# 北京市东城区 2021—2022 学年度第二学期高三综合练习(一)

# 数　学

2022.4

本试卷共 6 页,150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

## 第一部分(选择题　共 40 分)

**一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。**

(1)已知集合 $A=\{x|x\geqslant -1\}$,$B=\{x||x-1|<2\}$,则 $A\cup B=$

(A)$\{x|-1<x<3\}$　　(B)$\{x|x>-1\}$

(C)$\{x|-1\leqslant x<3\}$　　(D)$\{x|x\geqslant -1\}$

(2)下列函数中,定义域与值域均为 **R** 的是

(A)$y=\ln x$　　(B)$y=e^x$

(C)$y=x^3$　　(D)$y=\frac{1}{x}$

(3)已知复数 $z$ 满足 $iz=2+i$,则 $z$ 的虚部为

(A)2　　(B)$-2$　　(C)1　　(D)$-1$

(4)已知数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和 $S_n=n^2$,则$\{a_n\}$是

(A)公差为 2 的等差数列　　(B)公差为 3 的等差数列

(C)公比为 2 的等比数列　　(D)公比为 3 的等比数列

(5)已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,则 $\sin(\pi-2\alpha)\cdot\tan\alpha=$

(A)$\frac{32}{25}$　　(B)$-\frac{32}{25}$　　(C)$\frac{18}{25}$　　(D)$-\frac{18}{25}$

(6)已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，$E$ 为 $BC$ 上一点，则三棱锥 $B_1-AC_1E$ 的体积为

(A)$\frac{1}{2}$　　(B)$\frac{1}{3}$　　(C)$\frac{1}{4}$　　(D)$\frac{1}{6}$

(7)在中国农历中，一年有 24 个节气，“立春”居首. 北京 2022 年冬奥会开幕正逢立春，开幕式上“二十四节气”的倒计时让全世界领略了中华智慧. 墩墩同学要从 24 个节气中随机选取 3 个介绍给外国的朋友，则这 3 个节气中含有“立春”的概率为

(A)$\frac{3}{22}$　　(B)$\frac{1}{8}$　　(C)$\frac{2}{23}$　　(D)$\frac{1}{12}$

(8)已知 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$a^2+b^2\leqslant 2$”是“$-1\leqslant ab\leqslant 1$”的

(A)充分而不必要条件　　(B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既不充分也不必要条件

(9)在平面直角坐标系中，直线 $y=kx+m(k\neq 0)$ 与 $x$ 轴和 $y$ 轴分别交于 $A$，$B$ 两点，$|AB|=2\sqrt{2}$，若 $CA\perp CB$，则当 $k$，$m$ 变化时，点 $C$ 到点 $(1,1)$ 的距离的最大值为

(A)$4\sqrt{2}$　　(B)$3\sqrt{2}$　　(C)$2\sqrt{2}$　　(D)$\sqrt{2}$

(10)李明开发的小程序在发布时已有 500 名初始用户，经过 $t$ 天后，用户人数 $A(t)=A(0)e^{kt}$，其中 $k$ 为常数. 已知小程序发布经过 10 天后有 2 000 名用户，则用户超过 50 000 名至少经过的天数为

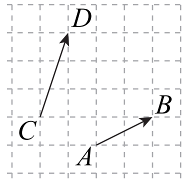
(本题取 $\lg 2=0.30$)

(A)31　　(B)32　　(C)33　　(D)34

## 第二部分(非选择题　共 110 分)

**二、填空题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分。**

(11)在$(2-\sqrt{x})^6$的展开式中,常数项为________.(用数字作答)




(12)已知向量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$在正方形网格中的位置如图所示. 若网格上小正方形的边长为 1,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=$________.

(13)已知抛物线 $C:y^2=2px$ 过点 $P(2,4)$,则 $p=$________;若点 $Q(4,y_1)$,$R(t,y_2)$在 $C$ 上,$F$ 为 $C$ 的焦点,且$|PF|$,$|QF|$,$|RF|$成等比数列,则 $t=$________.

(14)已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x-kx, & x\geqslant 0,\\ kx^2-x+1, & x<0. \end{cases}$ 若 $k=0$,则不等式 $f(x)<2$ 的解集为________;若 $f(x)$恰有两个零点,则 $k$ 的取值范围为________.

(15)某学校开展“测量故宫角楼高度”的综合实践活动.

如图 1所示,线段 $AB$ 表示角楼的高,$C$,$D$,$E$ 为三个可供选择的测量点,点 $B$,$C$ 在同一水平面内,$CD$ 与水平面垂直. 现设计能计算出角楼高度的测量方案,从以下六组几何量中选择三组进行测量,则可以选择的几何量的编号为__________.(只需写出一种方案)

①$C$,$D$ 两点间的距离;

②$C$,$E$ 两点间的距离;

③由点 $C$ 观察点 $A$ 的仰角 $\alpha$;

④由点 $D$ 观察点 $A$ 的仰角 $\beta$;

⑤$\angle ACE$ 和$\angle AEC$;

⑥$\angle ADE$ 和$\angle AED$.

