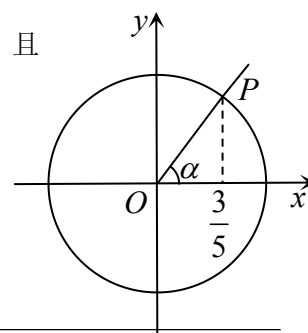
(D) $x < 0$

(5) 如图，角 α 以 Ox 为始边，它的终边与单位圆 O 相交于点 P ，且

点 P 的横坐标为 $\frac{3}{5}$ ，则 $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ 的值为

(A) $-\frac{3}{5}$

(B) $\frac{3}{5}$



(C) $-\frac{4}{5}$

(D) $\frac{4}{5}$

(6) 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$). 若 $\lambda + \mu = \frac{3}{2}$,

则 $\frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|} =$

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 1

(D) 2

(7) 已知函数 $f(x) = x^3 + x^2 - 2|x| - k$. 若存在实数 x_0 , 使得 $f(-x_0) = -f(x_0)$ 成立,

则实数 k 的取值范围是

(A) $[-1, +\infty)$

(B) $(-\infty, -1]$

(C) $[0, +\infty)$

(D) $(-\infty, 0]$

(8) 设集合 A 是集合 $\mathbf{N}^*$ 的子集, 对于 $i \in \mathbf{N}^*$, 定义 $\varphi_i(A) = \begin{cases} 1, & i \in A, \\ 0, & i \notin A. \end{cases}$ 给出下列三个结

论:

① 存在 $\mathbf{N}^*$ 的两个不同子集 A, B , 使得任意 $i \in \mathbf{N}^*$ 都满足 $\varphi_i(A \cap B) = 0$ 且

$\varphi_i(A \cup B) = 1$;

② 任取 $\mathbf{N}^*$ 的两个不同子集 A, B , 对任意 $i \in \mathbf{N}^*$ 都有 $\varphi_i(A \cap B) = \varphi_i(A) \cdot \varphi_i(B)$;

③ 任取 $\mathbf{N}^*$ 的两个不同子集 A, B , 对任意 $i \in \mathbf{N}^*$ 都有 $\varphi_i(A \cup B) = \varphi_i(A) + \varphi_i(B)$.

其中所有正确结论的序号是

(A) ①②

(B) ②③

(C) ①③

(D) ①②③

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

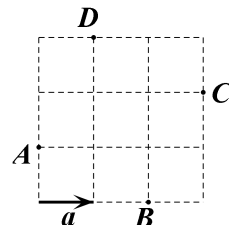
(9) 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (3, t)$, 且 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $t =$ _____.

(10) 函数 $f(x) = x - \sqrt{x} - 6$ 的零点个数为 _____.

(11) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \log_2 n$, 则 $a_1 =$ _____, $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 =$ _____.

(12) 如图, 网格纸上小正方形的边长为1. 从 A, B, C, D 四点中任取

两个点作为向量 $\mathbf{b}$ 的始点和终点, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 的最大值为_____.



(13) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \ln n$. 若存在 $p \in \mathbf{R}$, 使得 $a_n \leq pn$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, 则 p 的取值范围为_____.

(14) 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin \omega x$, $g(x) = \sqrt{2} \cos \omega x$, 其中 $\omega > 0$, A, B, C 是两个函数图象的交点, 且不共线.

①当 $\omega = 1$ 时, $\triangle ABC$ 面积的最小值为_____;

②若存在 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 则 ω 的最小值为_____.

三、解答题共 6 小题, 共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(15) (本小题满分 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为各项均为正数的等比数列, S_n 为其前 n 项和, $a_2 = 3$, $a_3 + a_4 = 36$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $S_n < 121$, 求 n 的最大值.

(16) (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = 2 \sin x \cos(x + \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 若 $f(x) + m \leq 0$ 对 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

(17) (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + x^2 + bx + c$. 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = x + 1$.

(I) 求 b, c 的值;

(II) 若函数 $f(x)$ 存在极大值, 求 a 的取值范围.

(18) (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $a = 7, b = 5, c = 8$.

