2019~2020学年度北京市大兴区高三第一次综合练习

2020.4

数学

本试卷共6页，满分150分．考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分．在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

（1）在复平面内，$\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

（2）已知集合$A=\{x\,|\,x=2k,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\,|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，则$A\cap B=$

（A）$[-1,1]$　　（B）$[-2,2]$

（C）$\{0,2\}$　　（D）$\{-2,0,2\}$

（3）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_2=0$，$a_4=1$，则S_4等于

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（4）下列函数中，在区间$(0,+\infty)$上单调递增且存在零点的是

（A）$y=\mathrm{e}^x$　　（B）$y=\sqrt{x}+1$

（C）$y=-\log_{\frac{1}{2}}x$　　（D）$y=(x-1)^2$

（5）在$(x-2)^n$的展开式中，只有第三项的二项式系数最大，则含x项的系数等于

（A）-32　　（B）-24

（C）8　　（D）4

（6）若抛物线$y^2=4x$上一点M到其焦点的距离等于2，则M到其顶点O的距离等于

（A）$\sqrt{3}$　　（B）2

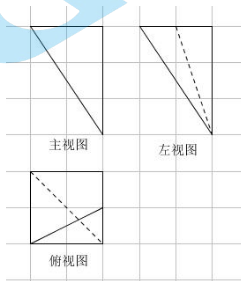
（C）$\sqrt{5}$　　（D）3

（7）已知数列$\{a_n\}$是等比数列，它的前n项和为S_n，则“对任意$n\in \mathbf{N}^*$，$a_n>0$”是“数列$\{S_n\}$为递增数列”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）某四棱锥的三视图如图所示，如果方格纸上小正方形的边长为1，那么该几何体的最长棱的棱长为



（A）3

（B）$\sqrt{10}$

（C）$\sqrt{13}$

（D）$\sqrt{17}$

（9）已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})\ (\omega>0)$．若关于$x$的方程$f(x)=1$在区间$[0,\pi]$上有且仅有两个不相等的实根，则$\omega$的最大整数值为

（A）3　　（B）4

（C）5　　（D）6

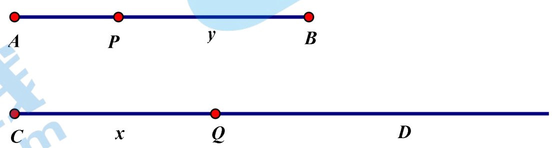
（10）如图，假定两点P，Q以相同的初速度运动．点Q沿直线CD作匀速运动，$CQ=x$；点P沿线段AB（长度为10^7单位）运动，它在任何一点的速度值等于它尚未经过的距离（$PB=y$）．令P与Q同时分别从A，C出发，那么，定义x为y的纳皮尔对数，用现在的数学符号表示x与y的对应关系就是$y=10^7(\dfrac{1}{e})^{\frac{x}{10^7}}$，其中e为自然对数的底．当点$P$从线段$AB$的三等分点移动到中点时，经过的时间为

（A）$\ln 2$

（B）$\ln 3$

（C）$\ln\dfrac{3}{2}$

（D）$\ln\dfrac{4}{3}$



第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

（11）已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,t)$，若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $t=$_______；

（12）若函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$ 在区间 $[0,m]$ 上单调减区间，则 m 的一个值可以是_______；

（13）若对任意 $x>0$，关于 x 的不等式 $a\leqslant\frac{1}{x}+x$ 恒成立，则实数 a 的范围是_______；

（14）已知 $A(a,r)$，$B(b,s)$ 为函数 $y=\log_2 x$ 图象上两点，其中 $a>b$．已知直线 AB 的斜率等于 2，且 $|AB|=\sqrt{5}$，则 $a-b=$_______；$\frac{a}{b}=$______；

（15）在直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率 $e>2$，其渐近线与圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 交 x 轴上方于 A，B 两点，有下列三个结论：

①$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|<|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$；

②$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$ 存在最大值；

③ $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|>6$．

则正确结论的序号为_______________________

三、解答题共 6 题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

（16）（本小题 14 分）

在 ΔABC 中，$c=1$，$A=\dfrac{2\pi}{3}$，且 ΔABC 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

