昌平区 2022—2023 学年第一学期高三年级期末质量抽测

数学试卷参考答案及评分标准　　2023.1

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）C　（2）A　（3）B　（4）D　（5）B

（6）D　（7）A　（8）C　（9）B　（10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$a_n=2^n$　（12）$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$　8　（13）3　$\dfrac{\pi}{3}$

（14）5　（15）①②④

（第 12 题、第 13 题第一空 3 分，第二空 2 分；第 15 题答对一个给 2 分，答对两个给 3 分，答对三个给 5 分，错答得零分。）

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（I）$f(x)=\sqrt{3}\sin 2\omega x-\cos 2\omega x=2\sin(2\omega x-\dfrac{\pi}{6})$.　……………2 分

选条件①：函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\dfrac{\pi}{3},2)$.　……………3 分

则 $f(\dfrac{\pi}{3})=2\sin(\dfrac{2\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6})=2$.

即 $\dfrac{2\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.　……………5 分

所以 $\omega=3k+1$.　……………6 分

因为 $0<\omega<2$，

所以 $\omega=1$.

所以 $f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$.　……………7 分

条件②：函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $g(x)=2\sin 2x$ 的图象平移得到.　………3 分

因为函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $g(x)=2\sin 2x$ 的图象平移得到，

所以函数 $f(x)$ 的周期与函数 $g(x)$ 的周期相同.

因为函数 $g(x)$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，

所以函数 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$.　……………5 分

则 $\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，即 $\omega=1$.　……………6 分

所以 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$. ……………7 分

选条件③：函数 $f(x)$ 的图象相邻的两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$. ………3 分

因为函数 $f(x)$ 的图象相邻的两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，

所以函数 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$. ……………5 分

则 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，即 $\omega=1$. ……………6 分

所以 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$. ……………7 分

（II） 因为关于 x 的不等式 $f(x)\le m$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的最大值不大于 m 即可.

因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，

所以 $-\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$.

所以 $-\frac{1}{2}\le\sin(2x-\frac{\pi}{6})\le 1$. ……………10 分

所以 $-1\le 2\sin(2x-\frac{\pi}{6})\le 2$，即 $-1\le f(x)\le 2$.

当且仅当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 2. …………12 分

所以 $m\ge 2$. ……………13 分

所以实数 m 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

（17）（共 13 分）

解：（I）设事件 A 为“这两个品牌的不粘性性能都是 I 级”.

所以 $P(A)=\frac{C_5^2}{C_{12}^2}=\frac{5}{33}$. …………4 分

（II）由表可知，前六个品牌的样本数据中，性能都是 I 级的品牌有 3 个，不都是 I 级的品牌有 3 个.

随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2. ……………5 分

$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$；

$P(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{5}$；

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$. ……………8 分

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

……………9 分

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{5}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{1}{5}=1$. ……………11 分

（因为 $X \sim H(6,2,3)$，所以 $E(X)=\dfrac{2}{6}\times 3=1$.）

（III）$E(X)>E(Y)$. ……………13 分

(18)（共 14 分）

解：（I）法一：

因为侧面 ABB_1A_1 为矩形，

所以 $AA_1\perp AB$. …………1 分

因为 $CA\perp$ 平面 ABB_1A_1，$CA\subset$ 平面 ABC，

所以平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1. …………2 分

因为平面 $ABC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AB$，$AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC. …………3 分

因为 $CC_1\perp$ 平面 ABC，

所以 $CC_1 // AA_1$. …………4 分

因为 $CC_1\not\subset$ 平面 ABB_1A_1，$AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $CC_1 //$ 平面 ABB_1A_1. …………5 分

法二：

因为 $CA\perp$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $AA_1\perp AC$. …………1 分

因为侧面 ABB_1A_1 为矩形，

所以 $AA_1 \perp AB$. …………2 分

因为 $AC \cap AB = A$,

所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC. …………3 分

因为 $CC_1 \perp$ 平面 ABC,

所以 $CC_1 // AA_1$. …………4 分

因为 $CC_1 \not\subset$ 平面 ABB_1A_1, $AA_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1,

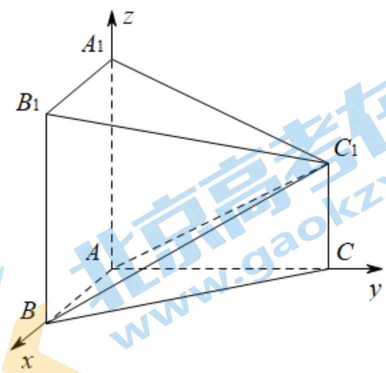
所以 $CC_1 //$ 平面 ABB_1A_1. …………5 分

（II） 因为 $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AC$, $AB \perp AC$,

所以以 A 为原点建立空间直角坐标系 $A-xyz$ 如图所示. …………6 分

则 $A(0,0,0)$, $B(3,0,0)$, $C(0,4,0)$, $A_1(0,0,4)$, $B_1(3,0,4)$, $C_1(0,4,2)$.