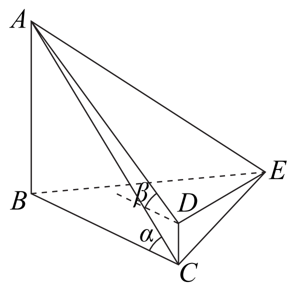



图 1

**三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。**

(16)(本小题 13 分)

已知函数 $f(x)=a\sin\omega x\cos\omega x(a>0,\omega>0)$. 从下列四个条件中选择两个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在且唯一确定.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的解析式;

(Ⅱ)设 $g(x)=f(x)-2\cos^2\omega x+1$，求函数 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调递增区间.

条件①：$f(\frac{\pi}{4})=1$;

条件②：$f(x)$ 为偶函数;

条件③：$f(x)$ 的最大值为 1;

条件④：$f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

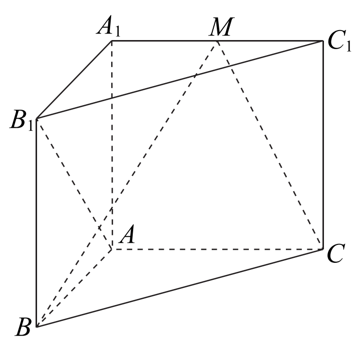
注：如果选择的条件不符合要求，第(Ⅰ)问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

(17)(本小题 14 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 $ABC$，$AB\perp AC$，$AB=AC=AA_1=1$，$M$ 为线段 $A_1C_1$ 上一点.

(Ⅰ)求证：$BM\perp AB_1$;

(Ⅱ)若直线 $AB_1$ 与平面 $BCM$ 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，求点 $A_1$ 到平面 $BCM$ 的距离.



(18)(本小题 13 分)

根据 Z 市 2020 年人口普查的数据,在该市 15 岁及以上常住人口中,各种受教育程度人口所占比例(精确到 0.01)如下表所示:

| 受教育程度 / 性别 | 未上学 | 小学 | 初中 | 高中 | 大学专科 | 大学本科 | 硕士研究生 | 博士研究生 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 男 | 0.00 | 0.03 | 0.14 | 0.11 | 0.07 | 0.11 | 0.03 | 0.01 |
| 女 | 0.01 | 0.04 | 0.11 | 0.11 | 0.08 | 0.12 | 0.03 | 0.00 |
| 合计 | 0.01 | 0.07 | 0.25 | 0.22 | 0.15 | 0.23 | 0.06 | 0.01 |

(Ⅰ)已知 Z 市 15 岁及以上常住人口在全市常住人口中所占比例约为 85%,从全市常住人口中随机选取 1 人,试估计该市民年龄为 15 岁及以上且受教育程度为硕士研究生的概率;

(Ⅱ)从 Z 市 15 岁及以上常住人口中随机选取 2 人,记这 2 人中受教育程度为大学本科及以上的人数为 $X$,求 $X$ 的分布列和数学期望;

(Ⅲ)若受教育程度为未上学、小学、初中、高中、大学专科及以上的受教育年限分别记为 0 年、6 年、9 年、12 年、16 年,设 Z 市 15 岁及以上男性与女性常住人口的平均受教育年限分别为 $a$ 年和 $b$ 年,依据表中的数据直接写出 $a$ 与 $b$ 的大小关系.(结论不要求证明)

(19)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x^2-1}$.

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线斜率为 $-1$,求 $a$ 的值;

(Ⅱ)若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有最大值,求 $a$ 的取值范围.

(20)(本小题 15 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,焦距为 $2\sqrt{3}$.

(Ⅰ)求椭圆 $C$ 的方程;

(Ⅱ)过点 $P(4,0)$ 作斜率为 $k$ 的直线 $l$ 与椭圆 $C$ 交于 $A,B$ 两点.是否存在常数 $t$,使得直线 $x=t$ 与直线 $l$ 的交点 $Q$ 在 $A,B$ 之间,且总有 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|QA|}{|QB|}$? 若存在,求出 $t$ 的值;若不存在,说明理由.

(21)(本小题 15 分)

设数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$.如果 $a_i\in\{1,2,\cdots,n\}(i=1,2,\cdots,n)$,且当 $i\neq j$ 时,$a_i\neq a_j(1\leqslant i,j\leqslant n)$,则称数列 $A$ 具有性质 $P$.对于具有性质 $P$ 的数列 $A$,定义数列 $T(A):t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$,其中 $t_k=\begin{cases}1, & a_k<a_{k+1},\\ 0, & a_k>a_{k+1}\end{cases}(k=1,2,\cdots,n-1)$.

(Ⅰ)对 $T(A)$:0,1,1,写出所有具有性质 $P$ 的数列 $A$;

(Ⅱ)对数列 $E:e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}(n\geqslant 2)$,其中 $e_i\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots,n-1)$,证明:存在具有性质 $P$ 的数列 $A$,使得 $T(A)$ 与 $E$ 为同一个数列;

(Ⅲ)对具有性质 $P$ 的数列 $A$,若 $|a_1-a_n|=1(n\geqslant 5)$ 且数列 $T(A)$ 满足

$t_i=\begin{cases}0, & i\text{ 为奇数},\\ 1, & i\text{ 为偶数}\end{cases}(i=1,2,\cdots,n-1)$,证明:这样的数列 $A$ 有偶数个.

**(考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效)**