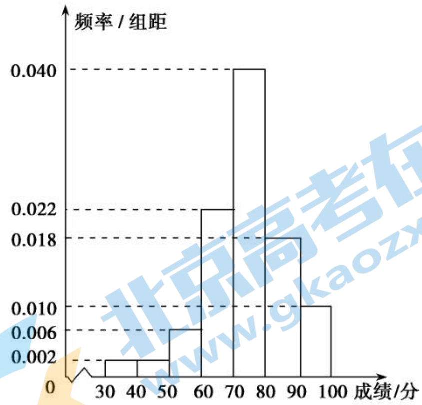
（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）若 D 为 BC 上一点，且____________，求 $\sin\angle ADB$ 的值．

从① $AD=1$，② $\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$ 这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答．

（17）（本小题 14 分）

为了调查各校学生体质健康达标情况，某机构 M 采用分层抽样的方法从 A 校抽取了 m 名学生进行体育测试，成绩按照以下区间分为七组：[30,40)，[40,50)，[50,60)，[60,70)，[70,80)，[80,90)，[90,100]，并得到如下频率分布直方图．根据规定，测试成绩低于 60 分为体质不达标。已知本次测试中不达标学生共有 20 人．



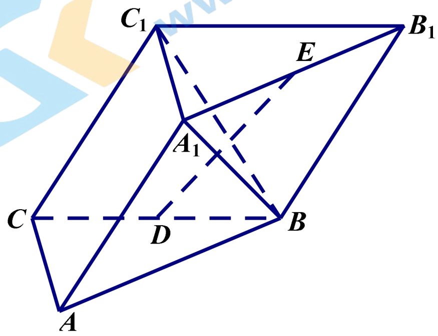
（Ⅰ）求 m 的值；

（Ⅱ）现从 A 校全体同学中随机抽取 2 人，以频率作为概率，记 X 表示成绩不低于 90 分的人数，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）另一机构 N 也对该校学生做同样的体质达标测试，并用简单随机抽样方法抽取了 100 名学生，经测试有 20 名学生成绩低于 60 分．计算两家机构测试成绩的不达标率，你认为用哪一个值作为对该校学生体质不达标率的估计较为合理，说明理由。

（18）（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=BC=AA_1$，$\angle BCC_1=60^\circ$，平面$ABC\perp$平面BCC_1B_1，D 是 BC 的中点，E 是棱 A_1B_1 上一动点.



（Ⅰ）若 E 是棱 A_1B_1 的中点，证明：$DE//$平面ACC_1A_1；

（Ⅱ）求二面角 C_1-CA-B 的余弦值；

（Ⅲ）是否存在点 E，使得 $DE\perp BC_1$，若存在，求出 E 的坐标，若不存在，说明理由。

（19）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，且经过点 $(2,0)$，一条直线 l 与椭圆 C 交于 P，Q 两点，以 PQ 为直径的圆经过坐标原点 O.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）求证：$\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{1}{|OQ|^2}$ 为定值.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{ax}{x+1}$.

（Ⅰ）若 $a=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：函数 $f(x)$ 有且只有一个零点.

（21）（本小题 14 分）

已知数列 a_1，a_2，…，a_{10} 满足：对任意的 i，$j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，若 $i \neq j$，则 $a_i \neq a_j$，且 $a_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，设集合 $A = \{a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \mid i = 1,2,3,4,5,6,7,8\}$，集合 A 中元素最小值记为 $m(A)$，集合 A 中元素最大值记为 $n(A)$.

（Ⅰ）对于数列：10，6，1，2，7，8，3，9，5，4，写出集合 A 及 $m(A)$，$n(A)$；

（Ⅱ）求证：$m(A)$ 不可能为 18；

（Ⅲ）求 $m(A)$ 的最大值以及 $n(A)$ 的最小值.