(I) 求 $\sin A$ 的值;

(II) 若点 P 为射线 AB 上的一个动点 (与点 A 不重合), 设 $\frac{AP}{PC} = k$.

① 求 k 的取值范围;

② 直接写出一个 k 的值, 满足: 存在两个不同位置的点 P , 使得 $\frac{AP}{PC} = k$.

(19) (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$.

(I) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上的单调性, 并说明理由;

(II) 求证: $f(x) < \frac{1}{2}$.

(20) (本小题满分 14 分)

已知集合 $M \subseteq \mathbf{N}^*$, 且 M 中的元素个数 n 大于等于 5. 若集合 M 中存在四个不同的元素 a, b, c, d , 使得 $a + b = c + d$, 则称集合 M 是“关联的”, 并称集合 $\{a, b, c, d\}$ 是集合 M 的“关联子集”; 若集合 M 不存在“关联子集”, 则称集合 M 是“独立的”.

(I) 分别判断集合 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 与 $\{1, 2, 3, 5, 8\}$ 是“关联的”还是“独立的”? 若是“关联的”, 写出其所有的“关联子集”;

(II) 已知集合 $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 是“关联的”, 且任取集合 $\{a_i, a_j\} \subseteq M$, 总存在 M 的“关联子集” A , 使得 $\{a_i, a_j\} \subseteq A$. 若 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$, 求证: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是等差数列;

(III) 若集合 M 是“独立的”, 求证: 存在 $x \in M$, 使得 $x > \frac{n^2 - n + 9}{4}$.

海淀区高三年级第一学期期中练习参考答案

数 学 2019.11

阅卷须知:

1. 评分参考中所注分数, 表示考生正确做到此步应得的累加分数。
2. 其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分。

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	C	A	B	B	A	A

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

题号	9	10	11	12	13	14
答案	6	1	0; 1	3	$\left[\frac{\ln 3}{3}, +\infty\right)$	$2\pi; \frac{\pi}{2}$

说明: 第 11, 14 题第一空 3 分, 第二空 2 分

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分.

15. 解: (I) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 设 $\{a_n\}$ 公比为 q .

因为 $a_2 = 3$, $a_3 + a_4 = 36$,

$$\text{所以 } \begin{cases} a_1 q = 3, \\ a_1 q^2 + a_1 q^3 = 36. \end{cases}$$

所以 $3q + 3q^2 = 36$. 即 $q^2 + q - 12 = 0$.

则 $q = 3$ 或 $q = -4$.

因为 $a_n > 0$,

所以 $q > 0$,

所以 $q = 3$.

因为 $a_2 = a_1 q = 3$,

所以 $a_1 = 1$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1} = 3^{n-1}$.

(II) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,

$$\text{因为 } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} (q \neq 1),$$

$$\text{所以 } S_n = \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

$$\text{因为 } S_n < 121,$$

$$\text{所以 } S_n = \frac{1}{2}(3^n - 1) < 121.$$

$$\text{所以 } 3^n < 243.$$

$$\text{所以 } n < 5.$$

$$\text{因为 } n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{所以 } n \leq 4. \text{ 即 } n \text{ 的最大值为 } 4.$$

$$16. \text{解: (I) 因为 } f(x) = 2 \sin x \cos(x + \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 \sin x (\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 \sin x (\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x$$

$$= \sin(2x + \frac{\pi}{3}).$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的最小正周期为 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

$$(II) “f(x) + m \leq 0 \text{ 对 } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 恒成立}” \text{ 等价于 } “f(x)_{\max} + m \leq 0”.$$

$$\text{因为 } x \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

所以 $2x + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$.

当 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{12}$ 时,

$f(x)$ 的最大值为 $f(\frac{\pi}{12}) = 1$.

所以 $1 + m \leq 0$,

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -1]$.

17. 解: (I) $f'(x) = ax^2 + 2x + b$,

因为 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = x + 1$,

所以 $\begin{cases} f'(0) = 1, \\ f(0) = 1. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b = 1, \\ c = 1. \end{cases}$

(II) $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + x^2 + x + 1$,

① 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x^2 + x + 1$ 不存在极大值, 不符合题意.

② 当 $a > 0$ 时, $f'(x) = ax^2 + 2x + 1$.

