

数 学

2022.4

本试卷共 6 页,150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合  $A = \{x | x \geq -1\}$ ,  $B = \{x | |x - 1| < 2\}$ , 则  $A \cup B =$

- (A)  $\{x | -1 < x < 3\}$       (B)  $\{x | x > -1\}$   
(C)  $\{x | -1 \leq x < 3\}$       (D)  $\{x | x \geq -1\}$

(2) 下列函数中,定义域与值域均为  $\mathbf{R}$  的是

- (A)  $y = \ln x$       (B)  $y = e^x$   
(C)  $y = x^3$       (D)  $y = \frac{1}{x}$

(3) 已知复数  $z$  满足  $iz = 2 + i$ , 则  $z$  的虚部为

- (A) 2      (B) -2      (C) 1      (D) -1

(4) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = n^2$ , 则  $\{a_n\}$  是

- (A) 公差为 2 的等差数列      (B) 公差为 3 的等差数列  
(C) 公比为 2 的等比数列      (D) 公比为 3 的等比数列

(5) 已知  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , 则  $\sin(\pi - 2\alpha) \cdot \tan \alpha =$

- (A)  $\frac{32}{25}$       (B)  $-\frac{32}{25}$       (C)  $\frac{18}{25}$       (D)  $-\frac{18}{25}$

(6) 已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1,  $E$  为  $BC$  上一点, 则三棱锥  $B_1-AC_1E$  的体积为

(A)  $\frac{1}{2}$

(B)  $\frac{1}{3}$

(C)  $\frac{1}{4}$

(D)  $\frac{1}{6}$

(7) 在中国农历中, 一年有 24 个节气, “立春”居首. 北京 2022 年冬奥会开幕正逢立春, 开幕式上“二十四节气”的倒计时让全世界领略了中华智慧. 墩墩同学要从 24 个节气中随机选取 3 个介绍给外国的朋友, 则这 3 个节气中含有“立春”的概率为

(A)  $\frac{3}{22}$

(B)  $\frac{1}{8}$

(C)  $\frac{2}{23}$

(D)  $\frac{1}{12}$

(8) 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $a^2 + b^2 \leq 2$ ”是“ $-1 \leq ab \leq 1$ ”的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(9) 在平面直角坐标系中, 直线  $y = kx + m (k \neq 0)$  与  $x$  轴和  $y$  轴分别交于  $A, B$  两点,  $|AB| = 2\sqrt{2}$ , 若  $CA \perp CB$ , 则当  $k, m$  变化时, 点  $C$  到点  $(1, 1)$  的距离的最大值为

(A)  $4\sqrt{2}$

(B)  $3\sqrt{2}$

(C)  $2\sqrt{2}$

(D)  $\sqrt{2}$

(10) 李明开发的小程序在发布时已有 500 名初始用户, 经过  $t$  天后, 用户人数  $A(t) = A(0)e^{kt}$ , 其中  $k$  为常数. 已知小程序发布经过 10 天后有 2 000 名用户, 则用户超过 50 000 名至少经过的天数为

(本题取  $\lg 2 = 0.30$ )