2019~2020 学年度北京市大兴区高三第一次综合练习

高三数学参考答案及评分标准

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	D	B	C	A	B	C	D	B	D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）-2

（12）答案不唯一，只要 $0 < m \leqslant \frac{\pi}{2}$

（13）$(-\infty, 2]$（或 $\{a \mid a \leqslant 2\}$

（14）1；4（第一个空 3 分，第二个空 2 分）

（15）①③ （不选或有错选得 0 分，只选对 1 个得 3 分，全部选对得 5 分．）

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 14 分）

解：（I） 由于 $c=1$，$A=\frac{2\pi}{3}$，

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$，……2分

所以 $b=2$．……3分

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，……5分

解得 $a=\sqrt{7}$．……6分

（II）①当 $AD=1$ 时，

在 ΔABC 中，由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，……2 分

即 $\frac{2}{\sin B}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{21}}{7}$．……4 分

因为 $AD=AB=1$，所以 $\angle ADB=\angle B$．……6 分

所以 $\sin\angle ADB=\sin B$，……7分

即 $\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{21}}{7}$．……8分

②当$\angle CAD=30^{\circ}$时，

在ΔABC中，由余弦定理知，

$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{7+1-4}{2\sqrt{7}\times 1}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.　　……3 分

因为$A=120^{\circ}$，所以$\angle DAB=90^{\circ}$，　　……4 分

所以$\angle B+\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}$，　　……5 分

所以$\sin\angle ADB=\cos B$　，　　……7分

即$\sin\angle ADB=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.　　……8分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由频率分布直方图知，$m\times(0.002+0.002+0.006)\times 10=20$，　　……2 分

解得$m=200$.　　……3 分

（Ⅱ）**方法 1**：

由图知，每位学生成绩不低于 90 分的频率为$0.01\times 10=0.1$，　　……1 分

由已知，X的所有可能取值为0，1，2，　　……2 分

则$P(X=0)=C_2^0\cdot(1-0.1)^2=0.81$，

$P(X=1)=C_2^1\cdot 0.1(1-0.1)=0.18$，

$P(X=2)=C_2^2\cdot 0.1^2=0.01$.　　……5 分

所以X的分布列为

X	0	1	2
P	0.81	0.18	0.01

……6 分

所以$EX=0\times 0.81+1\times 0.18+2\times 0.01=0.2$.　　……7 分

方法 2：由图知，每位学生成绩不低于 90 分的频率为$0.01\times 10=0.1$，　　……1 分

由已知$X\sim B(2,0.1)$，　　……2 分

则$P(X=0)=C_2^0\cdot(1-0.1)^2=0.81$，

$P(X=1)=C_2^1\cdot 0.1(1-0.1)=0.18$，

$P(X=2)=C_2^2\cdot 0.1^2=0.01$.　　……5 分

所以X的分布列为

X	0	1	2
P	0.81	0.18	0.01

……6 分

所以 $EX=2\times 0.1=0.2$．　　……7 分

（III）机构 M 抽测的不达标率为 $\frac{20}{200}=0.1$ ，　　……1 分

机构 N 抽测的不达标率为 $\frac{20}{100}=0.2$．　　……2 分

（以下答案不唯一，只要写出理由即可）

①用机构 M 测试的不达标率 0.1 估计 A 校不达标率较为合理。　　……3 分

理由：机构 M 选取样本时使用了分层抽样方法，样本量也大于机构 N，样本更有代表性，所以，能较好反映了总体的分布。　　……4 分

②没有充足的理由否认机构 N 的成绩更合理．　　……3 分

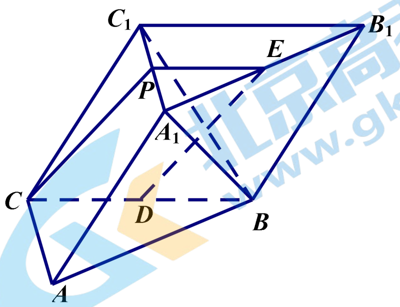
理由：尽管机构 N 的样本量比机构 M 少，但由于样本的随机性，不能排除样本较好的反映了总体的分布，所以，没有充足的理由否认机构 N 的成绩更合理。　　……4 分