令 $ax^2 + 2x + 1 = 0$.

(i) 当 $\Delta = 4 - 4a \leq 0$, 即 $a \geq 1$ 时, 不符合题意.

(ii) 当 $\Delta = 4 - 4a > 0$, 即 $0 < a < 1$ 时, 方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的

实数根.

设方程两个根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.

$x, f'(x), f(x)$ 的变化如表所示:

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		极大值		极小值	

所以 $f(x_1)$ 为极大值.

③当 $a < 0$ 时, $\Delta = 4 - 4a > 0$ 恒成立. 设方程两个根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.

$x, f'(x), f(x)$ 的变化如表所示:

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以 $f(x_2)$ 为极大值.

综上, 若函数 $f(x)$ 存在极大值, a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

18. 解: (I) 在 $\triangle ABC$ 中, $a=7, b=5, c=8$,

$$\text{根据余弦定理 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{所以 } \cos A = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{2}.$$

因为 $A \in (0, \pi)$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

(II) ①在 $\triangle ABC$ 中,

$$\text{根据正弦定理, 得 } \frac{CP}{\sin A} = \frac{AP}{\sin \angle ACP}.$$

$$k = \frac{AP}{PC} = \frac{\sin \angle ACP}{\sin A} = \frac{\sin \angle ACP}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \angle ACP.$$

因为点 P 为射线 AB 上一动点,

$$\text{所以 } \angle ACP \in (0, \frac{2\pi}{3}).$$

$$\text{所以 } k \text{ 的取值范围为 } (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}].$$

②答案不唯一. 取值在区间 $(1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ 上均正确.

19. (I) 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是单调递增函数.

理由如下:

$$\text{由 } f(x) = \frac{\ln x}{e^x}, \text{ 得 } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x}.$$

因为 $x \in (0,1)$,

所以 $\frac{1}{x} > 1, \ln x < 0$.

因此 $\frac{1}{x} - \ln x > 0$.

又因为 $e^x > 0$,

所以 $f'(x) > 0$ 恒成立.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是单调递增函数.

(II) 由题意可得, $x \in (0, +\infty)$.

$$\text{因为 } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x},$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{1}{x} - \ln x, \text{ 则 } g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0.$$

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$$\text{因为 } g(1) = 1 > 0, g(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0,$$

所以存在唯一实数 x_0 , 使得 $g(x_0) = 0$, 其中 $x_0 \in (1, e)$.

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		极大值	

x , $f'(x)$, $f(x)$ 的变化如表所示:

所以 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值.

因为函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有唯一的极大值.

$$\text{所以 } f(x)_{\max} = f(x_0) = \frac{\ln x_0}{e^{x_0}}.$$

$$\text{因为 } \frac{1}{x_0} = \ln x_0,$$

$$\text{所以 } f(x)_{\max} = f(x_0) = \frac{\ln x_0}{e^{x_0}} = \frac{1}{x_0 e^{x_0}}.$$

$$\text{因为 } x_0 \in (1, e),$$

$$\text{所以 } f(x)_{\max} = \frac{1}{x_0 e^{x_0}} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } f(x) < \frac{1}{2}.$$

20.解: (I) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 是“关联的”, 关联子集有 $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{4, 6, 8, 10\}$, $\{2, 4, 8, 10\}$,

$\{1, 2, 3, 5, 8\}$ 是“独立的”.

(II) 记集合 M 的含有四个元素的集合分别为:

$$A_1 = \{a_2, a_3, a_4, a_5\}, \quad A_2 = \{a_1, a_3, a_4, a_5\}, \quad A_3 = \{a_1, a_2, a_4, a_5\},$$

$$A_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_5\},$$

$$A_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}.$$

所以, M 至多有 5 个“关联子集”.