(A) 31

(B) 32

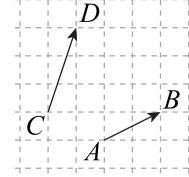
(C) 33

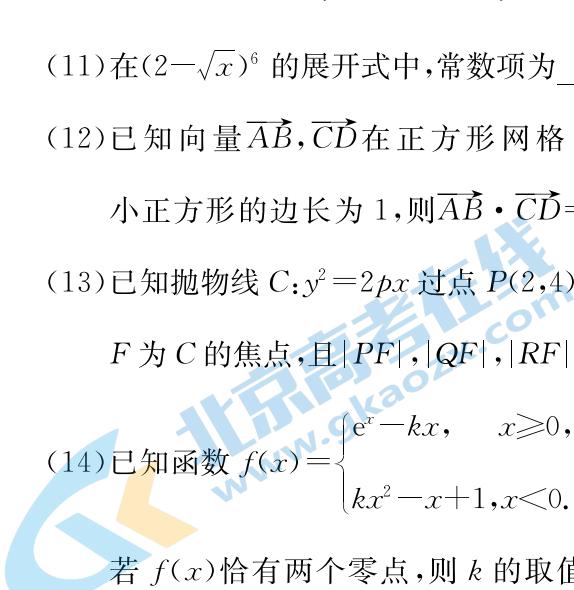
(D) 34

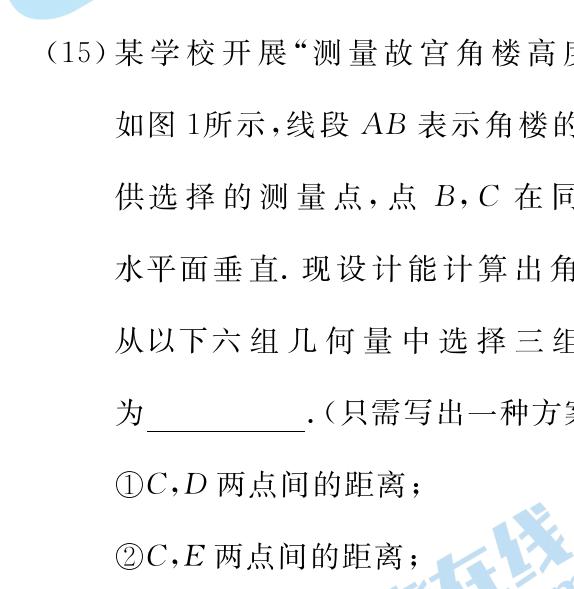
## 第二部分(非选择题 共 110 分)

**二、填空题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分。**

(11) 在  $(2-\sqrt{x})^6$  的展开式中,常数项为 \_\_\_\_\_. (用数字作答)

(12) 已知向量  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  在正方形网格中的位置如图所示. 若网格上小正方形的边长为 1, 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}=$  \_\_\_\_\_. 

(13) 已知抛物线  $C: y^2=2px$  过点  $P(2,4)$ , 则  $p=$  \_\_\_\_\_; 若点  $Q(4,y_1), R(t,y_2)$  在  $C$  上,  $F$  为  $C$  的焦点, 且  $|PF|, |QF|, |RF|$  成等比数列, 则  $t=$  \_\_\_\_\_. 

(14) 已知函数  $f(x)=\begin{cases} e^x-kx, & x \geqslant 0, \\ kx^2-x+1, & x<0. \end{cases}$  若  $k=0$ , 则不等式  $f(x)<2$  的解集为 \_\_\_\_\_.  
若  $f(x)$  恰有两个零点, 则  $k$  的取值范围为 \_\_\_\_\_. 

(15) 某学校开展“测量故宫角楼高度”的综合实践活动.

如图 1 所示, 线段  $AB$  表示角楼的高,  $C, D, E$  为三个可供选择的测量点, 点  $B, C$  在同一水平面内,  $CD$  与水平面垂直. 现设计能计算出角楼高度的测量方案, 从以下六组几何量中选择三组进行测量, 则可以选择的几何量的编号为 \_\_\_\_\_. (只需写出一种方案)

- ①  $C, D$  两点间的距离;
- ②  $C, E$  两点间的距离;
- ③ 由点  $C$  观察点  $A$  的仰角  $\alpha$ ;
- ④ 由点  $D$  观察点  $A$  的仰角  $\beta$ ;
- ⑤  $\angle ACE$  和  $\angle AEC$ ;
- ⑥  $\angle ADE$  和  $\angle AED$ .

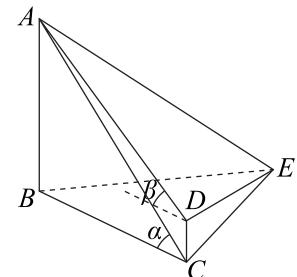


图 1

三、解答题共 6 小题,共 85 分。解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 13 分)

已知函数  $f(x) = a \sin \omega x \cos \omega x$  ( $a > 0, \omega > 0$ ). 从下列四个条件中选择两个作为已知,使函数  $f(x)$  存在且唯一确定.

(I) 求  $f(x)$  的解析式;

(II) 设  $g(x) = f(x) - 2 \cos^2 \omega x + 1$ , 求函数  $g(x)$  在  $(0, \pi)$  上的单调递增区间.

条件①:  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ;

条件②:  $f(x)$  为偶函数;

条件③:  $f(x)$  的最大值为 1;

条件④:  $f(x)$  图象的相邻两条对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ .

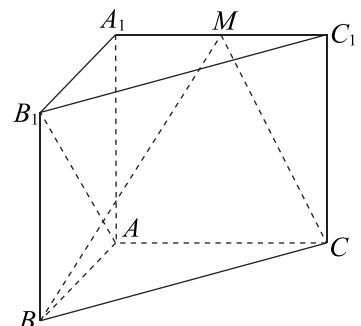
注: 如果选择的条件不符合要求, 第(I)问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

(17)(本小题 14 分)

如图, 在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ,  $AB \perp AC$ ,  $AB=AC=AA_1=1$ ,  $M$  为线段  $A_1C_1$  上一点.

(I) 求证:  $BM \perp AB_1$ ;

(II) 若直线  $AB_1$  与平面  $BCM$  所成角为  $\frac{\pi}{4}$ , 求点  $A_1$  到平面  $BCM$  的距离.