（18）（共 14 分）

（Ⅰ）证明：取 A_1C_1 中点为 P，连结 CP，EP，

在 $\Delta A_1B_1C_1$ 中，因为 E、P 为 A_1B_1、A_1C_1 的中点，

所以 $EP\,//\,B_1C_1$ 且 $EP=\frac{1}{2}B_1C_1$……1 分



又因为 D 是 BC 的中点，$CD=\frac{1}{2}BC$，

所以 $EP\,//\,BC$ 且 $EP=CD$，

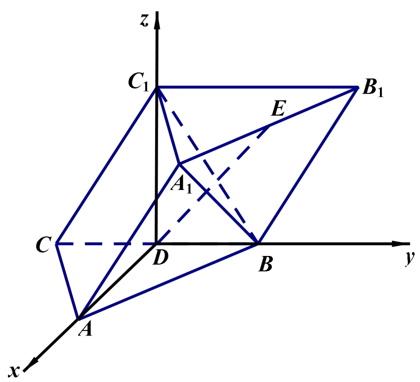
所以 $CDEP$ 为平行四边形

所以 $CP\,//\,DE$．　　……2 分

又因为 $DE\not\subset$ 平面 ACC_1A_1，　　……3 分

$CP\subset$平面 ACC_1A_1，

所以 $DE\,//$ 平面 ACC_1A_1．　　……4 分



（II）连结 C_1D、AD，

因为 ΔABC 是等边三角形，D 是 BC 的中点，

所以 $AD\perp BC$，

因为 $BC=AA_1=CC_1$，$\angle BCC_1=60^\circ$，

所以 $C_1D\perp BC$.

因为平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1，

平面 $ABC\cap$ 平面 $BCC_1B_1=BC$，

$C_1D\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $C_1D\perp$ 平面 ABC，

所以 DC_1，DA，DB 两两垂直.

如图，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，　　　　　　　……1 分

则 $A(\sqrt{3}，0，0)$，$C(0，-1，0)$，$C_1(0，0，\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{CC_1}=(0，1，\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{3}，1，0)$

设平面 ACC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x，y，z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，　　　　　　　……2 分

即 $\begin{cases}y+\sqrt{3}z=0\\ \sqrt{3}x+y=0\end{cases}$，　　　　　　　……3 分

令 $x=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，$z=1$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1，-\sqrt{3}，1)$.　　　　　　　……4 分

平面 ABC 的法向量为 $\overrightarrow{DC_1}=(0，0，\sqrt{3})$，

$$\cos<\overrightarrow{DC_1},\boldsymbol{n}>=\frac{\overrightarrow{DC_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{DC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

又因为二面角 C_1-CA_1-B 为锐二面角，

所以二面角 C_1-CA_1-B 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.　　　　　　　……6 分

（如果没有建立坐标系，利用二面角的定义，比照步骤给分。）

（III）$A_1(\sqrt{3}，1，\sqrt{3})$，　　　　　　　……1 分

$\overrightarrow{A_1B_1}=(-\sqrt{3}，1，0)$，

设 $\overrightarrow{A_1E}=\lambda\overrightarrow{A_1B_1}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

则 $\overrightarrow{A_1E}=(-\sqrt{3}\lambda,\lambda,0)$，

所以 $E(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,1+\lambda,\sqrt{3})$， ……2 分

$\overrightarrow{DE}=(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,1+\lambda,\sqrt{3})$

所以 $\overrightarrow{BC_1}=(0,-1,\sqrt{3})$，

假设 $DE\perp BC_1$，

则 $\overline{DE}\cdot\overline{BC_1}=0$

解得 $\lambda=2$， ……3 分

这与已知 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 矛盾。

原命题得证. ……4 分

（19）（共 14 分）

（Ⅰ）因为椭圆经过点 $(2,0)$，所以 $a=2$， ……1 分

又因为 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，则 $c=1$， ……2 分

由 $b^2=a^2-c^2$，得 $b^2=3$， ……3 分

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$． ……4 分

（Ⅱ）**方法一**

因为以 PQ 为直径的圆过坐标原点 O，所以 $OP\perp OQ$． ……1 分

①若直线 OP 的斜率不存在，则 P 为椭圆与 y 轴交点，Q 为椭圆与 x 轴交点，

因此 $|OP|^2=b^2=3$，$|OQ|^2=a^2=4$，

则 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$． ……2 分

②若直线 OP 的斜率存在且为 0，则 P 为椭圆与 x 轴交点，Q 为椭圆与 y 轴交点，

因此 $|OP|^2=a^2=4$，$|OQ|^2=b^2=3$，

则 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$． ……3 分

③若直线 OP 的斜率存在且不为 0，

可设直线 OP 方程为 $y=kx(k\neq0)$，

则直线 OQ 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x$． ……4 分

联立 $\begin{cases} y=kx \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{k^2x^2}{3}=1$， ……5 分