所以 $\overrightarrow{AB}=(3,0,0)$, $\overrightarrow{AC_1}=(0,4,2)$. …………7 分



设平面 ABC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$, 则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ 4y+2z=0.\end{cases}$

令 $y=1$, 则 $z=-2$.

所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,-2)$. …………8 分

设直线 A_1C_1 与平面 ABC_1 所成角为 θ.

因为 $\overrightarrow{A_1C_1}=(0,4,-2)$,

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1C_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{A_1C_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{A_1C_1}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{5}$. …………10 分

所以直线 A_1C_1 与平面 ABC_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{4}{5}$.

（III）因为侧面 ABB_1A_1 为矩形,

所以 $A_1B_1 // AB$.

因为 $A_1B_1 \not\subset$ 平面 ABC_1, $AB \subset$ 平面 ABC_1,

所以 A_1B_1 // 平面 ABC_1.　…………11 分

所以点 A_1 到平面 ABC_1 的距离就是直线 A_1B_1 到平面 ABC_1 的距离.　……12 分

因为 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,4)$，　…………13 分

所以点 A_1 到平面 ABC_1 的距离 $=\dfrac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

即直线 A_1B_1 到平面 ABC_1 的距离为 $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.　…………14 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题意，$a=2$.　…………1 分

因为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $c=\sqrt{2}$.　…………2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=2$.　…………3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，短轴长为 $2\sqrt{2}$.　…………5 分

（Ⅱ）当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=0$，显然符合题意.　…………6 分

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+3$.　…………7 分

由 $\begin{cases} y=kx+3, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+12kx+14=0$.　…………8 分

由 $\Delta=(12k)^2-4\times(1+2k^2)\times14=32k^2-56>0$，得 $k^2>\dfrac{7}{4}$.　…………9 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-12k}{2k^2+1}$, $x_1x_2=\dfrac{14}{2k^2+1}$.　…………10 分

设 AB 中点 $G(x_0,y_0)$，

则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-6k}{2k^2+1}$，$y_0=kx_0+3=\dfrac{3}{2k^2+1}$.

故 $G(\dfrac{-6k}{2k^2+1},\dfrac{3}{2k^2+1})$.　…………11 分

假设存在 k，使得 $\triangle PAB$ 是以 P 为顶点的等腰三角形，

则 $PG\perp AB$，故 $k_{PG}\cdot k_{AB}=-1$，　…………12 分

所以 $\dfrac{\dfrac{3}{2k^2+1}}{\dfrac{-6k}{2k^2+1}-1}\times k=-1$.

化简 $2k^2+3k+1=0$，解得 $k=-1$ 或 $k=-\dfrac{1}{2}$. …………13 分

因为 $k^2>\dfrac{7}{4}$，

所以不存在 k，使得 $\triangle PAB$ 是以 P 为顶点的等腰三角形. …………14 分

综上可知，存在直线 $l:x=0$，使得 $\triangle PAB$ 是以 P 为顶点的等腰三角形. ……15 分

(20)（共 15 分）

解：(I) 因为当 $m=0$ 时，$f(x)=e^x-x$， …………1 分

所以 $f'(x)=e^x-1$. …………2 分

所以 $f'(0)=0$，$f(0)=1$. …………4 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$. …………5 分

(II) 因为 $f(x)=e^x+me^{-x}+(m-1)x$,

所以 $f'(x)=e^x-me^{-x}+m-1=\dfrac{e^{2x}+(m-1)e^x-m}{e^x}=\dfrac{(e^x-1)(e^x+m)}{e^x}$， …6 分

（1）当 $m=0$ 时，$f'(x)=e^x-1$.

令 $f'(x)=0$，则 $x=0$.