若 $A_2 = \{a_1, a_3, a_4, a_5\}$ 为“关联子集”, 则 $A_1 = \{a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 不是“关联子集”,

否则 $a_1 = a_2$;

同理可得若 $A_2 = \{a_1, a_3, a_4, a_5\}$ 为“关联子集”，则 A_3, A_4 不是“关联子集”。

所以集合 M 没有同时含有元素 a_2, a_5 的“关联子集”，与已知矛盾。

所以 $A_2 = \{a_1, a_3, a_4, a_5\}$ 一定不是“关联子集”。

同理 $A_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_5\}$ 一定不是“关联子集”。

所以集合 M 的“关联子集”至多为 A_1, A_3, A_5 。

若 A_1 不是“关联子集”，则此时集合 M 一定不含有元素 a_3, a_5 的“关联子集”，与已知矛盾；

若 A_3 不是“关联子集”，则此时集合 M 一定不含有元素 a_1, a_5 的“关联子集”，与已知矛盾；

若 A_5 不是“关联子集”，则此时集合 M 一定不含有元素 a_1, a_3 的“关联子集”，与已知矛盾。

所以 A_1, A_3, A_5 都是“关联子集”。

所以有 $a_2 + a_5 = a_3 + a_4$ ，即 $a_5 - a_4 = a_3 - a_2$ ；

$a_1 + a_5 = a_2 + a_4$ ，即 $a_5 - a_4 = a_2 - a_1$ ；

$a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ ，即 $a_4 - a_3 = a_2 - a_1$ ，

所以 $a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$ 。

所以 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是等差数列。

(III) 不妨设集合 $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($n \geq 5$)， $a_i \in \mathbf{N}^*$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，且

$a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。记 $T = \{t \mid t = a_i + a_j, 1 \leq i < j \leq n, i, j \in \mathbf{N}^*\}$ 。

因为集合 M 是“独立的”的，所以容易知道 T 中恰好有 $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ 个元素。

假设结论错误，即不存在 $x \in M$ ，使得 $x > \frac{n^2 - n + 9}{4}$ 。

所以任取 $x \in M$, $x \leq \frac{n^2-n+9}{4}$. 因为 $x \in \mathbf{N}^*$, 所以 $x \leq \frac{n^2-n+8}{4}$.

所以 $a_i + a_j \leq \frac{n^2-n+8}{4} + \frac{n^2-n+8}{4} - 1 = \frac{n^2-n+8}{2} - 1 = \frac{n^2-n}{2} + 3$.

所以任取 $t \in T$, $t \leq \frac{n^2-n}{2} + 3$.

任取 $t \in T$, $t \geq 1+2=3$,

所以 $T \subseteq \{3, 4, \dots, \frac{n^2-n}{2} + 3\}$, 且 T 中含有 $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ 个元素.

(i) 若 $3 \in T$, 则必有 $a_1=1, a_2=2$ 成立.

因为 $n \geq 5$, 所以一定有 $a_n - a_{n-1} > a_2 - a_1$ 成立. 所以 $a_n - a_{n-1} \geq 2$.

所以 $a_n + a_{n-1} \leq \frac{n^2-n+8}{4} + \frac{n^2-n+8}{4} - 2 = \frac{n^2-n}{2} + 2$.

所以 $T = \{t \mid 3 \leq t \leq \frac{n^2-n}{2} + 2, t \in \mathbf{N}^*\}$. 所以

$$a_n = \frac{n^2-n+8}{4}, a_{n-1} = \frac{n^2-n+8}{4} - 2.$$

因为 $4 \in T$, 所以 $a_3=3$, 所以有 $a_n + a_1 = a_{n-1} + a_3$, 矛盾.

(ii) 若 $3 \notin T$, 则 $T \subseteq \{4, 5, \dots, \frac{n^2-n}{2} + 3\}$.

而 T 中含有 $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ 个元素, 所以 $T = \{t \mid 4 \leq t \leq \frac{n^2-n}{2} + 3, t \in \mathbf{N}^*\}$.

所以 $a_n = \frac{n^2-n+8}{4}$, $a_{n-1} = \frac{n^2-n+8}{4} - 1$.

因为 $4 \in T$, 所以 $a_1=1, a_2=3$.

因为 $\frac{n^2-n}{2} + 2 \in T$, 所以 $\frac{n^2-n}{2} + 2 = a_{n-2} + a_n$.

所以 $a_{n-2} = \frac{n^2-n+8}{4} - 2$.

所以 $a_n + a_1 = a_{n-2} + a_3$, 矛盾.

所以命题成立.

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 20 万+。

北京高考在线_2020 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980