即 $x^2=\dfrac{12}{3+4k^2}$， $y^2=\dfrac{12k^2}{3+4k^2}$， ……6 分

即 $\dfrac{1}{|OP|^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{3+4k^2}{12+12k^2}$， ……7 分

同理，$\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{4+3k^2}{12+12k^2}$， ……8 分

则 $\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{7+7k^2}{12+12k^2}=\dfrac{7}{12}$. ……10 分

方法二

①若直线 l 的斜率存在时，设 $l: y=kx+m$，与椭圆方程联立得：

$\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，有 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$， ……2 分

由题意，$\Delta>0$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3}$. ……3 分

因为以 PQ 为直径的圆过原点 O，

由 $OP\perp OQ$，得 $x_1x_2+y_1y_2=0$， ……4 分

即 $x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，整理得，

$12(1+k^2)=7m^2$， ……5 分

而 $\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{|OP|^2+|OQ|^2}{|OP|^2|OQ|^2}=\dfrac{|PQ|^2}{|OP|^2|OQ|^2}$ ……6 分

设 h 为 O 到 l 的距离，则

$|OP|\cdot|OQ|=|PQ|\cdot h$

所以 $\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{1}{h^2}$，

而 $h=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以 $\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{1+k^2}{m^2}=\dfrac{7}{12}$. ……8 分

②若直线 l 的斜率不存在，则有 $k_{OP}=\pm1$， ……9 分

不妨设 $k_{OP}=1$，设 $P(x_1,y_1)$，有 $x_1=y_1$，

代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 得，$x_1{}^2=\frac{12}{7}$，

$|OP|^2=|OQ|^2=\frac{24}{7}$，

即 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{7}{24}\times 2=\frac{7}{12}$，

综上 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{7}{12}$． ……10 分

（20）（共 15 分）

（Ⅰ）解；当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{x+1}$，$x>0$ ……1 分

$f(1)=-\frac{1}{2}$， ……2 分

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+x+1}{x(x+1)^2}$， ……3 分

$k=f'(1)=\frac{3}{4}$， ……4 分

所以函数 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是 $3x-4y-5=0$． ……5 分

（Ⅱ）**解法 1**

函数的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{(x+1)^2}=\frac{x^2+(2-a)x+1}{x(x+1)^2}$， ……1 分

设 $g(x)=x^2+(2-a)x+1$（$x>0$），

①当 $a\leqslant 2$ 或 $a>2$ 且 $\Delta=a^2-4a\leqslant 0$，即 $a\leqslant 4$ 时，都有 $g(x)\geqslant 0$，

所以，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是增函数， ……2 分

又 $f(1)=-\frac{a}{2}$，$f(e^a)=\frac{a}{e^a+1}$， ……4 分

若 $a=0$ 时，$f(1)=0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有且只有一个零点，……5 分

若 $a\neq 0$ 时，由于 $f(1)f(e^a)=-\frac{a^2}{e^a}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在唯一零点． ……6 分

②当 $a>4$ 时，方程 $x^2+(2-a)x+1=0$ 的判别式 $\Delta=a^2-4a>0$，

设方程的两根为 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，

由韦达定理可知 $x_1+x_2=a-2>0$， $x_1x_2=1>0$，　　　　……7 分

所以 $0<x_1<1$，$x_2>1$，

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

因为 $0<x_1<1$，所以 $\ln x_1<0$，

所以 $f(x)_{极大值}=f(x_1)=\ln x_1-\dfrac{ax_1}{x_1+1}<0$，　　　　……8 分

由上可知 $f(x_2)<f(1)=-\dfrac{a}{2}<0$， $f(e^a)=\dfrac{a}{e^a+1}>0$，　　　　……9 分

存在唯一的 $x_0\in(x_2,e^a)$ 使得 $f(x_0)=0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有且只有一个零点．