当 $f'(x)>0$ 时，$x>0$；

当 $f'(x)<0$ 时，$x<0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. ……………7 分

（2）当 $m<0$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x_1=0,x_2=\ln(-m)$.

①当 $\ln(-m)<0$，即 $-1<m<0$ 时，

当 $f'(x)>0$ 时，$x<\ln(-m)$ 或 $x>0$；

当 $f'(x)<0$ 时，$\ln(-m)<x<0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-m))$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\ln(-m),0)$ 上单调递减.

……………8 分

②当 $\ln(-m)=0$，即 $m=-1$ 时，

当 $f'(x)>0$ 时，$x\in(-\infty,+\infty)$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增. ……………9 分

③当 $\ln(-m)>0$，即 $m<-1$ 时，

当 $f'(x)>0$ 时，$x<0$ 或 $x>\ln(-m)$；

当 $f'(x)<0$ 时，$0<x<\ln(-m)$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(\ln(-m),+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,\ln(-m))$ 上单调递减.

…………10 分

综上可知：

当 $m=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；

当 $-1<m<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-m))$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\ln(-m),0)$ 上单调递减；

当 $m=-1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

当 $m<-1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(\ln(-m),+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,\ln(-m))$ 上单调递减.

（III）由（II）可知，当 $-e\le m<-1$ 时，对任意的 $x\in(0,+\infty)$，

$f(x)$ 在 $(0,\ln(-m))$ 上单调递减，在 $(\ln(-m),+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极小值为 $f(\ln(-m))=(m-1)\ln(-m)-m-1$.……11 分

设 $g(m)=(m-1)\ln(-m)-m-1$. ……12 分

当 $-e\le m<-1$ 时，

因为 $g'(m)=\ln(-m)-\dfrac{1}{m}>0$， ……13 分

所以 $g(m)$ 在 $[-e,-1)$ 上单调递增.

所以 $g(m)\ge g(-e)=-2$.

所以对任意的 $x\in(0,+\infty)$， $f(x)\geq -2$ 恒成立. ……15 分

(21)（共 15 分）

解：（Ⅰ）2，4，8，16. …………4 分

（Ⅱ）因为集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，所以不妨设 a_k 是 3 的倍数.

由 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leq 12,\\ 2a_n-24, & a_n>12\end{cases}$ 易证明对任意 $n\geq k$， a_n 是 3 的倍数.

如果 $k=1$，则 M 的所有元素都是 3 的倍数. …………6 分

如果 $k>1$，因为 $a_k=2a_{k-1}$ 或 $a_k=2a_{k-1}-24$，

所以 $2a_{k-1}$ 是 3 的倍数，于是 a_{k-1} 是 3 的倍数. …………8 分

类似可得 $a_{k-2},\ldots,a_1$ 都是 3 的倍数，从而对任意 $n\geq 1$， a_n 是 3 的倍数.

因此 M 的所有元素都是 3 的倍数.

综上，若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，则 M 的所有元素都是 3 的倍数.

…………10 分

（Ⅲ）由 $a_1\leq 24$， $a_n=\begin{cases}2a_{n-1}, & a_{n-1}\leq 12,\\ 2a_{n-1}-24, & a_{n-1}>12\end{cases}$ 易证明 $a_n\leq 24(n=2,3,\ldots)$.

因为 a_1 是正整数， $a_2=\begin{cases}2a_1, & a_1\leq 12,\\ 2a_1-24, & a_1>12,\end{cases}$

所以 a_2 是 2 的倍数.

从而当 $n\geq 3$ 时， a_n 是 4 的倍数. …………12 分

（1）如果 a_1 是 3 的倍数，由（Ⅱ）知对所有正整数 n， a_n 是 3 的倍数.

因此当 $n\geq 3$ 时， $a_n\in\{12,24\}$，这时 M 的元素个数不超过 4. …………13 分

（2）如果 a_1 不是 3 的倍数，由（Ⅱ）知对所有正整数 n， a_n 不是 3 的倍数.

因此当 $n\geq 3$ 时， $a_n\in\{4,8,16,20\}$，易知在数列 $\{a_n\}$ 中不能同时出现 4，20，

所以 M 的元素个数不超过 5. …………14 分

当 $a_1=1$ 时， $M=\{1,2,4,8,16\}$ 有 5 个元素.

综上可知，集合 M 的元素个数的最大值为 5.　　　　　　　　　　　…………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。