(18)(本小题 13 分)

根据 Z 市 2020 年人口普查的数据,在该市 15 岁及以上常住人口中,各种受教育程度人口所占比例(精确到 0.01)如下表所示:

受教育程度 性别\	未上学	小学	初中	高中	大学 专科	大学 本科	硕士 研究生	博士 研究生
男	0.00	0.03	0.14	0.11	0.07	0.11	0.03	0.01
女	0.01	0.04	0.11	0.11	0.08	0.12	0.03	0.00
合计	0.01	0.07	0.25	0.22	0.15	0.23	0.06	0.01

- (I) 已知 Z 市 15 岁及以上常住人口在全市常住人口中所占比例约为 85%,从全市常住人口中随机选取 1 人,试估计该市民年龄为 15 岁及以上且受教育程度为硕士研究生的概率;
- (II) 从 Z 市 15 岁及以上常住人口中随机选取 2 人,记这 2 人中受教育程度为大学本科及以上的人数为  $X$ ,求  $X$  的分布列和数学期望;
- (III) 若受教育程度为未上学、小学、初中、高中、大学专科及以上的受教育年限分别记为 0 年、6 年、9 年、12 年、16 年,设 Z 市 15 岁及以上男性与女性常住人口的平均受教育年限分别为  $a$  年和  $b$  年,依据表中的数据直接写出  $a$  与  $b$  的大小关系.  
(结论不要求证明)

(19)(本小题 15 分)

$$\text{已知函数 } f(x) = \frac{x-a}{x^2-1}.$$

- (I) 若曲线  $y=f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线斜率为 -1,求  $a$  的值;
- (II) 若  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上有最大值,求  $a$  的取值范围.

(20)(本小题 15 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 焦距为  $2\sqrt{3}$ .

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 过点  $P(4,0)$  作斜率为  $k$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点. 是否存在常数  $t$ , 使得直线  $x=t$  与直线  $l$  的交点  $Q$  在  $A, B$  之间, 且总有  $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|QA|}{|QB|}$ ? 若存在, 求出  $t$  的值; 若不存在, 说明理由.

(21)(本小题 15 分)

设数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$ . 如果  $a_i \in \{1, 2, \dots, n\} (i=1, 2, \dots, n)$ , 且当  $i \neq j$  时,  $a_i \neq a_j (1 \leq i, j \leq n)$ , 则称数列  $A$  具有性质  $P$ . 对于具有性质  $P$  的数列  $A$ , 定义数列

$T(A): t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ , 其中  $t_k = \begin{cases} 1, & a_k < a_{k+1}, \\ 0, & a_k > a_{k+1} \end{cases} (k=1, 2, \dots, n-1).$

(I) 对  $T(A): 0, 1, 1$ , 写出所有具有性质  $P$  的数列  $A$ ;

(II) 对数列  $E: e_1, e_2, \dots, e_{n-1} (n \geq 2)$ , 其中  $e_i \in \{0, 1\} (i=1, 2, \dots, n-1)$ , 证明: 存在具有性质  $P$  的数列  $A$ , 使得  $T(A)$  与  $E$  为同一个数列;

(III) 对具有性质  $P$  的数列  $A$ , 若  $|a_1 - a_n| = 1 (n \geq 5)$  且数列  $T(A)$  满足

$t_i = \begin{cases} 0, & i \text{ 为奇数,} \\ 1, & i \text{ 为偶数} \end{cases} (i=1, 2, \dots, n-1)$ , 证明: 这样的数列  $A$  有偶数个.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

## 2022 北京高三各区一模试题下载

北京高考资讯公众号搜集整理了【**2022 北京各区高三一模试题&答案**】，想要获取试题资料，关注公众号，点击菜单栏【**高三一模**】—【**一模试题**】，即可**免费获取**全部一模试题及答案，欢迎大家下载练习！

还有更多**一模排名**等信息，考后持续更新！



微信搜一搜

Q 北京高考资讯

The screenshot shows the WeChat official account interface for Beijing Gaokao Information. On the left, there is a vertical menu with options: '一模试题' (highlighted with a red border), '二模试题', '高考真题', '期末试题', and '各省热门试题'. Below the menu are three buttons: a circular one with a person icon, a red rectangular one labeled '高三一模', and a blue rectangular one labeled '热门资讯' and '福利资料'. In the center, there is a QR code with the text '识别二维码查看下载 北京各区一模试题&答案' above it. To the right, there is a large orange area featuring a cartoon illustration of a student sitting at a desk, writing in a notebook. A speech bubble above the student says '这里有最新热门试题' (There are the latest hot test papers here). Another speech bubble next to the student says '考后最快更新分享' (The fastest update after the exam).