综上所述，对任意的 $a\in\mathbf{R}$ 函数 $y=f(x)$ 有且只有一个零点．……10 分

解法 2

函数的定义域为 $(0,+\infty)$，

要使函数 $f(x)$ 有且只有一个零点，只需方程 $(x+1)\ln x-ax=0$ 有且只有一个根，

即只需关于 x 的方程 $\dfrac{(x+1)\ln x}{x}-a=0$ 在 $(0，+\infty)$ 上有且只有一个解．

设函数 $g(x)=\dfrac{(x+1)\ln x}{x}-a$，　　　　……1 分

则 $g'(x)=\dfrac{x+1-\ln x}{x^2}$，　　　　……2 分

令 $h(x)=x+1-\ln x$，

则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，　　　　……3 分

由 $h'(x)=0$，得 $x=1$．　　　　……4 分

x	$(0，1)$	1	$(1，+\infty)$
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	单调递减	极小值	单调递增

由于 $h(x)_{\min}=h(1)=2>0$，　　　　……5 分

所以 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)=\dfrac{(x+1)\ln x}{x}-a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，　　　　……6 分

又 $g(1)=-a$， $g(e^a)=\dfrac{a}{e^a}$，　　　　……8 分

①当 $a=0$ 时， $g(1)=0$，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有且只有一个零点，

②当 $a\neq 0$ 时，由于 $g(1)g(e^a)=-\dfrac{a^2}{e^a}<0$，所以存在唯一零点.

综上所述，对任意的 $a\in\mathbf{R}$ 函数 $y=f(x)$ 有且只有一个零点. ……10 分

（21）（共 14 分）

（Ⅰ） $A=\{17,9,10,18,20\}$，

$m(A)=9$，$n(A)=20$.　　　　……3 分

（Ⅱ）证明:假设 $m(A)\geqslant 18$，　　　　……1 分

设 $S=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9)+a_{10}=55$

则 $S=55\geqslant 3m(A)+a_{10}=3\times 18+a_{10}$　　　　……2 分

即 $a_{10}\leqslant 1$，因为 $a_i\geqslant 1\ (i=1,2,3,\cdots,10)$

所以 $a_{10}=1$　　　　……3 分

同理，设 $S=a_1+(a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7)+(a_8+a_9+a_{10})=55$

可以推出 $a_1=1$，　　　　……4 分

$a_i\ (i=1,2,\cdots,10)$ 中有两个元素为 1，与题设矛盾，

故假设不成立，

$m(A)$ 不可能为 18.　　　　……5 分

（Ⅲ） $m(A)$ 的最大值为 17， $n(A)$ 的最小值为 16.

①首先求 $m(A)$，由（Ⅱ）知 $m(A)<18$，而 $m(A)=17$ 是可能的.

当 $m(A)=17$ 时，　　　　……1 分

设 $S=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9)+a_{10}=55$

则 $S=55\geq 3m(A)+a_{10}=3\times 17+a_{10}$

即 $a_{10}\leqslant 4$， ……2 分

又 $S=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+a_7+(a_8+a_9+a_{10})=55$

得 $55=S\geqslant 3m(A)+a_7=51+a_7$， 即 $a_7\leqslant 4$.

同理可得： $a_i\leqslant 4\ (i=1,4,7,10)$. ……3 分

对于数列： 1,6,10,2,7,8,3,9,5,4

此时 $A=\{17,18,19,20\}$， $m(A)=17$，$n(A)=20$， 满足题意.

所以 $m(A)$ 的最大值为 17； ……4 分

②现证明： $n(A)$ 的最小值为 16.

先证明 $n(A)\leqslant 15$ 为不可能的，假设 $n(A)\leqslant 15$. ……5 分

设 $S=a_1+(a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7)+(a_8+a_9+a_{10})=55$，

可得 $55\leqslant 3n(A)+a_1\leqslant 3\times 15+a_1$， 即 $a_1\geq 10$， 元素最大值为 10，所以 $a_1=10$.

又 $(a_1+a_2+a_3)+a_4+(a_5+a_6+a_7)+(a_8+a_9+a_{10})=55\leqslant 3n(A)+a_4\leqslant 3\times 15+a_4$，

同理可以推出 $a_4=10$， 矛盾，假设不成立，所以 $n(A)\geqslant 16$.

数列为： 7,6,2,8,3,4,9,1,5,10 时，

$A=\{13,14,15,16\}$， $m(A)=13$，$n(A)=16$， A 中元素的最大值为 16.

所以 $n(A)$ 的最小值为 16. ……6 分